FUNDAMENTOS DE
FÍSICA

HALLIDAY & RESNICK | 9ª Edição

JEARL WALKER

GRAVITAÇÃO, ONDAS E TERMODINÂMICA

Autor: Halliday, David, 19
Título: Fundamentos de física
V. 1 Ex.9 UFPA BC

VOLUME 2



gen LTC

VOLUME 2

9ª EDIÇÃO

HALLIDAY & RESNICK

FUNDAMENTOS DE FÍSICA

Gravitação, Ondas e Termodinâmica

Jearl Walker
Cleveland State University

Tradução e Revisão Técnica
Ronaldo Sérgio de Biasi, Ph.D.
Professor Titular do Instituto Militar de Engenharia – IME

gen | LTC

TAYMESON .C

Volume 2

12 EQUILÍBRIO E ELASTICIDADE 1

12-1 O que É Física? 1
12-2 Equilíbrio 1
12-3 As Condições de Equilíbrio 2
12-4 O Centro de Gravidade 4
12-5 Alguns Exemplos de Equilíbrio Estático 5
12-6 Estruturas Indeterminadas 10
12-7 Elasticidade 11
REVISÃO E RESUMO 14 PERGUNTAS 15 PROBLEMAS 16

13 GRAVITAÇÃO 28

13-1 O que É Física? 28
13-2 A Lei da Gravitação de Newton 28
13-3 Gravitação e o Princípio da Superposição 31
13-4 A Gravitação Perto da Superfície da Terra 32
13-5 A Gravitação no Interior da Terra 35
13-6 Energia Potencial Gravitacional 37
13-7 Planetas e Satélites: As Leis de Kepler 41
13-8 Satélites: Órbitas e Energias 43
13-9 Einstein e a Gravitação 45
REVISÃO E RESUMO 47 PERGUNTAS 49 PROBLEMAS 50

14 FLUIDOS 59

14-1 O que É Física 59
14-2 O que É um Fluido? 59
14-3 Massa Específica e Pressão 59
14-4 Fluidos em Repouso 62
14-5 Medindo a Pressão 65
14-6 O Princípio de Pascal 66
14-7 O Princípio de Arquimedes 68
14-8 Fluidos Ideais em Movimento 71
14-9 A Equação de Continuidade 72
14-10 A Equação de Bernoulli 74
REVISÃO E RESUMO 78 PERGUNTAS 78 PROBLEMAS 80

15 OSCILAÇÕES 88

15-1 O que É Física? 88
15-2 Movimento Harmônico Simples 88
15-3 A Lei do Movimento Harmônico Simples 92
15-4 A Energia do Movimento Harmônico Simples 94
15-5 Um Oscilador Harmônico Angular Simples 96
15-6 Pêndulos 98
15-7 Movimento Harmônico Simples e Movimento Circular Uniforme 101
15-8 Movimento Harmônico Simples Amortecido 102
15-9 Oscilações Forçadas e Ressonância 104
REVISÃO E RESUMO 105 PERGUNTAS 106 PROBLEMAS 108

16 ONDAS–I 117

16-1 O que É Física? 117
16-2 Tipos de Ondas 117
16-3 Ondas Transversais e Longitudinais 117
16-4 Comprimento de Onda e Frequência 118
16-5 A Velocidade de uma Onda Progressiva 121
16-6 Velocidade da Onda em uma Corda Esticada 124
16-7 Energia e Potência de uma Onda Progressivaem uma Corda 125
16-8 A Equação de Onda 127
16-9 O Princípio da Superposição de Ondas 129
16-10 Interferência de Ondas 129
16-11 Fasores 132
16-12 Ondas Estacionárias 135
16-13 Ondas Estacionárias e Ressonância 137
REVISÃO E RESUMO 140 PERGUNTAS 141 PROBLEMAS 142

17 ONDAS–II 151

17-1 O que É Física? 151
17-2 Ondas Sonoras 151
17-3 A Velocidade do Som 152
17-4 Ondas Sonoras Progressivas 154
17-5 Interferência 157
17-6 Intensidade e Nível Sonoro 158
17-7 Fontes de Sons Musicais 162
17-8 Batimentos 165
17-9 O Efeito Doppler 167
17-10 Velocidades Supersônicas, Ondas de Choque 172
REVISÃO E RESUMO 173 PERGUNTAS 174 PROBLEMAS 175

18 TEMPERATURA, CALOR E A PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA 184

18-1 O que É Física? 184
18-2 Temperatura 184
18-3 A Lei Zero da Termodinâmica 185
18-4 Medindo a Temperatura 185
18-5 As Escalas Celsius e Fahrenheit 187
18-6 Dilatação Térmica 189
18-7 Temperatura e Calor 191
18-8 A Absorção de Calor por Sólidos e Líquidos 193
18-9 Calor e Trabalho 197
18-10 A Primeira Lei da Termodinâmica 199
18-11 Alguns Casos Especiais da Primeira Lei da Termodinâmica 200
18-12 Mecanismos de Transferência de Calor 203
REVISÃO E RESUMO 206 PERGUNTAS 208 PROBLEMAS 209

19 A TEORIA CINÉTICA DOS GASES 217

19-1 O que É Física? 217
19-2 O Número de Avogadro 217
19-3 Gases Ideais 218
19-4 Pressão, Temperatura e Velocidade Média Quadrática 222
19-5 Energia Cinética de Translação 224
19-6 Livre Caminho Médio 225
19-7 A Distribuição de Velocidades das Moléculas 226
19-8 Os Calores Específicos Molares de um Gás Ideal 230
19-9 Graus de Liberdade e Calores Específicos Molares 234
19-10 Efeitos Quânticos 236
19-10 A Expansão Adiabática de um Gás Ideal 237
REVISÃO E RESUMO 240 PERGUNTAS 241 PROBLEMAS 242

20 ENTROPIA E A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA 248

20-1 O que É Física? 248
20-2 Processos Irreversíveis e Entropia 248
20-3 Variação de Entropia 249
20-4 A Segunda Lei da Termodinâmica 253
20-5 Entropia no Mundo Real: Máquinas Térmicas 255
20-6 Entropia no Mundo Real: Refrigeradores 260
20-7 A Eficiência de Máquinas Térmicas Reais 262
20-8 Uma Visão Estatística da Entropia 263
REVISÃO E RESUMO 267 PERGUNTAS 268 PROBLEMAS 269

APÊNDICES

A O Sistema Internacional de Unidades (SI) 275
B Algumas Constantes Fundamentais da Física 277
C Alguns Dados Astronômicos 278
D Fatores de Conversão 279
E Fórmulas Matemáticas 283
F Propriedades dos Elementos 286
G Tabela Periódica dos Elementos 289

RESPOSTAS

dos Testes e das Perguntas e Problemas Ímpares 290

ÍNDICE 293

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
BIBLIOTECA CENTRAL

CAPÍTULO 12

EQUILÍBRIO E ELASTICIDADE

12-1 O QUE É FÍSICA?

As obras civis devem ser estáveis, apesar das forças a que são submetidas. Um edifício, por exemplo, deve permanecer estável, mesmo na presença da força da gravidade e da força do vento; uma ponte deve permanecer estável, mesmo na presença da força da gravidade e dos repetidos solavancos que recebe de carros e caminhões.

Um dos objetivos da física é conhecer o que faz com que um objeto permaneça estável na presença de forças. Neste capítulo, examinamos os dois aspectos principais da estabilidade: o *equilíbrio* das forças e torques que agem sobre objetos rígidos e a *elasticidade* dos objetos não rígidos, uma propriedade que determina o modo como objetos desse tipo se deformam. Quando usada corretamente, essa física é assunto de artigos em revistas de física e de engenharia; quando usada incorretamente, é assunto de manchetes de jornal e pendências judiciais.

12-2 Equilíbrio

Considere os seguintes objetos: (1) um livro em repouso sobre uma mesa, (2) um disco de metal que desliza com velocidade constante em uma superfície sem atrito, (3) as pás de um ventilador de teto girando e (4) a roda de uma bicicleta que se move em uma estrada retilínea com velocidade constante. Para cada um desses objetos,

1. O momento linear $\vec{P}$ de centro de massa é constante.
2. O momento angular $\vec{L}$ em relação ao centro de massa, ou em relação a qualquer outro ponto, também é constante.

Dizemos que esses objetos estão em **equilíbrio**. Os dois requisitos para o equilíbrio são, portanto,

$$\vec{P} = \text{constante e } \vec{L} = \text{constante}. \qquad (12\text{-}1)$$

Neste capítulo, vamos tratar de situações em que as constantes na Eq. 12-1 são nulas, ou seja, vamos tratar principalmente de objetos que não se movem, nem em translação nem em rotação, no sistema de referência em que estão sendo observados. Dizemos que esses objetos estão em **equilíbrio estático**. Dos quatro objetos mencionados no início desta seção, apenas um, o livro em repouso sobre a mesa, está em equilíbrio estático.

A pedra da Fig. 12-1 é outro exemplo de um objeto que, pelo menos no momento em que foi fotografado, está em equilíbrio estático. Ele compartilha esta propriedade com um número incontável de outras estruturas, como catedrais, casas, mesas de jantar e postos de gasolina, que permanecem em repouso por um tempo indefinido.

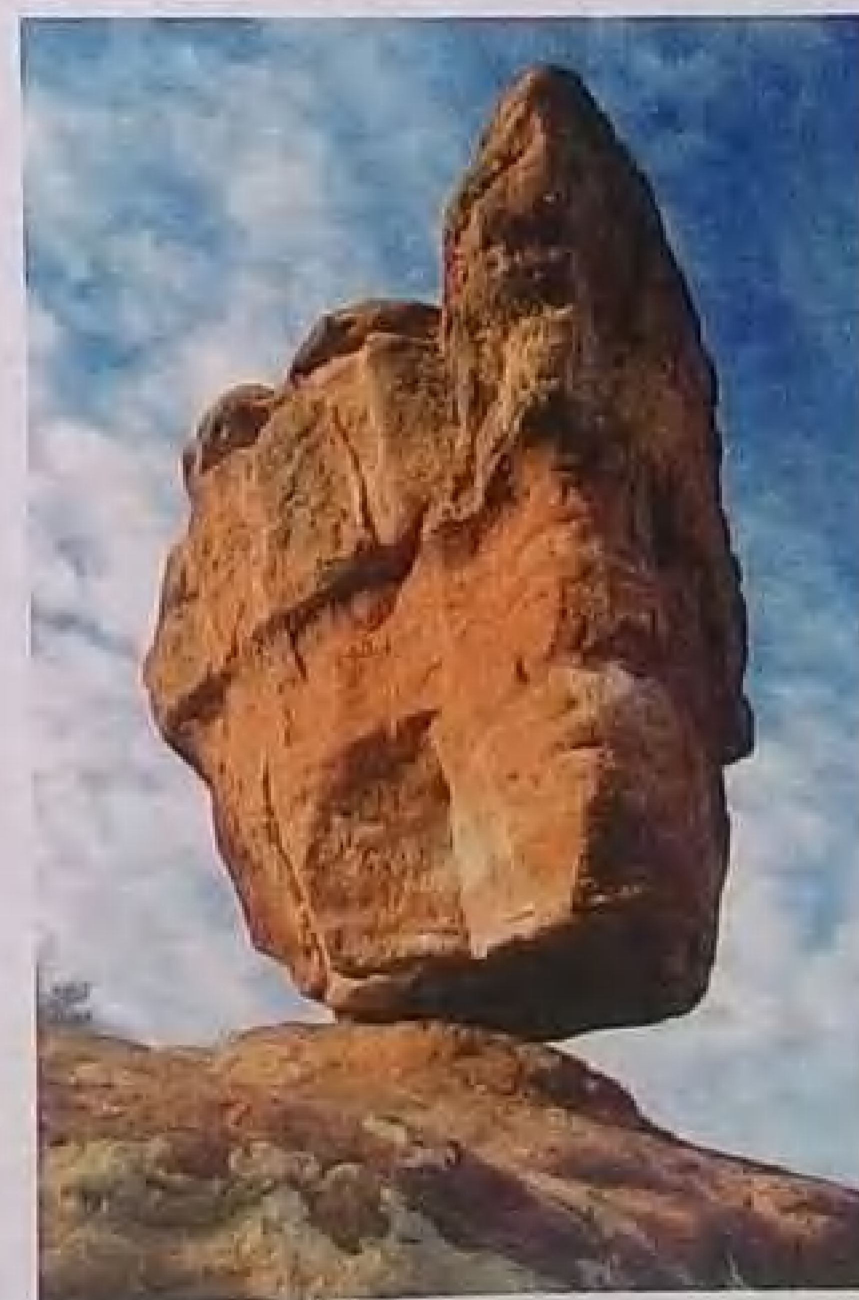


Figura 12-1 Uma pedra em equilíbrio. Embora a sustentação pareça precária, a pedra está em equilíbrio estático. *(Symon Lobsang/Photis/Jupiter Images Corp.)*

Como foi discutido na Seção 8-6, se um corpo retorna ao mesmo estado de equilíbrio estático após ter sido deslocado pela ação de uma força, dizemos que o corpo está em equilíbrio estático *estável*. Um exemplo é uma bola de gude colocada no fundo de uma vasilha côncava. Se, por outro lado, uma pequena força é suficiente

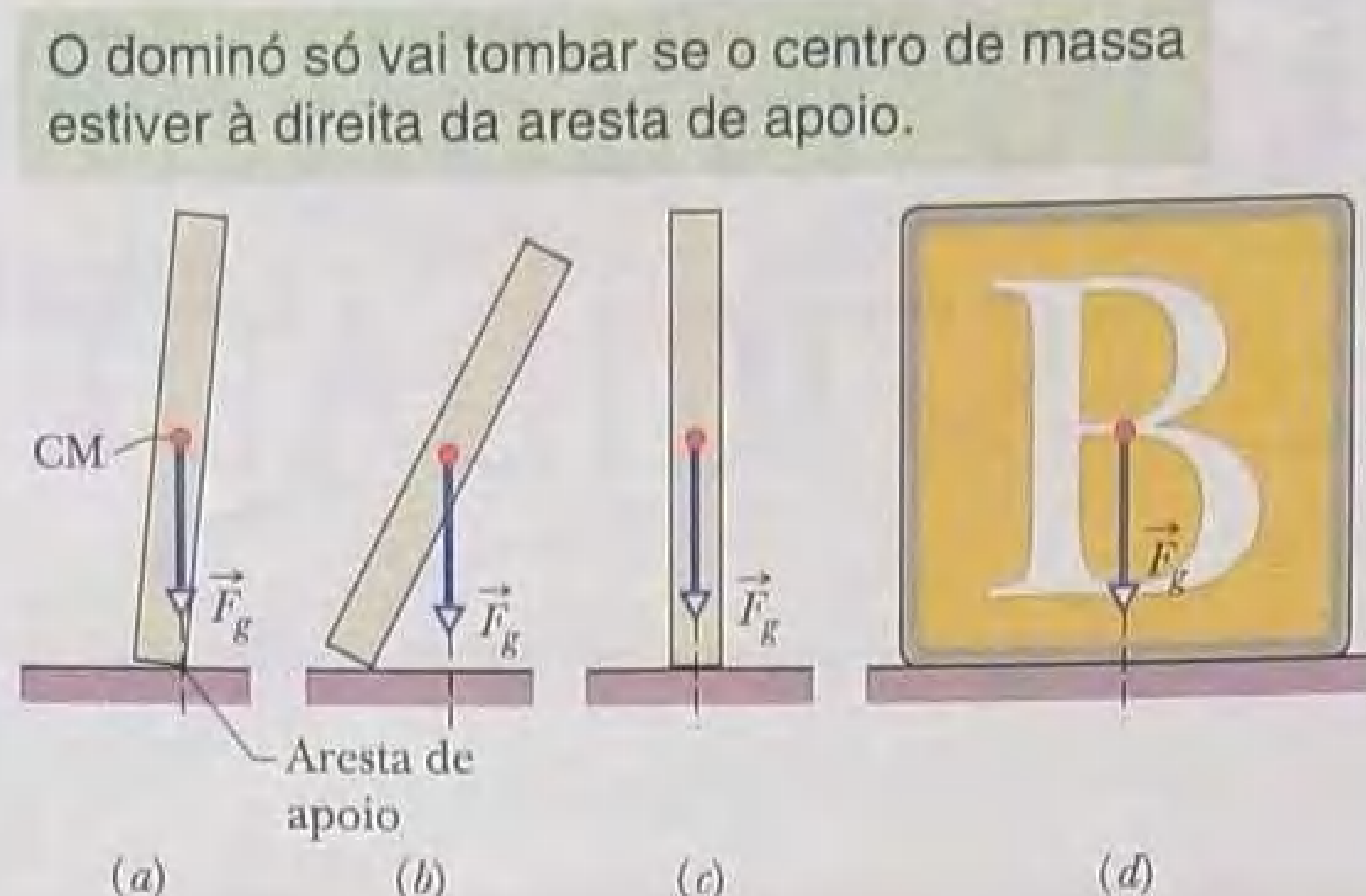


Figura 12-2 (*a*) Um dominó equilibrado em uma aresta, com o centro de massa verticalmente acima dessa aresta. A linha de ação da força gravitacional $\vec{F}_g$ a que o dominó está submetido passa pela aresta de apoio. (*b*) Se o dominó sofre uma rotação, ainda que pequena, a partir da orientação de equilíbrio, $\vec{F}_g$ produz um torque que aumenta a rotação. (*c*) Um dominó apoiado no lado estreito está em uma situação um pouco mais estável do que a do dominó mostrado em (*a*). (*d*) Um cubo é ainda mais estável.

para deslocar o corpo de forma permanente, dizemos que o corpo está em equilíbrio estático *instável.*

Suponha, por exemplo, que equilibramos uma peça de dominó com o centro de massa na vertical em relação a uma aresta de apoio, como na Fig. 12-2*a*. O torque em relação à aresta de apoio devido à força gravitacional $\vec{F}_g$ que age sobre o dominó é zero porque a linha de ação de $\vec{F}_g$ passa pela aresta. Assim, o dominó está em equilíbrio. Evidentemente, mesmo uma pequena força é suficiente para romper o equilíbrio. Quando a linha de ação de $\vec{F}_g$ é deslocada para um dos lados da aresta de apoio (como na Fig. 12-2*b*), o torque produzido por $\vec{F}_g$ faz o dominó girar até atingir uma posição de equilíbrio diferente da anterior. Assim, o dominó da Fig. 12-2*a* está em uma situação de equilíbrio estático instável.

O caso do dominó da Fig. 12-2*c* é diferente. Para que o dominó tombe, a força tem que fazê-lo girar além da posição de equilíbrio da Fig. 12-2*a*, na qual o centro de massa está acima de uma aresta de apoio. Uma força muito pequena não é capaz de derrubar este dominó, mas um piparote com o dedo certamente o fará. (Se arrumarmos vários dominós em fila, um piparote no primeiro poderá provocar a queda de toda a fila.)

O cubo de brinquedo da Fig. 12-2*d* é ainda mais estável, já que o centro de massa tem que ser deslocado ainda mais para passar além de uma aresta de apoio. Um simples piparote não faz o cubo tombar. (É por isso que nunca se vê alguém derrubar uma fileira de cubos.) O operário da Fig. 12-3 tem algo em comum tanto com o dominó como com o cubo: paralelamente à viga, sua postura favorece o equilíbrio e este é estável; perpendicularmente à viga, sua postura é menos favorável ao equilíbrio e este é instável (e à mercê de uma rajada de vento).

A análise do equilíbrio estático é muito importante para os engenheiros. Um engenheiro projetista precisa identificar todas as forças e torques externos a que uma estrutura pode ser submetida e, através de um projeto bem feito e de uma escolha adequada de materiais, assegurar que a estrutura permaneça estável sob o efeito dessas cargas. Uma análise desse tipo é necessária, por exemplo, para garantir que uma ponte não vai desabar em um dia de ventania e que o trem de pouso de um avião vai resistir a uma aterrissagem forçada.



Figura 12-3 Um operário de pé em uma viga está em equilíbrio estático, mas sua posição é mais estável na direção paralela à viga que na direção perpendicular. *(Robert Brenner/ PhotoEdit)*

12-3 As Condições de Equilíbrio

O movimento de translação de um corpo é descrito pela segunda lei de Newton para translações, Eq. 9-27:

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \tag{12-2}$$

Se o corpo está em equilíbrio para translações, ou seja, se $\vec{P}$ é constante, $d\vec{P}/dt = 0$ e temos

$$\vec{F}_{res} = 0 \quad \text{(equilíbrio de forças).} \tag{12-3}$$

O movimento de rotação de um corpo é descrito pela segunda lei de Newton para rotações, Eq. 11-29:

$$\vec{\tau}_{res} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \tag{12-4}$$

Se o corpo está em equilíbrio para rotações, ou seja, se $\vec{L}$ é constante, $d\vec{L}/dt = 0$ e temos

$$\vec{\tau}_{res} = 0 \quad \text{(equilíbrio de torques).} \tag{12-5}$$

Assim, os requisitos para que um corpo esteja em equilíbrio são os seguintes:

1. A soma vetorial das forças externas que agem sobre o corpo deve ser nula.
2. A soma vetorial dos torques externos que agem sobre o corpo, medidos em relação a *qualquer* ponto, deve ser nula.

Esses requisitos, obviamente, valem para o equilíbrio *estático*. Entretanto, valem também para o caso de equilíbrio mais geral no qual $\vec{P}$ e $\vec{L}$ são constantes, mas diferentes de zero.

As Eqs. 12-3 e 12-5, como qualquer equação vetorial, são equivalentes, cada uma, a três equações independentes, uma para cada eixo do sistema de coordenadas:

Equilíbrio de forças	Equilíbrio de torques	
$F_{res,x} = 0$	$\tau_{res,x} = 0$	
$F_{res,y} = 0$	$\tau_{res,y} = 0$	(12-6)
$F_{res,z} = 0$	$\tau_{res,z} = 0$	

Vamos simplificar o problema considerando apenas situações nas quais as forças que agem sobre o corpo estão no plano xy. Isso significa dizer que os torques que agem sobre o corpo tendem a provocar rotações apenas em torno de eixos paralelos ao eixo z. Com essa suposição, eliminamos uma equação de força e duas equações de torque das Eqs. 12-6, ficando com

$$F_{res,x} = 0 \quad \text{(equilíbrio de forças),} \tag{12-7}$$

$$F_{res,y} = 0 \quad \text{(equilíbrio de forças),} \tag{12-8}$$

$$\tau_{res,z} = 0 \quad \text{(equilíbrio de torques).} \tag{12-9}$$

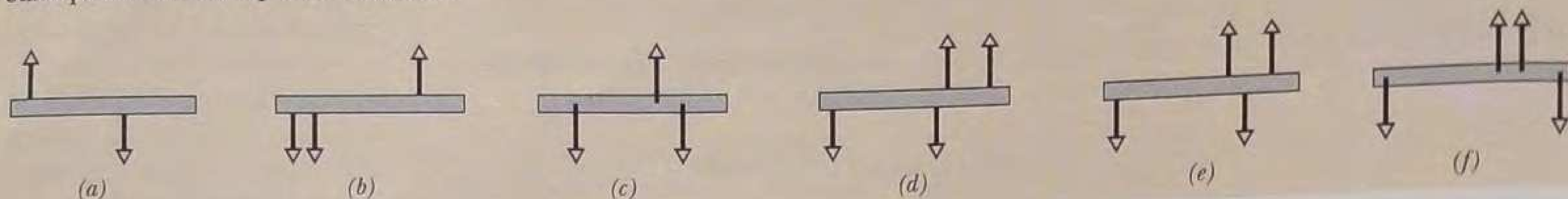
onde $\tau_{res,z}$ é o torque resultante que as forças externas produzem em relação ao eixo z ou em relação a *qualquer eixo* paralelo ao eixo z.

Um disco metálico que desliza sobre o gelo com velocidade constante satisfaz as Eqs. 12-7, 12-8 e 12-9 e está, portanto, em equilíbrio, mas *não está em equilíbrio estático*. Para que o equilíbrio seja estático, o momento linear $\vec{P}$ do disco deve ser zero, ou seja, o disco deve estar em repouso em relação ao gelo. Assim, existe outro requisito para o equilíbrio estático:

3. O momento linear $\vec{P}$ do corpo deve ser nulo.

TESTE 1

A figura mostra seis vistas superiores de uma barra homogênea sobre a qual duas ou mais forças atuam perpendicularmente à maior dimensão da barra. Se os módulos das forças são ajustados adequadamente (mas mantidos diferentes de zero), em que situações a barra pode estar em equilíbrio estático?



12-4 O Centro de Gravidade

A força gravitacional que age sobre um corpo é a soma vetorial das forças gravitacionais que agem sobre todos os elementos (átomos) do corpo. Em vez de considerar todos esses elementos, podemos dizer o seguinte:

> A força gravitacional $\vec{F}_g$ age efetivamente sobre um único ponto de um corpo, o chamado de **centro de gravidade** (CG) do corpo.

A palavra "efetivamente" significa que se as forças que agem sobre os elementos do corpo fossem de alguma forma desligadas e uma força $\vec{F}_g$ aplicada ao centro de gravidade fosse ligada, a força resultante e o torque resultante (em relação a qualquer ponto) sobre o corpo não mudariam.

Até agora, supusemos que a força gravitacional $\vec{F}_g$ era aplicada ao centro de massa (CM) do corpo. Isso equivale a supor que o centro de gravidade coincide com o centro de massa. Lembre-se de que, para um corpo de massa M, a força $\vec{F}_g$ é igual a $M\vec{g}$, onde $\vec{g}$ é a aceleração que a força produziria se o corpo estivesse em queda livre. Na demonstração que se segue, provamos o seguinte:

> Se $\vec{g}$ é igual para todos os elementos de um corpo, o centro de gravidade (CG) do corpo coincide com o centro de massa (CM).

Esta hipótese é aproximadamente verdadeira para os objetos comuns porque $\vec{g}$ varia muito pouco na superfície terrestre e diminui apenas ligeiramente com a altitude. Assim, no caso de objetos como um rato ou um boi, podemos supor que a força gravitacional age no centro de massa. Após a demonstração a seguir, passaremos a usar essa hipótese.

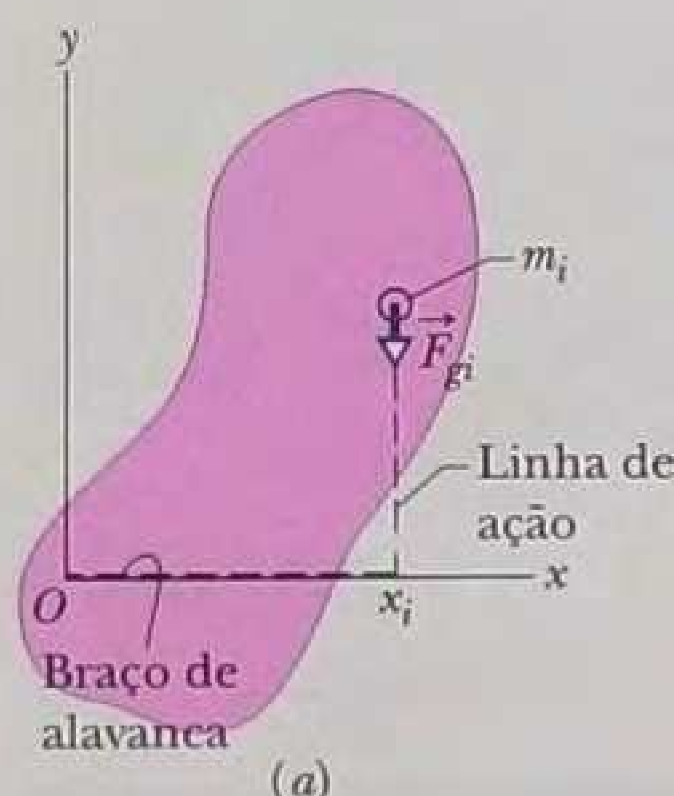




Figura 12-4 (*a*) Um elemento de massa m_i em um corpo de dimensões finitas. A força gravitacional $\vec{F}_{gi}$ a que o elemento está submetido tem um braço de alavanca x_i em relação à origem O do sistema de coordenadas. (*b*) Dizemos que a força gravitacional $\vec{F}_g$ a que um corpo está submetido age sobre o centro de gravidade (CG) do corpo. Neste caso, o braço de alavanca de $\vec{F}_g$ é x_{CG} em relação à origem O.

Demonstração

Primeiro, vamos considerar os elementos do corpo. A Fig. 12-4*a* mostra um corpo de massa M e um dos elementos do corpo, de massa m_i. Uma força gravitacional $\vec{F}_{gi}$ age sobre o elemento e é igual a $m_i\vec{g}_i$. O índice de $\vec{g}_i$ significa que $\vec{g}_i$ é a aceleração da gravidade *na posição do elemento i* (ela pode ser diferente para outros elementos).

Na Fig. 12-4*a*, cada força $\vec{F}_{gi}$ produz um torque τ_i sobre o elemento i em relação à origem O, com braço de alavanca x_i. Usando a Eq. 10-41 ($\tau = r_\perp F$), podemos escrever o torque τ_i na forma

$$\tau_i = x_i F_{gi}. \tag{12-10}$$

O torque resultante sobre todos os elementos do corpo é, portanto,

$$\tau_{\text{res}} = \sum \tau_i = \sum x_i F_{gi}. \tag{12-11}$$

Vamos agora considerar o corpo como um todo. A Fig. 12-4*b* mostra a força gravitacional $\vec{F}_g$ atuando no centro de gravidade do corpo. A força produz um torque τ sobre o corpo em relação a *O*, com um braço de alavanca x_{CG}. Usando novamente a Eq. 10-41, podemos escrever o torque na forma

$$\tau = x_{CG}F_g. \qquad (12\text{-}12)$$

Como a força gravitacional $\vec{F}_{gi}$ a que o corpo está submetido é igual à soma das forças gravitacionais $\vec{F}_g$ que agem sobre todos os elementos, podemos substituir F_g por ΣF_{gi} na Eq. 12-12 e escrever

$$\tau = x_{CG}\sum F_{gi}. \qquad (12\text{-}13)$$

Acontece que o torque produzido pela aplicação da força $\vec{F}_g$ ao centro de gravidade é igual ao torque resultante de todas as forças $\vec{F}_{gi}$ aplicadas aos elementos do corpo. (Foi assim que definimos o centro de gravidade.) Assim, τ na Eq. 12-13 é igual a τ_{res} na Eq. 12-11. Combinando as duas equações, podemos escrever

$$x_{CG}\sum F_{gi} = \sum x_i F_{gi}.$$

Substituindo F_{gi} por $m_i g_i$, obtemos

$$x_{CG}\sum m_i g_i = \sum x_i m_i g_i. \qquad (12\text{-}14)$$

Vamos agora usar uma ideia-chave: se as acelerações g_i para todos os elementos são iguais, podemos cancelar g_i na Eq. 12-14 e escrever

$$x_{CG}\sum m_i = \sum x_i m_i. \qquad (12\text{-}15)$$

Como a soma Σm_i das massas dos elementos é a massa *M* do corpo, podemos escrever a Eq. 12-15 como

$$x_{CG} = \frac{1}{M}\sum x_i m_i. \qquad (12\text{-}16)$$

O lado direito da Eq. 12-16 é a coordenada x_{CM} do centro de massa do corpo (Eq. 9-4). Chegamos portanto à igualdade que queríamos demonstrar:

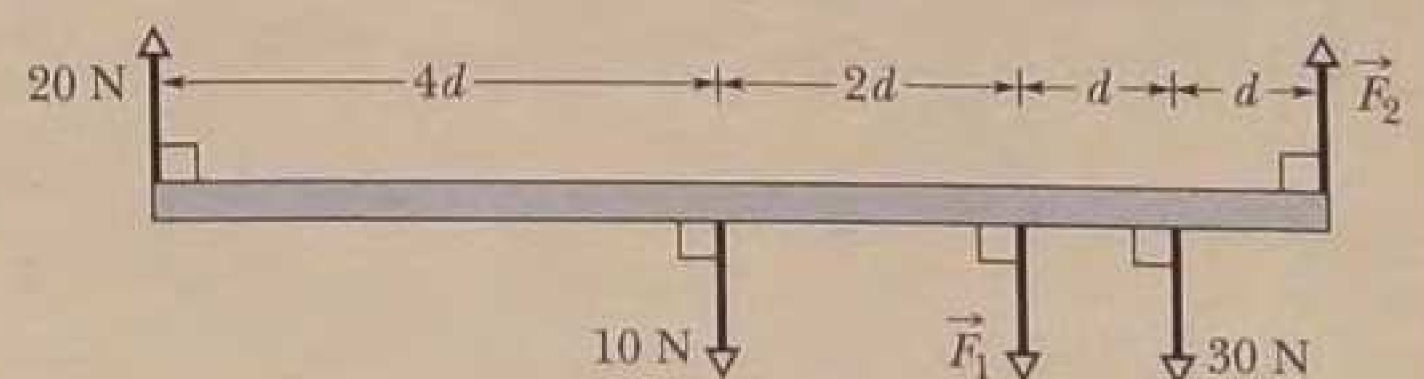
$$x_{CG} = x_{CM}. \qquad (12\text{-}17)$$

12-5 Alguns Exemplos de Equilíbrio Estático

Nesta seção são discutidos quatro problemas que envolvem o equilíbrio estático. Em cada um desses problemas, aplicamos as equações do equilíbrio (Eqs. 12-7, 12-8 e 12-9) a um sistema constituído por um ou mais objetos. As forças envolvidas estão todas no plano *xy*, o que significa que os torques são paralelos ao eixo *z*. Assim, ao aplicar a Eq. 12-9, que estabelece o equilíbrio dos torques, escolhemos um eixo paralelo ao eixo *z* como referência para calcular os torques. Embora a Eq. 12-9 seja satisfeita para *qualquer* eixo de referência, certas escolhas simplificam a aplicação da equação, eliminando um ou mais termos associados a forças desconhecidas.

TESTE 2

A figura mostra uma vista de cima de uma barra homogênea em equilíbrio estático. (a) É possível determinar o módulo das forças desconhecidas $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ equilibrando as forças? (b) Se você está interessado em determinar o módulo da força $\vec{F}_2$ usando uma equação de equilíbrio de torques, onde deve colocar o eixo de rotação para eliminar $\vec{F}_1$ da equação? (c) Se o módulo de $\vec{F}_2$ é 65 N, qual é o módulo de $\vec{F}_1$?



Exemplo

Equilíbrio de uma escada

Na Fig. 12-5*a*, uma escada de comprimento $L = 12$ m e massa $m = 45$ kg está encostada em um muro liso (sem atrito). A extremidade superior da escada está a uma altura $h = 9{,}3$ m acima do piso onde a escada está apoiada (existe atrito entre a escada e o piso). O centro de massa da escada está a uma distância $L/3$ da extremidade inferior. Um bombeiro de massa $M = 72$ kg sobe na escada até que seu centro de massa esteja a uma distância $L/2$ da extremidade inferior. Quais são, neste instante, os módulos das forças exercidas pelo muro e pelo piso sobre a escada?

IDEIAS-CHAVE

Para começar, escolhemos nosso sistema como o conjunto bombeiro–escada e desenhamos o diagrama de corpo livre da Fig. 12-5*b*. Como o sistema se encontra em equilíbrio estático, as equações de equilíbrio de forças e torques (Eqs. 12-7 a 12-9) podem ser usadas.

Cálculos Na Fig. 12-5*b*, o bombeiro está representado por um ponto no meio da escada. O peso do bombeiro é representado pelo vetor equivalente $M\vec{g}$, que foi deslocado ao longo da linha de ação para que a origem coincidisse com o ponto que representa o bombeiro. (Como o deslocamento não altera o torque produzido por $M\vec{g}$ em relação a eixos perpendiculares à figura, não tem nenhum efeito sobre a equação de equilíbrio dos torques que será usada a seguir.)

Como não há atrito entre a escada e o muro, a única força exercida pelo muro sobre a escada é a força horizontal $\vec{F}_m$. A força $\vec{F}_p$ exercida pelo piso sobre a escada tem uma componente horizontal $\vec{F}_{px}$, que é uma força de atrito estática, e uma componente vertical $\vec{F}_{py}$, que é uma força normal.

Para aplicar as equações de equilíbrio, vamos começar com a Eq. 12-9 ($\tau_{res,z} = 0$). Para escolher o eixo em relação ao qual vamos calcular os torques, note que temos forças desconhecidas ($\vec{F}_m$ e $\vec{F}_p$) nas duas extremidades da escada. Para eliminar, digamos, $\vec{F}_p$ dos cálculos, colocamos o eixo no ponto *O*, perpendicular à figura (Figura 12-5*b*). Colocamos também a origem de um sistema de coordenadas *xy* em *O*. *Uma escolha criteriosa da origem do sistema de coordenadas pode facilitar consideravelmente o cálculo dos torques.* Podemos calcular os torques em relação a *O* usando qualquer uma das Eqs. 10-39 a 10-41, mas a Eq. 10-41 ($\tau = r_\perp F$) é a mais fácil de usar neste caso.

Para determinar o braço de alavanca $r_\perp$ de $\vec{F}_m$, desenhamos a linha de ação do vetor (reta horizontal tracejada da Fig. 12-5*c*); $r_\perp$ é a distância perpendicular entre *O* e a linha de ação. Na Fig. 12-5*c*, $r_\perp$ está sobre o eixo *y* e é igual à altura *h*. Também desenhamos linhas de ação para $M\vec{g}$ e $m\vec{g}$ e constatamos que os braços de alavanca das duas forças estão sobre o eixo *x*. Para a distância *a* mostrada na Fig. 12-5*a*, os braços de alavanca são $a/2$ (o bombeiro está no ponto médio da escada) e $a/3$ (o CM da escada está a um terço do comprimento a partir da extremidade inferior), respectivamente. Os braços de alavanca de $\vec{F}_{px}$ e $\vec{F}_{py}$ são nulos porque a origem está situada no ponto de aplicação das duas forças.

Com os torques escritos na forma $r_\perp F$, a equação de equilíbrio $\tau_{res,z} = 0$ assume a forma

$$-(h)(F_m) + (a/2)(Mg) + (a/3)(mg) + (0)(F_{px}) + (0)(F_{py}) = 0. \quad (12\text{-}18)$$

(Lembre-se da nossa regra: um torque positivo corresponde a uma rotação no sentido anti-horário e um torque negativo corresponde a uma rotação no sentido horário.)

Usando o teorema de Pitágoras, temos:

$$a = \sqrt{L^2 - h^2} = 7{,}58 \text{ m}.$$

Assim, a Eq. 12-18 nos dá

$$F_m = \frac{ga(M/2 + m/3)}{h} = \frac{(9{,}8 \text{ m/s}^2)(7{,}58 \text{ m})(72/2 \text{ kg} + 45/3 \text{ kg})}{9{,}3 \text{ m}} = 407 \text{ N} \approx 410 \text{ N}. \quad \text{(Resposta)}$$

Para determinar a força exercida pelo piso, usamos as equações de equilíbrio de forças. A equação $F_{res,x} = 0$ nos dá

$$F_m - F_{px} = 0,$$

e, portanto, $$F_{px} = F_m = 410 \text{ N}. \quad \text{(Resposta)}$$

A equação $F_{res,y} = 0$ nos dá

$$F_{py} - Mg - mg = 0,$$

e, portanto, $$F_{py} = (M + m)g = (72 \text{ kg} + 45 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2) = 1146{,}6 \text{ N} \approx 1100 \text{ N}. \quad \text{(Resposta)}$$



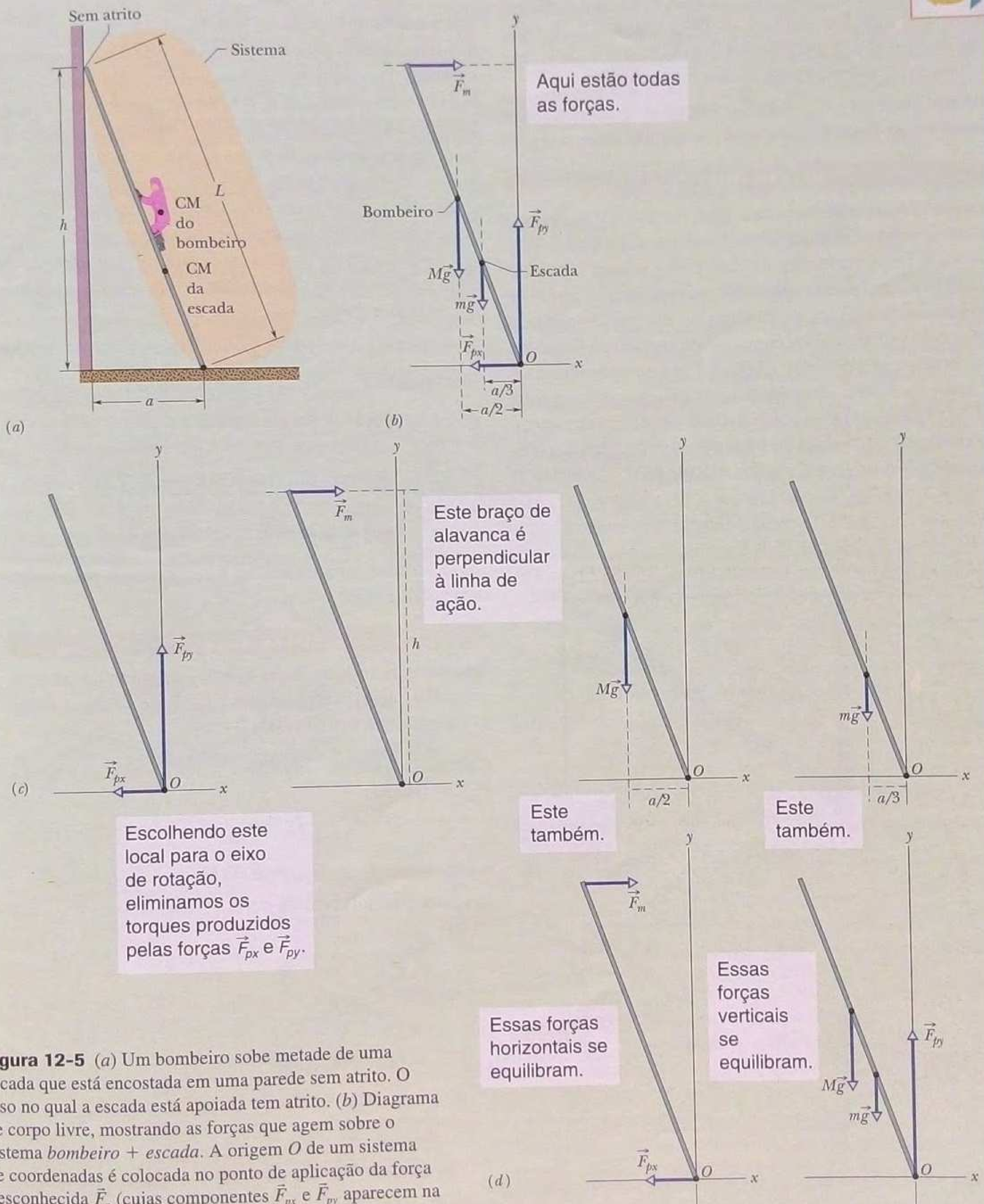


Figura 12-5 (*a*) Um bombeiro sobe metade de uma escada que está encostada em uma parede sem atrito. O piso no qual a escada está apoiada tem atrito. (*b*) Diagrama de corpo livre, mostrando as forças que agem sobre o sistema *bombeiro + escada*. A origem *O* de um sistema de coordenadas é colocada no ponto de aplicação da força desconhecida $\vec{F}_p$ (cujas componentes $\vec{F}_{px}$ e $\vec{F}_{py}$ aparecem na figura). (*c*) Cálculo dos torques. (*d*) Equilíbrio das forças.

Exemplo

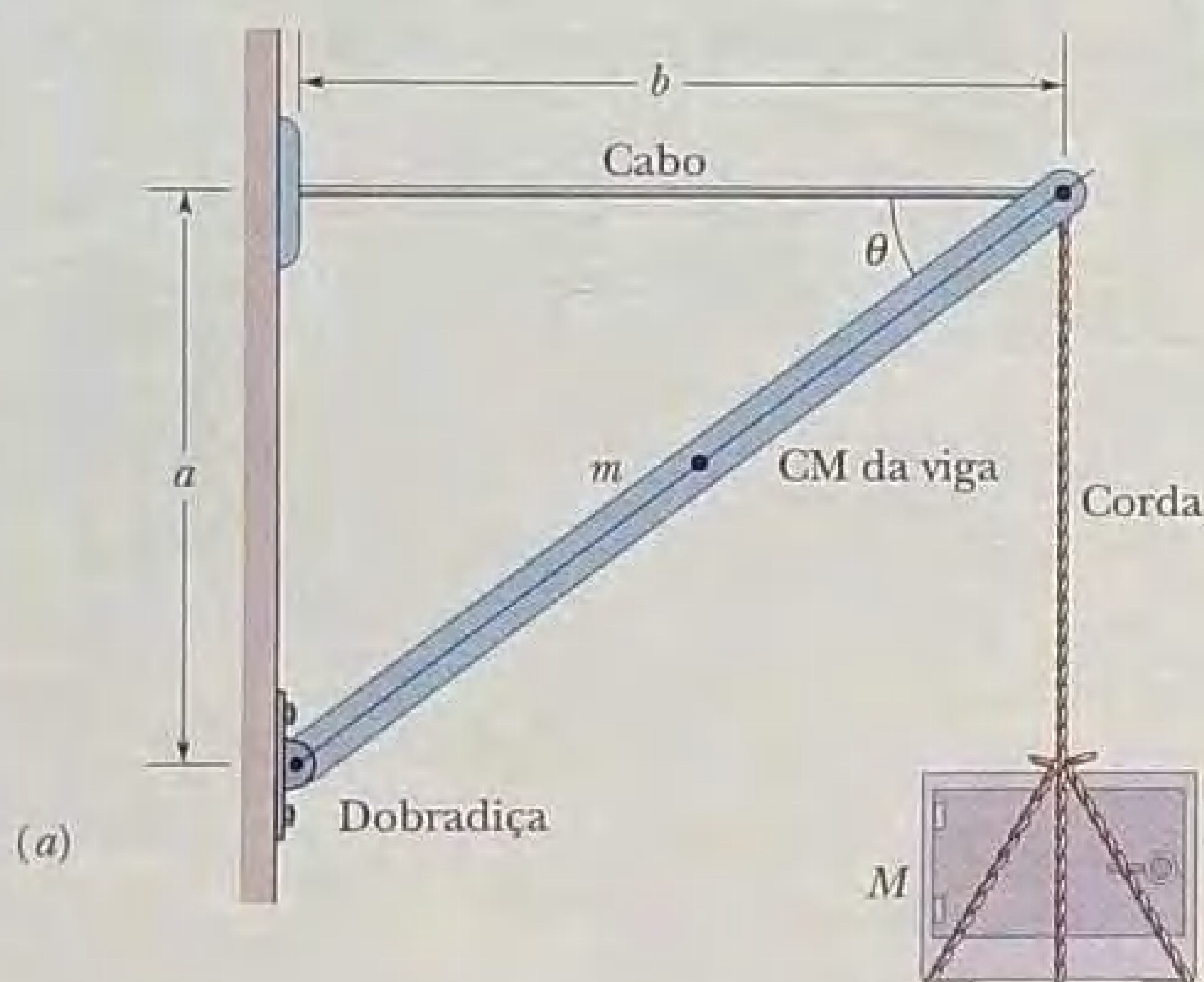
Equilíbrio de uma lança de guindaste

A Fig. 12-6*a* mostra um cofre, de massa $M = 430$ kg, pendurado por uma corda presa a uma lança de guindaste de dimensões $a = 1{,}9$ m e $b = 2{,}5$ m. A lança é composta por uma viga articulada e um cabo horizontal. A viga, feita de material homogêneo, tem uma massa m de 85 kg; as massas do cabo e da corda são desprezíveis.

(a) Qual é a tensão T_{cabo} do cabo? Em outras palavras, qual é o módulo da força $\vec{T}_{cabo}$ exercida pelo cabo sobre a viga?

IDEIAS-CHAVE

O sistema neste caso é apenas a viga; forças a que a viga está submetida são mostradas no diagrama de corpo livre da Fig. 12-6*b*. A força exercida pelo cabo é $\vec{T}_{cabo}$. A força gravitacional a que a viga está submetida está aplicada ao centro de massa (situado no centro da viga) e está representada pela força equivalente $m\vec{g}$. A componente vertical da força que a dobradiça exerce sobre a viga é $\vec{F}_v$ e a componente horizontal é $\vec{F}_h$. A força exercida pela corda que sustenta o cofre é $\vec{T}_{corda}$. Já que a viga, a corda e o cofre estão em repouso, o módulo de $\vec{T}_{corda}$ é igual ao peso do cofre: $T_{corda} = Mg$. Posicionamos a origem O de um sistema de coordenadas xy na dobradiça. Como o sistema está em equilíbrio estático, as equações de equilíbrio podem ser usadas.



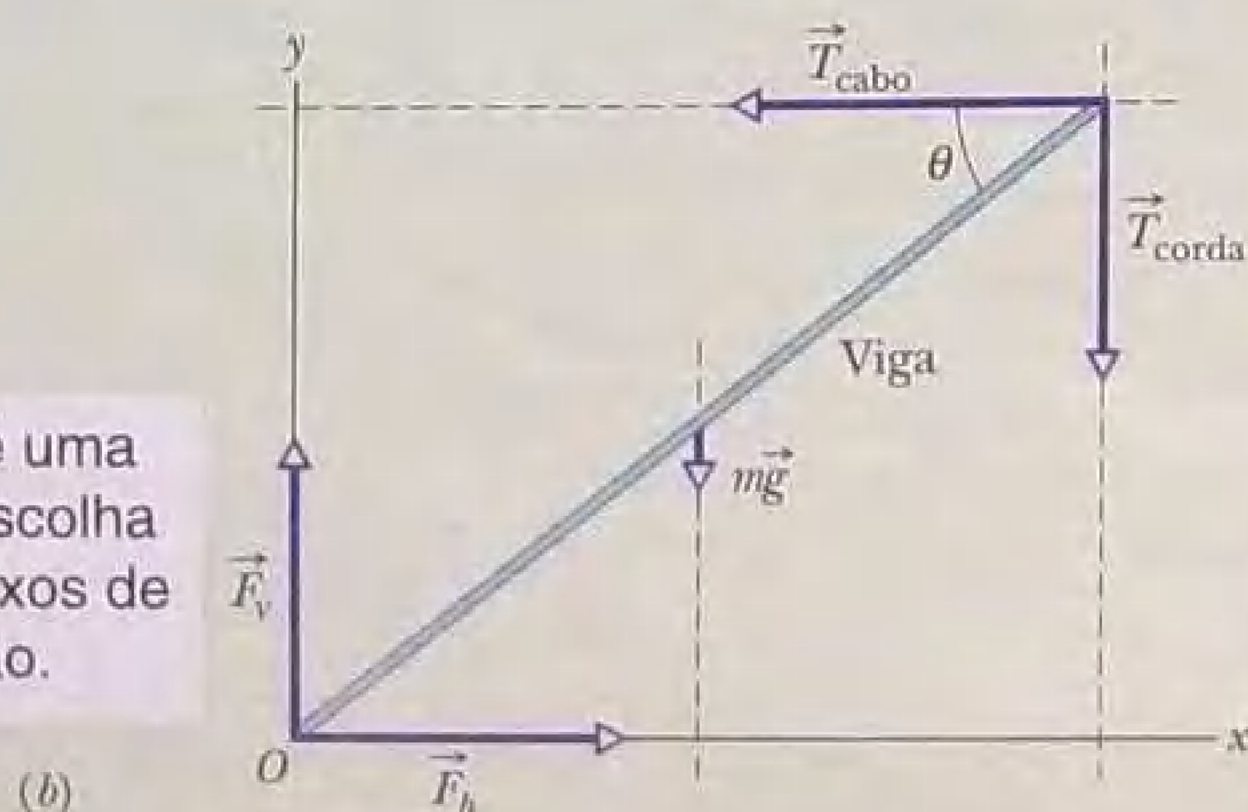


Figura 12-6 (*a*) Um cofre está pendurado em uma lança de guindaste composta por uma viga uniforme e um cabo de aço horizontal. (*b*) Diagrama de corpo livre da viga.

Cálculos Vamos começar pela Eq. 12-9 ($\tau_{res,z} = 0$). Note que o enunciado pede o módulo da força $\vec{T}_{cabo}$, mas não os módulos das forças $\vec{F}_h$ e $\vec{F}_v$ que agem sobre a dobradiça no ponto O. Para eliminar $\vec{F}_h$ e $\vec{F}_v$ do cálculo do torque, basta determinar os torques em relação a um eixo perpendicular ao papel passando pelo ponto O. Nesse caso, $\vec{F}_h$ e $\vec{F}_v$ têm braços de alavanca nulos. As linhas de ação de $\vec{T}_{corda}$, $\vec{T}_{corda}$ e $m\vec{g}$ estão indicadas por retas tracejadas na Fig. 12-6*b*. Os braços de alavanca correspondentes são a, b e $b/2$.

Escrevendo os torques na forma $r_\perp F$ e usando nossa regra para os sinais dos torques, a equação de equilíbrio $\tau_{res,z} = 0$ se torna

$$(a)(T_{cabo}) - (b)(T_{corda}) - (\tfrac{1}{2}b)(mg) = 0. \qquad (12\text{-}19)$$

Substituindo T_{corda} por Mg e explicitando T_{cabo}, obtemos

$$T_{cabo} = \frac{gb(M + \frac{1}{2}m)}{a}$$
$$= \frac{(9{,}8 \text{ m/s}^2)(2{,}5 \text{ m})(430 \text{ kg} + 85/2 \text{ kg})}{1{,}9 \text{ m}}$$
$$= 6093 \text{ N} \approx 6100 \text{ N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Determine o módulo F da força exercida pela dobradiça sobre a viga.

IDEIA-CHAVE

Agora precisamos conhecer F_h e F_v para combiná-las e calcular F. Como já conhecemos T_{cabo}, vamos aplicar à viga as equações de equilíbrio de forças.

Cálculos No caso do equilíbrio na horizontal, escrevemos $F_{res,x} = 0$ como

$$F_h - T_{cabo} = 0, \qquad (12\text{-}20)$$

e, portanto $\quad F_h = T_{cabo} = 6093$ N.

No caso do equilíbrio na vertical, escrevemos $F_{res,y} = 0$ como

$$F_v - mg - T_{corda} = 0.$$

Substituindo T_{corda} por Mg e explicitando F_v, obtemos

$$F_v = (m + M)g = (85 \text{ kg} + 430 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)$$
$$= 5047 \text{ N}.$$

De acordo com o teorema de Pitágoras, temos:

$$F = \sqrt{F_h^2 + F_v^2}$$
$$= \sqrt{(6093 \text{ N})^2 + (5047 \text{ N})^2} \approx 7900 \text{ N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Note que F é bem maior que a soma dos pesos do cofre e da viga, 5000 N, e que a tensão do cabo horizontal, 6100 N.

Exemplo

Equilíbrio de uma viga horizontal

Na Fig. 12-7*a*, uma viga homogênea, de comprimento L e massa $m = 1,8$ kg, está apoiada sobre duas balanças. Um bloco homogêneo, de massa $M = 2,7$ kg, está apoiado na viga, com o centro a uma distância $L/4$ da extremidade esquerda da viga. Quais são as leituras das balanças?

IDEIAS-CHAVE

A melhor tática para resolver *qualquer* problema de equilíbrio estático consiste em, antes de qualquer coisa, definir claramente o sistema a ser analisado e a desenhar um diagrama de corpo livre no qual apareçam todas as forças externas que agem sobre o sistema. Neste caso, vamos escolher o sistema como a viga e o bloco tomados em conjunto. As forças que agem sobre o sistema são mostradas no diagrama de corpo livre da Fig. 12-7*b*. (Escolher o sistema exige experiência e frequentemente existe mais de uma escolha adequada.) Como o sistema está em equilíbrio estático, podemos usar as equações de equilíbrio de forças (Eqs. 12-7 e 12-8) e a equação de equilíbrio de torques (Eq. 12-9).

Cálculos As forças normais exercidas pelas balanças sobre a viga são $\vec{F}_e$ do lado esquerdo e $\vec{F}_d$ do lado direito. As leituras das balanças que desejamos determinar são iguais aos módulos dessas forças. A força gravitacional $\vec{F}_{g,viga}$ a que a viga está submetida está aplicada ao centro de massa e é igual a $m\vec{g}$. Analogamente, a força gravitacional $\vec{F}_{g,bloco}$ a que o bloco está submetido está aplicada ao centro de massa e é igual a $M\vec{g}$. Para simplificar a Fig. 12-7*b*, o bloco foi representado por um ponto da viga e $\vec{F}_{g,bloco}$ foi desenhada com a origem na viga. (Esse deslocamento do vetor $\vec{F}_{g,bloco}$ ao longo de sua linha de ação não altera o torque produzido por $\vec{F}_{g,bloco}$ em relação a qualquer eixo perpendicular à figura.)

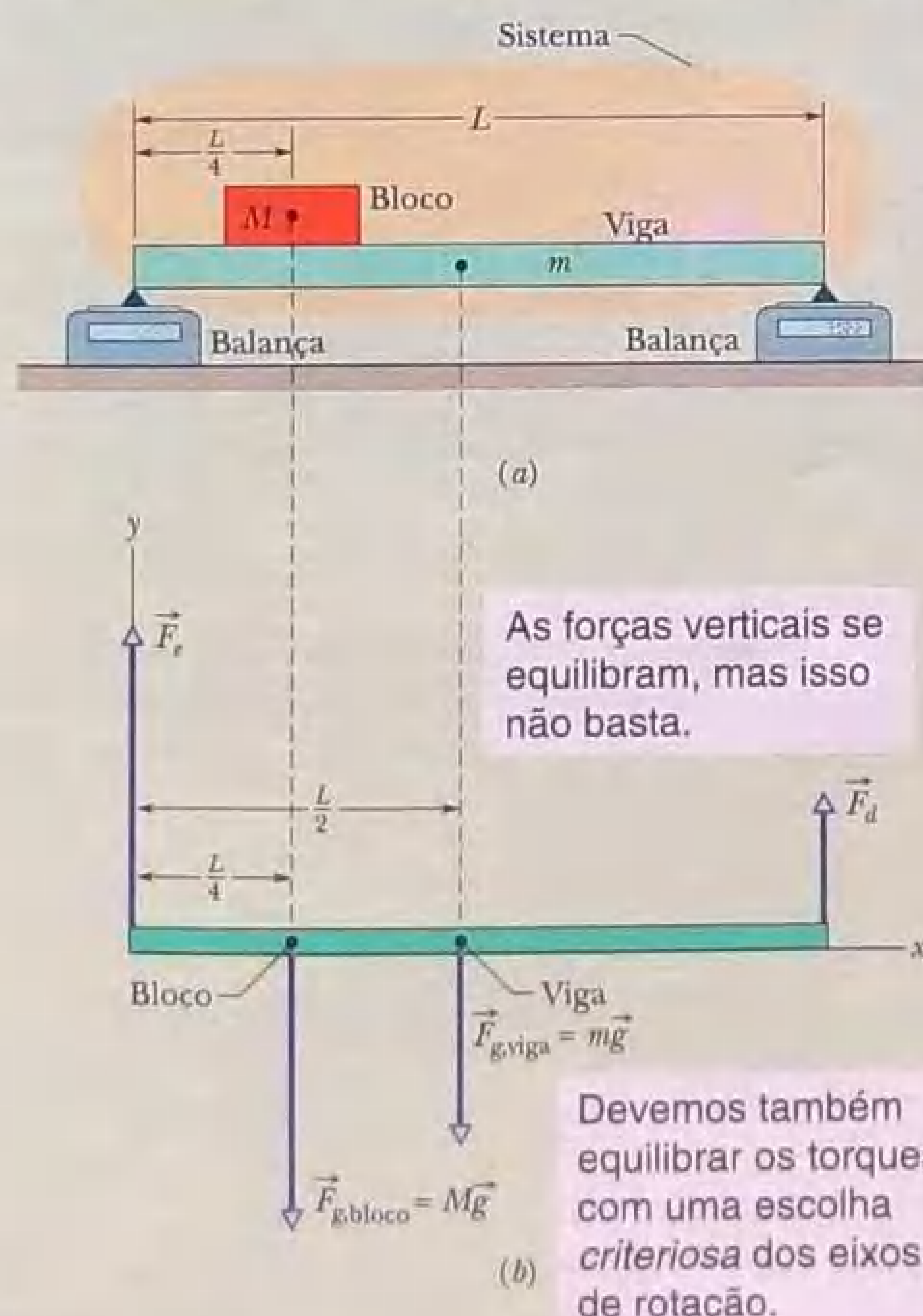


Figura 12-7 (*a*) Uma viga de massa m sustenta um bloco de massa M. (*b*) Diagrama de corpo livre, mostrando as forças que agem sobre o sistema *viga + bloco*.

Como as forças não possuem componentes x, a Eq. 12-7 ($F_{res,x} = 0$) não fornece nenhuma informação. No caso das componentes y, a Eq. 12-8 ($F_{res,y} = 0$) pode ser escrita na forma

$$F_e + F_d - Mg - mg = 0. \quad (12\text{-}21)$$

Como a Eq. 12-21 contém duas incógnitas, as forças F_e e F_d, precisamos usar também a Eq. 12-9, a equação de equilíbrio dos torques. Podemos aplicá-la a *qualquer* eixo de rotação perpendicular ao plano da Fig. 12-7. Vamos escolher um eixo de rotação passando pela extremidade esquerda da viga. Usaremos também nossa regra geral para atribuir sinais aos torques: se um torque tende a fazer um corpo inicialmente em repouso girar no sentido horário, o torque é negativo; se o torque tende a fazer o corpo girar no senti anti-horário, o torque é positivo. Finalmente, vamos escrever os torques na forma $r_\perp F$, onde o braço de alavanca $r_\perp$ é 0 para $\vec{F}_e$, $L/4$ para $M\vec{g}$, $L/2$ para $m\vec{g}$ e L para $\vec{F}_d$.

Podemos agora escrever a equação do equilíbrio ($\tau_{res,z} = 0$) como

$$(0)(F_e) - (L/4)(Mg) - (L/2)(mg) + (L)(F_d) = 0,$$

o que nos dá

$$F_d = \tfrac{1}{4}Mg + \tfrac{1}{2}mg$$
$$= \tfrac{1}{4}(2,7 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) + \tfrac{1}{2}(1,8 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)$$
$$= 15,44 \text{ N} \approx 15 \text{ N}. \quad \text{(Resposta)}$$

Explicitando F_e na Eq. 12-21 e substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$F_e = (M + m)g - F_d$$
$$= (2,7 \text{ kg} + 1,8 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) - 15,44 \text{ N}$$
$$= 28,66 \text{ N} \approx 29 \text{ N}. \quad \text{(Resposta)}$$

Observe a estratégia usada na solução: quando escrevemos uma equação para o equilíbrio das componentes das forças, esbarramos em duas incógnitas. Se tivéssemos escrito uma equação para o equilíbrio de torques em torno de um eixo *qualquer*, teríamos esbarrado nas mesmas duas incógnitas. Entretanto, como escolhemos um eixo que passava pelo ponto de aplicação de uma das forças desconhecidas, $\vec{F}_e$, a dificuldade foi contornada. Nossa escolha eliminou $\vec{F}_e$ da equação do torque, permitindo que obtivéssemos o módulo da outra força, F_d. Em seguida, voltamos à equação do equilíbrio de forças para calcular o módulo da outra força.

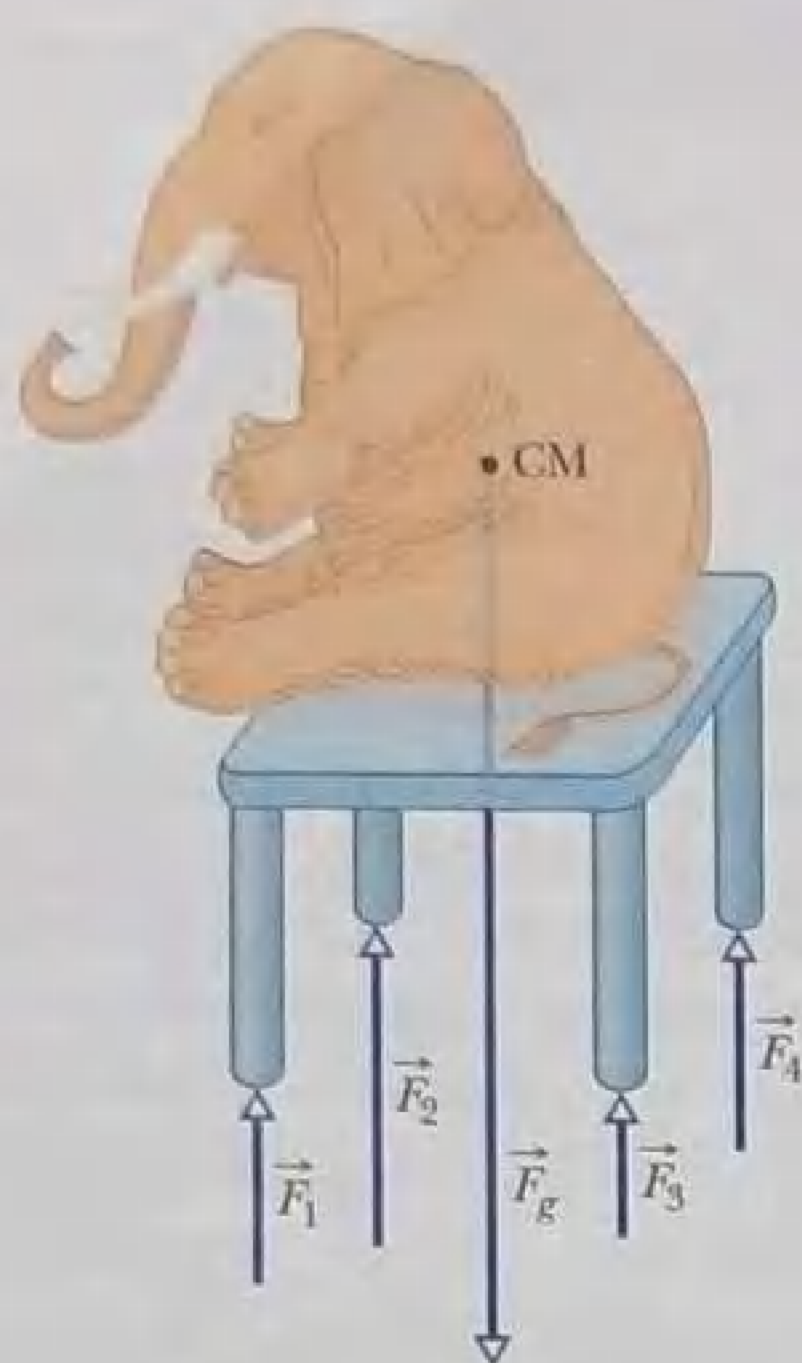


Figura 12-8 A mesa é uma estrutura indeterminada. As quatro forças a que as pernas da mesa estão sujeitas diferem em módulo e não podem ser calculadas usando apenas as leis do equilíbrio estático.

12-6 Estruturas Indeterminadas

Para resolver os problemas deste capítulo, temos apenas três equações independentes à disposição, que são, em geral, duas equações de equilíbrio de forças e uma equação de equilíbrio de torques em relação a um eixo de rotação. Assim, se um problema tem mais de três incógnitas, não podemos resolvê-lo.

Considere um carro assimetricamente carregado. Quais são as forças, todas diferentes, que agem sobre os quatro pneus? O problema não pode ser resolvido usando os métodos discutidos até o momento, pois temos apenas três equações independentes para trabalhar. Da mesma forma, podemos resolver o problema de equilíbrio para uma mesa de três pernas, mas não para uma de quatro pernas. Problemas como esses, nos quais existem mais incógnitas que equações, são chamados de **indeterminados**.

No mundo real, porém, sabemos que existem soluções para problemas indeterminados. Se apoiarmos os pneus de um carro nos pratos de quatro balanças, cada balança fornecerá uma leitura definida e a soma das quatro leituras será o peso do carro. O que está faltando em nossos esforços para obter as forças através de equações?

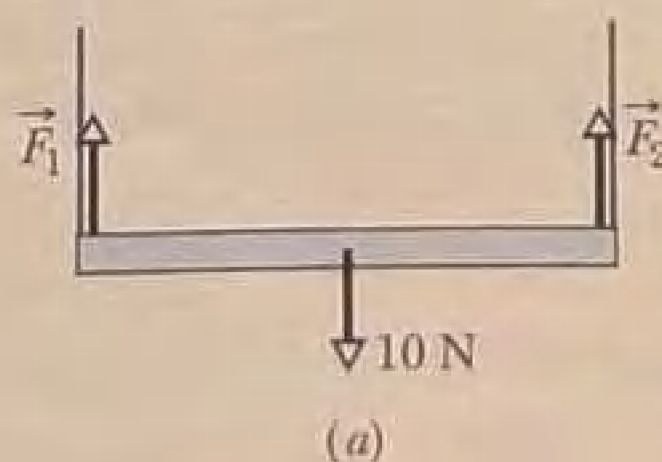
O problema está no fato de que supusemos implicitamente que os corpos aos quais aplicamos as equações do equilíbrio estático são perfeitamente rígidos, ou seja, não se deformam ao serem submetidos a forças. Na verdade, nenhum corpo é totalmente rígido. Os pneus de um carro, por exemplo, se deformam facilmente sob a ação de uma carga até que o carro atinja uma posição de equilíbrio estático.

Nós todos já passamos pela experiência de ocupar uma mesa bamba em um restaurante, a qual normalmente nivelamos colocando um calço de papel dobrado sob uma das pernas. Se colocássemos um elefante sobre uma dessas mesas, porém, e a mesa não quebrasse, ela se deformaria da mesma forma que os pneus do carro. Todas as pernas tocariam o piso, as forças normais do piso sobre as pernas da mesa assumiriam valores definidos (e diferentes), como na Fig. 12-8, e a mesa não ficaria mais bamba. Naturalmente, nós (e o elefante) seríamos expulsos do restaurante, mas, em princípio, como podemos calcular os valores das forças nessa situação em situações semelhantes nas quais existe deformação?

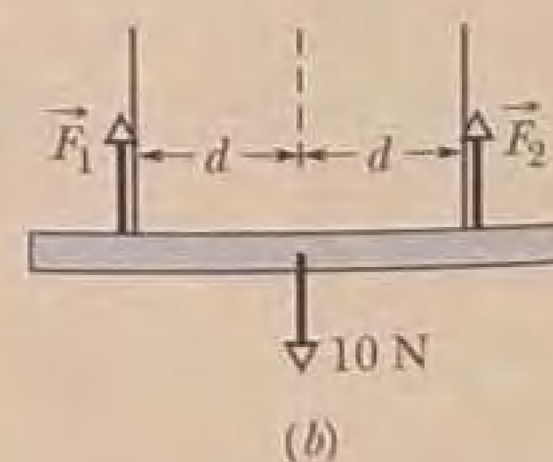
Para resolver esses problemas de equilíbrio indeterminado, precisamos suplementar as equações de equilíbrio com algum conhecimento de *elasticidade*, o ramo da física e da engenharia que descreve como corpos se deformam quando são submetidos a forças. Uma introdução a este assunto é apresentada na próxima seção.

TESTE 3

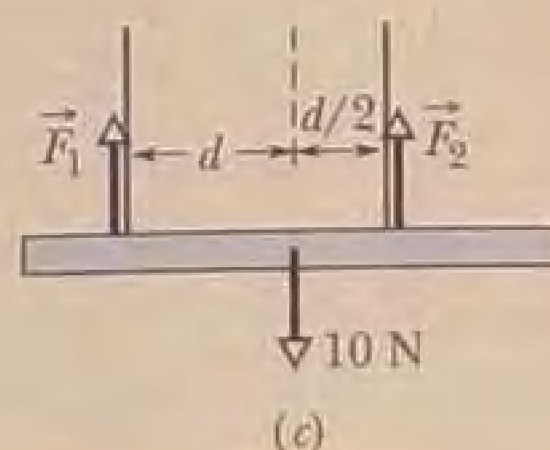
Uma barra horizontal homogênea pesando 10 N está pendurada no teto por dois fios que exercem forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ sobre a barra. A figura mostra quatro configurações diferentes dos fios. Que configurações são indeterminadas (ou seja, tornam impossível calcular os valores numéricos de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$)?



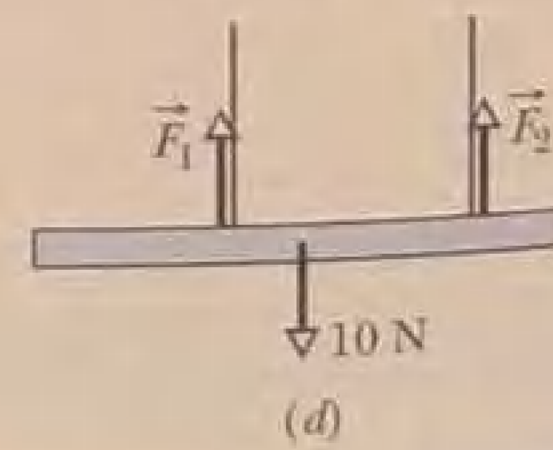
(*a*)



(*b*)



(*c*)



(*d*)

12-7 Elasticidade

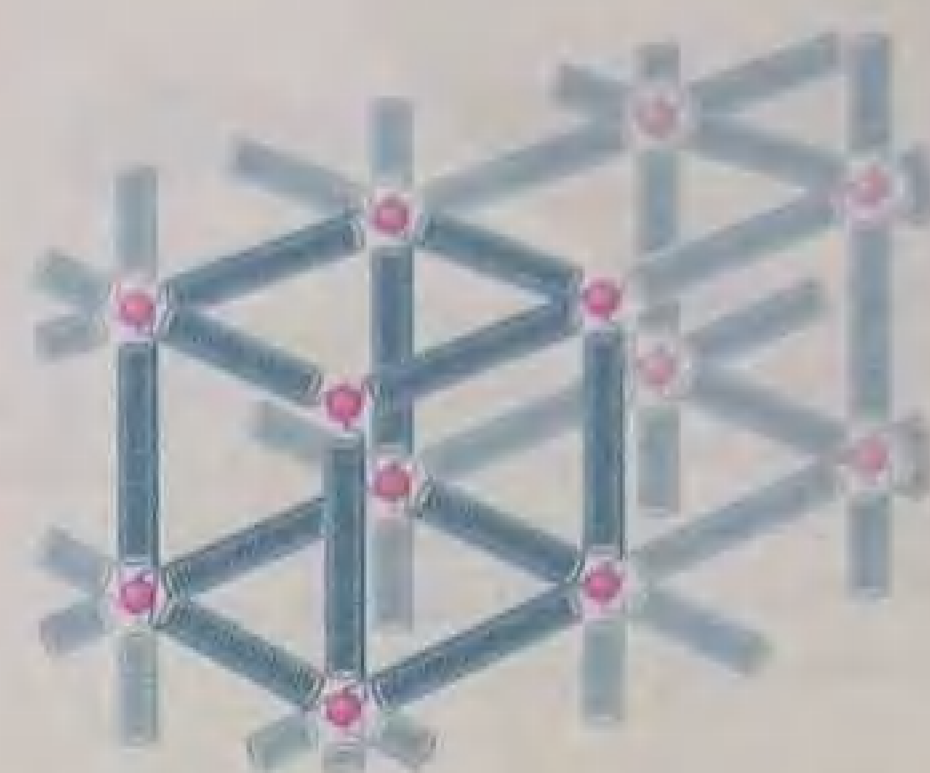


Figura 12-9 Os átomos de um sólido metálico estão dispostos em rede regular tridimensional. As molas representam forças interatômicas.

Quando muitos átomos se juntam para formar um sólido metálico, como, por exemplo, um prego de ferro, os átomos ocupam posições de equilíbrio em uma *rede cristalina* tridimensional, um arranjo repetitivo no qual cada átomo está a uma distância de equilíbrio bem definida dos vizinhos mais próximos. Os átomos são mantidos unidos por forças interatômicas, representadas por pequenas molas na Fig. 12-9. A rede é quase perfeitamente rígida, o que é outra forma de dizer que as "molas interatômicas" são extremamente duras. É por essa razão que temos a impressão de que alguns objetos comuns, como escadas de metal, mesas e colheres, são indeformáveis. Outros objetos comuns, como mangueiras de jardim e luvas de borracha, são facilmente deformados. Nesses objetos, os átomos *não formam* uma rede rígida como a Fig. 12-9, mas estão ligados em cadeias moleculares longas e flexíveis, que estão ligadas apenas fracamente às cadeias vizinhas.

Todos os corpos "rígidos" reais são, na verdade, ligeiramente **elásticos**, o que significa que podemos mudar ligeiramente suas dimensões puxando-os, empurrando-os, torcendo-os ou comprimindo-os. Para ter uma ideia das ordens de grandeza envolvidas, considere uma barra de aço vertical, de 1 m de comprimento e 1 cm de diâmetro, presa no teto de uma fábrica. Se um carro compacto for pendurado na extremidade inferior da barra, ela esticará apenas 0,5 mm, o que corresponde a 0,05% do comprimento original. Se o carro for removido, o comprimento da barra voltará ao valor inicial.

Se dois carros forem pendurados na barra, ela ficará permanentemente deformada, ou seja, o comprimento não voltará ao valor inicial se a carga for removida. Se três carros forem pendurados na barra, ela arrebentará. Imediatamente antes da ruptura, o alongamento da barra será menor do que 0,2%. Embora deformações dessa ordem pareçam pequenas, são muito importantes para os engenheiros. (Se a asa de um avião vai se partir ao ser submetida a uma dada força é, obviamente, uma questão importante.)

A Fig. 12-10 mostra três formas pelas quais as dimensões de um sólido podem ser modificadas por uma força aplicada. Na Fig. 12-10*a*, um cilindro é alongado. Na Fig. 12-10*b*, um cilindro é deformado por uma força perpendicular ao eixo maior, de modo parecido com a deformação de uma pilha de cartas de baralho. Na Fig. 12-10*c*, um objeto sólido mergulhado em um fluido é comprimido uniformemente de todas as direções. O que esses três comportamentos têm em comum é que uma **tensão**, ou força deformadora por unidade de área, produz uma **deformação**. Na Fig. 12-10, a *tensão trativa* (associada ao alongamento) está ilustrada em (*a*), a *tensão de cisalhamento* em (*b*) e a *tensão hidrostática* em (*c*).

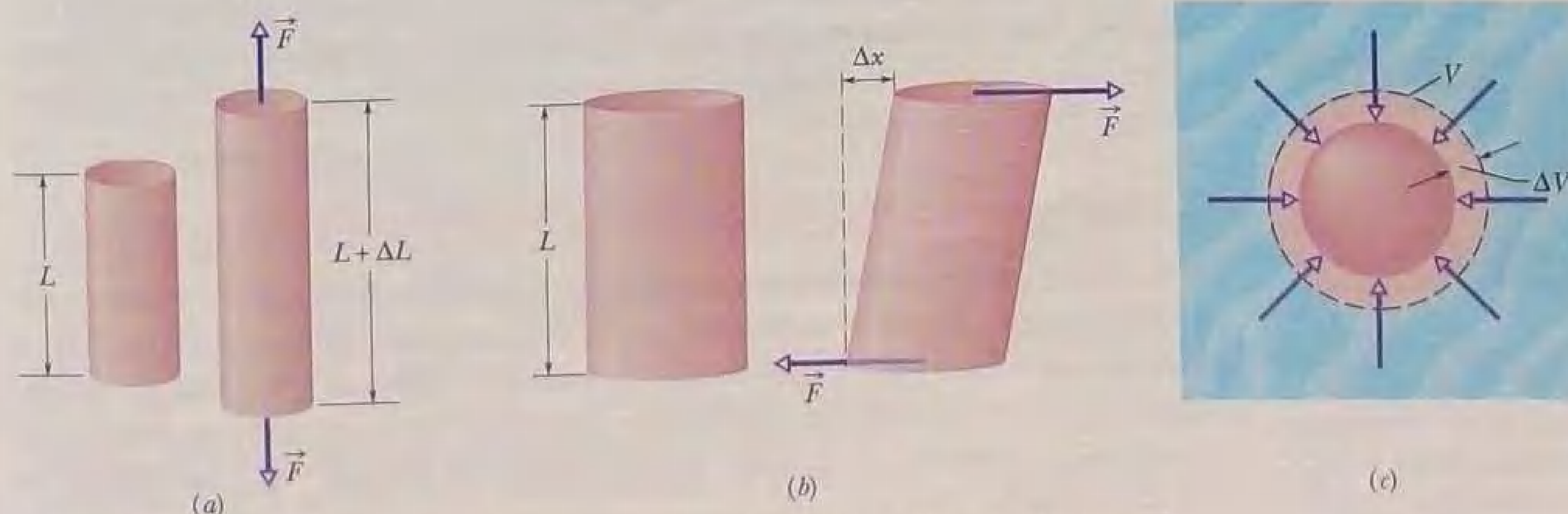


Figura 12-10 (*a*) Um cilindro submetido a uma *tensão trativa* sofre um alongamento ΔL. (*b*) Um cilindro submetido a uma *tensão de cisalhamento* sofre uma deformação Δx, semelhante à de uma pilha de cartas de baralho. (*c*) Uma esfera maciça submetida a uma *tensão hidrostática* uniforme aplicada por um fluido tem o volume reduzido de um valor ΔV. Todas as deformações mostradas estão muito exageradas.



Figura 12-11 Corpo de prova usado para obter uma curva tensão–deformação como a da Fig. 12-12. A variação ΔL que ocorre em uma distância L é medida em um ensaio de tensão–deformação.

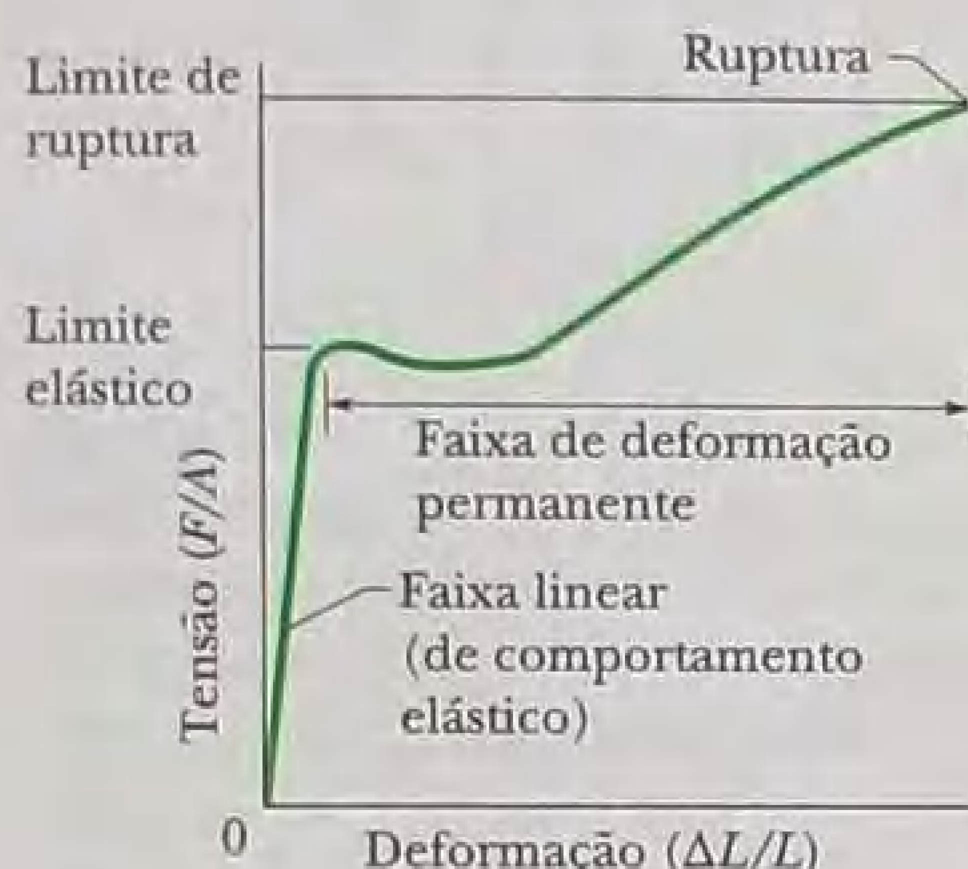


Figura 12-12 Curva tensão–deformação de um corpo de prova de aço como o da Fig. 12-11. O corpo de prova sofre uma deformação permanente quando a tensão atinge o *limite elástico* e se rompe quando a tensão atinge o *limite de ruptura* do material.



Figura 12-13 Um extensômetro de 9,8 mm por 4,6 mm usado para medir deformações. O dispositivo é colado no corpo cuja deformação se deseja medir e sofre a mesma deformação que o corpo. A resistência elétrica do extensômetro varia com a deformação, permitindo que deformações de até 3% sejam medidas. *(Cortesia da Vishay Micro-Measurements Group, Raleigh, NC)*

As tensões e deformações assumem formas diferentes nas três situações da Fig. 12-10, mas, para uma larga faixa de valores, tensão e deformação são proporcionais. A constante de proporcionalidade é chamada de **módulo de elasticidade**, de modo que

$$\text{tensão} = \text{módulo de elasticidade} \times \text{deformação}. \tag{12-22}$$

Em um teste padrão de propriedades elásticas, a tensão trativa aplicada a um corpo de prova de forma cilíndrica como o da Fig. 12-11 é lentamente aumentada de zero até o ponto em que o cilindro se rompe e a deformação é medida e plotada. O resultado é um gráfico tensão–deformação como o da Fig. 12-12. Para uma larga faixa de tensões aplicadas, a relação tensão–deformação é linear e o corpo de prova recupera as dimensões originais quando a tensão é removida; é nessa faixa que a Eq. 12-22 pode ser usada. Se a tensão ultrapassa o **limite elástico** S_y da amostra, a deformação se torna permanente. Se a tensão continua a aumentar, o corpo de prova acaba por se romper, para um valor de tensão conhecido como **limite de ruptura** S_u.

Tração e Compressão

No caso de uma tração ou de uma compressão, a tensão a que o objeto está submetido é definida como F/A, onde F é o módulo da força aplicada perpendicularmente a uma área A do objeto. A deformação é a grandeza adimensional $\Delta L/L$ que representa a variação fracionária (ou, às vezes, percentual) do comprimento do corpo de prova. Se o corpo de prova é uma barra longa e a tensão não ultrapassa o limite elástico, não só a barra como um todo, mas também qualquer trecho da barra experimenta a mesma deformação quando uma tensão é aplicada. Como a deformação é adimensional, o módulo de elasticidade da Eq. 12-22 tem dimensões da tensão, ou seja, força por unidade de área.

O módulo das tensões de tração e de compressão é chamado de **módulo de Young** e representado pelo símbolo E. Substituindo as grandezas da Eq. 12-22 por símbolos, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{F}{A} = E\,\frac{\Delta L}{L}. \tag{12-23}$$

A deformação $\Delta L/L$ de um corpo de prova pode ser medida usando um instrumento conhecido como *extensômetro* (Fig. 12-13), que é colado ao corpo de prova e cujas propriedades elétricas mudam de acordo com a deformação sofrida.

Mesmo que os módulos de Young de um material para tração e compressão sejam quase iguais (o que é comum), o limite de ruptura pode ser bem diferente, dependendo do tipo de tensão. O concreto, por exemplo, resiste muito bem à compressão, mas é tão fraco sob tração que os engenheiros tomam precauções especiais para que o concreto usado nas construções não seja submetido a forças de tração. A Tabela 12-1 mostra o módulo de Young e outras propriedades elásticas de alguns materiais de interesse para a engenharia.

Cisalhamento

No caso do cisalhamento, a tensão também é uma força por unidade de área, mas o vetor força está no plano da área e não da direção perpendicular a esse plano. A deformação é a razão adimensional $\Delta x/L$, onde Δx e L são as grandezas mostradas na Fig. 12-10*b*. O módulo de elasticidade correspondente, que é representado pelo símbolo G, é chamado de **módulo de cisalhamento**. No caso do cisalhamento, a Eq. 12-22 assume a forma

$$\frac{F}{A} = G\,\frac{\Delta x}{L}. \tag{12-24}$$

As tensões de cisalhamento exercem um papel importante no empenamento de eixos e na fratura de ossos.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
BIBLIOTECA CENTRAL

Tabela 12-1

Algumas Propriedades Elásticas de Materiais Escolhidos

Material	Massa específica ρ (kg/m^3)	Módulo de Young E (10^9 N/m^2)	Limite de ruptura S_r (10^6 N/m^2)	Limite de elasticidade S_e (10^6 N/m^2)
Aço[a]	7860	200	400	250
Alumínio	2710	70	110	95
Vidro	2190	65	50[b]	—
Concreto[c]	2320	30	40[b]	—
Madeira[d]	525	13	50[b]	—
Osso	1900	9[b]	170[b]	—
Poliestireno	1050	3	48	—

[a]Aço estrutural (ASTM-A36). [b]Para compressão. [c]De alta resistência. [d]Pinho.

Tensão Hidrostática

Na Fig. 12-10*c*, a tensão é a pressão p que o fluido exerce sobre o objeto, e, como veremos no Capítulo 14, pressão é força por unidade de área. A deformação é $\Delta V/V$, onde V é o volume original do corpo de prova e ΔV é o valor absoluto da variação de volume. O módulo correspondente, representado pelo símbolo B, é chamado de **módulo de elasticidade volumétrico** do material. Dizemos que o corpo de prova está sob *compressão hidrostática* e a pressão pode ser chamada de *tensão hidrostática*. Para esta situação, a Eq. 12-22 pode ser escrita na forma

$$p = B\,\frac{\Delta V}{V}. \tag{12-25}$$

O módulo de elasticidade volumétrico é $2{,}2 \times 10^9$ N/m^2 para a água e $1{,}6 \times 10^{11}$ N/m^2 para o aço. A pressão no fundo do oceano Pacífico, na sua profundidade média de aproximadamente 4000 m, é $4{,}0 \times 10^7$ N/m^2. A compressão fracionária $\Delta V/V$ da água produzida por essa pressão é 1,8%; a de objeto de aço é apenas 0,025%. Em geral, os sólidos, com suas redes atômicas rígidas, são menos compressíveis que os líquidos, nos quais os átomos ou moléculas estão mais frouxamente acoplados aos vizinhos.

Exemplo

Tensão e deformação de uma barra

Uma das extremidades de uma barra de aço de raio R = 9,5 mm e comprimento L = 81 cm é presa a um torno e uma força F = 62 kN (uniforme, perpendicular à seção reta) é aplicada à outra extremidade. Quais são a tensão, o alongamento ΔL e a deformação da barra?

IDEIAS-CHAVE

(1) Como a força é perpendicular à seção reta, a tensão é a razão entre o módulo F da força aplicada e a área A da seção reta. Essa razão é o lado esquerdo da Eq. 12-23.

(2) O alongamento ΔL está relacionado à tensão e ao módulo de Young através da Eq. 12-23 (F/A) = $E\Delta L/L$). (3) A tensão é a razão entre o alongamento e o comprimento inicial L.

Cálculos Para determinar a tensão, escrevemos

$$\text{tensão} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{6{,}2 \times 10^4\ \text{N}}{(\pi)(9{,}5 \times 10^{-3}\ \text{m})^2}$$
$$= 2{,}2 \times 10^8\ \text{N/m}^2. \quad \text{(Resposta)}$$

Como o limite elástico do aço estrutural é $2{,}5 \times 10^8$ N/m^2, a barra está perigosamente próxima do limite elástico.

O valor do módulo de Young do aço é dado na Tabela 12-1. De acordo com a Eq. 12-23, o alongamento é

$$\Delta L = \frac{(F/A)L}{E} = \frac{(2{,}2 \times 10^8\ \text{N/m}^2)(0{,}81\ \text{m})}{2{,}0 \times 10^{11}\ \text{N/m}^2}$$
$$= 8{,}9 \times 10^{-4}\ \text{m} = 0{,}89\ \text{mm}. \quad \text{(Resposta)}$$

A deformação é, portanto,

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{8{,}9 \times 10^{-4}\ \text{m}}{0{,}81\ \text{m}}$$
$$= 1{,}1 \times 10^{-3} = 0{,}11\%. \quad \text{(Resposta)}$$

Exemplo

Nivelando uma mesa bamba

Uma mesa tem três pernas com 1,00 m de comprimento e uma quarta perna com um comprimento adicional d = 0,50 mm, que faz com que a mesa fique ligeiramente bamba. Um cilindro de aço de massa M = 290 kg é colocado sobre a mesa (que tem uma massa muito menor que M), comprimindo as quatro pernas sem envergá-las e fazendo com que a mesa fique nivelada. As pernas são cilindros de madeira com uma área da seção reta A = 1,0 cm²; o módulo de Young é $E = 1{,}3 \times 10^{10}$ N/m². Quais são os módulos das forças que o chão exerce sobre as pernas da mesa?

IDEIAS-CHAVE

Tomamos a mesa e o cilindro de aço como nosso sistema. A situação é a da Fig. 12-8, exceto pelo fato de que agora temos um cilindro de aço sobre a mesa. Se o tampo da mesa permanece nivelado, as pernas devem estar comprimidas da seguinte forma: cada uma das pernas mais curtas sofreu o mesmo encurtamento (vamos chamá-lo de ΔL_3), e, portanto, está submetida à mesma força F_3. A perna mais comprida sofreu um encurtamento maior, ΔL_4, e, portanto, está submetida a uma força F_4 maior que F_3. Em outras palavras, para que a mesa esteja nivelada, devemos ter

$$\Delta L_4 = \Delta L_3 + d. \qquad (12\text{-}26)$$

De acordo com a Eq. 12-23, podemos relacionar uma variação do comprimento à força responsável por essa variação através da equação $\Delta L = FL/AE$, onde L é o comprimento original. Podemos usar esta relação para substituir ΔL_4 e ΔL_3 na Eq. 12-26. Observe que podemos tomar o comprimento original L como aproximadamente o mesmo para as quatro pernas.

Cálculos Fazendo essas substituições e essa aproximação, podemos escrever:

$$\frac{F_4 L}{AE} = \frac{F_3 L}{AE} + d. \qquad (12\text{-}27)$$

Não podemos resolver a Eq. 12-27 porque ela possui duas incógnitas, F_4 e F_3.

Para obter uma segunda equação envolvendo F_4 e F_3, podemos definir um eixo vertical y e escrever uma equação de equilíbrio para as componentes verticais das forças ($F_{res,y} = 0$) na forma

$$3F_3 + F_4 - Mg = 0, \qquad (12\text{-}28)$$

onde Mg é o módulo da força gravitacional que age sobre o sistema. (*Três* das pernas estão submetidas a uma força $\vec{F}_3$.) Para resolver o sistema de equações 12-27 e 12-28 para, digamos, calcular F_3, usamos primeiro a Eq. 12-28 para obter $F_4 = Mg - 3F_3$. Substituindo F_4 por seu valor na Eq. 12-27, obtemos, depois de algumas manipulações algébricas,

$$F_3 = \frac{Mg}{4} - \frac{dAE}{4L}$$

$$= \frac{(290\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2)}{4} - \frac{(5{,}0 \times 10^{-4}\ \text{m})(10^{-4}\ \text{m}^2)(1{,}3 \times 10^{10}\ \text{N/m}^2)}{(4)(1{,}00\ \text{m})}$$

$$= 548\ \text{N} \approx 5{,}5 \times 10^2\ \text{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Substituindo esse valor na Eq. 12-28, obtemos:

$$F_4 = Mg - 3F_3 = (290\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2) - 3(548\ \text{N})$$

$$\approx 1{,}2\ \text{kN}. \qquad \text{(Resposta)}$$

É fácil mostrar que, quando o equilíbrio é atingido, as três pernas curtas estão com uma compressão de 0,42 mm e a perna mais comprida está com uma compressão de 0,92 mm.

REVISÃO E RESUMO

Equilíbrio Estático Quando um corpo rígido está em repouso, dizemos que se encontra em **equilíbrio estático**. A soma vetorial das forças que agem sobre um corpo em equilíbrio estático é zero:

$$\vec{F}_{res} = 0 \quad \text{(equilíbrio de forças).} \qquad (12\text{-}3)$$

Se todas as forças estão no plano xy, a equação vetorial 12-3 é equivalente a duas equações para as componentes:

$$F_{res,x} = 0 \quad \text{e} \quad F_{res,y} = 0 \quad \text{(equilíbrio de forças).} \qquad (12\text{-}7, 12\text{-}8)$$

No caso de um corpo em equilíbrio estático, a soma vetorial dos torques externos que agem sobre o corpo em relação a *qualquer* ponto também é zero, ou seja,

$$\vec{\tau}_{res} = 0 \quad \text{(equilíbrio de torques).} \qquad (12\text{-}5)$$

Se as forças estão no plano xy, todos os torques são paralelos ao eixo z e a Eq. 12-5 é equivalente a uma equação para a única componente diferente de zero:

$$\tau_{res,z} = 0 \quad \text{(equilíbrio de torques).} \qquad (12\text{-}9)$$

Centro de Gravidade A força gravitacional age separadamente sobre cada elemento de um corpo. O efeito total de todas essas forças pode ser determinado imaginando uma força gravitacional equivalente $\vec{F}_g$ aplicada ao **centro de gravidade** do corpo. Se a aceleração da gravidade $\vec{g}$ é a mesma para todos os elementos do corpo, a posição do centro de gravidade coincide com a do centro de massa.

Módulos de Elasticidade Três **módulos de elasticidade** são usados para descrever o comportamento elástico (ou seja, as defor-

mações) de objetos submetidos a forças. A **deformação** (variação relativa do comprimento) está linearmente relacionada à **tensão** (força por unidade de área) através de um módulo apropriado, de acordo com a relação geral

$$\text{tensão} = \text{módulo} \times \text{deformação}. \quad (12\text{-}22)$$

Tração e Compressão Quando um objeto está sob tração ou compressão, a Eq. 12-22 é escrita na forma

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L}, \quad (12\text{-}23)$$

onde $\Delta L/L$ é a deformação de alongamento ou compressão do objeto, F é o módulo da força $\vec{F}$ responsável pela deformação, A é a área de seção reta à qual a força $\vec{F}$ é aplicada (perpendicularmente a A, como na Fig. 12-10*a*) e E é o **módulo de Young** do objeto. A tensão é F/A.

Cisalhamento Quando um objeto está sob tensão de cisalhamento, a Eq. 12-22 é escrita como

$$\frac{F}{A} = G\frac{\Delta x}{L}, \quad (12\text{-}24)$$

onde $\Delta x/L$ é a deformação de cisalhamento do objeto, Δx é o deslocamento de uma das extremidades do objeto na direção da força $\vec{F}$ aplicada (como na Fig. 12-10*b*) e G é o **módulo de cisalhamento** do objeto. A tensão é F/A.

Tensão Hidrostática Quando um objeto é submetido a uma *compressão hidrostática* devido à tensão exercida pelo fluido no qual está submerso, a Eq. 12-22 é escrita na forma

$$p = B\frac{\Delta V}{V}, \quad (12\text{-}25)$$

onde p é a pressão (*tensão hidrostática*) que o fluido exerce sobre o objeto, $\Delta V/V$ (a deformação) é o valor absoluto da variação relativa do volume do objeto produzida por essa pressão e B é o **módulo de elasticidade volumétrico** do objeto.

PERGUNTAS

1 A Fig. 12-14 mostra três situações nas quais a mesma barra horizontal está presa a uma parede por uma dobradiça em uma das extremidades e por uma corda na outra. Sem realizar cálculos numéricos, ordene as situações de acordo com o módulo (a) da força que a corda exerce sobre a barra, (b) da força vertical que a dobradiça exerce sobre a barra e (c) da força horizontal que a dobradiça exerce sobre a barra, começando pela maior.

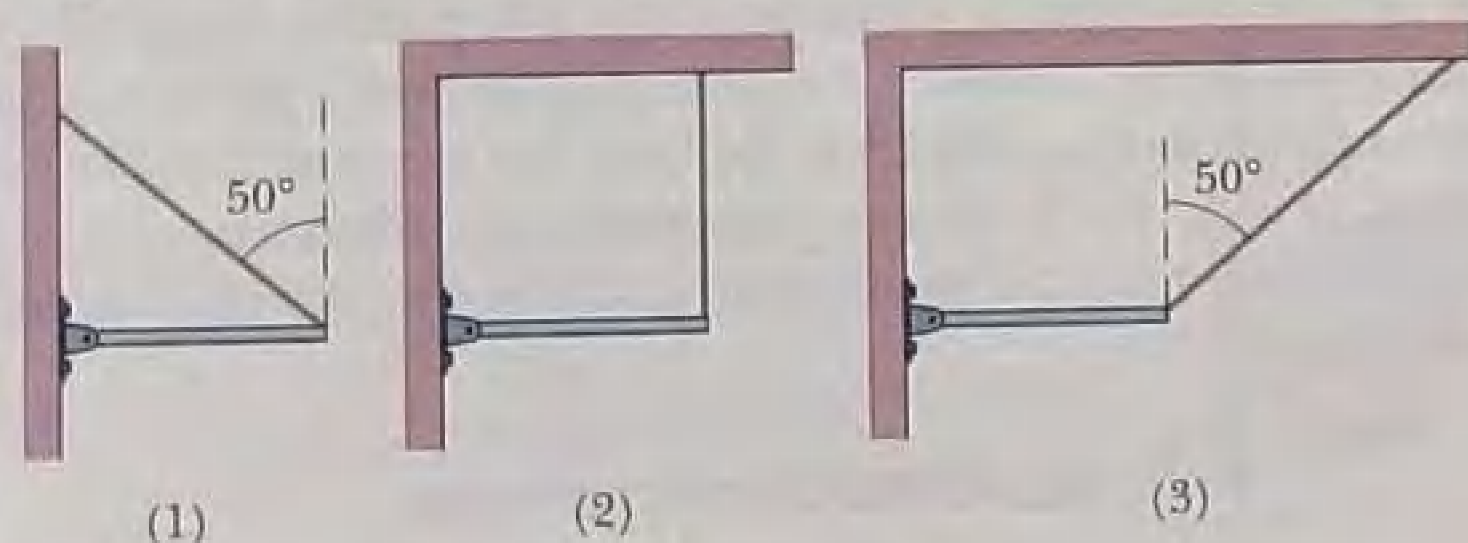


Figura 12-14 Pergunta 1.

2 Na Fig. 12-15, uma trave rígida está presa a dois postes fixos em um piso. Um cofre pequeno, mas pesado, é colocado nas seis posições indicadas, uma de cada vez. Suponha que a massa da trave é desprezível em comparação com a do cofre. (a) Ordene as posições de acordo com a força exercida pelo cofre sobre o poste A, começando pela maior tensão compressiva e terminando com a maior tensão trativa; indique em qual das posições (se houver alguma) a força é nula. (b) Ordene as posições de acordo com a força exercida sobre o poste B.

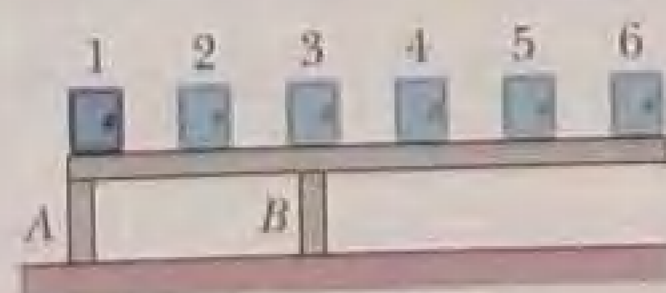


Figura 12-15 Pergunta 2.

3 A Fig. 12-16 mostra quatro vistas superiores de discos homogêneos com um movimento de rotação que estão deslizando em um piso sem atrito. Três forças, de módulo F, $2F$ ou $3F$, agem sobre cada disco, na borda, no centro, ou no ponto médio entre a borda e o centro. As forças giram com os discos e, nos "instantâneos" da Fig. 12-16, apontam para a esquerda ou para a direita. Quais são os discos que estão em equilíbrio?

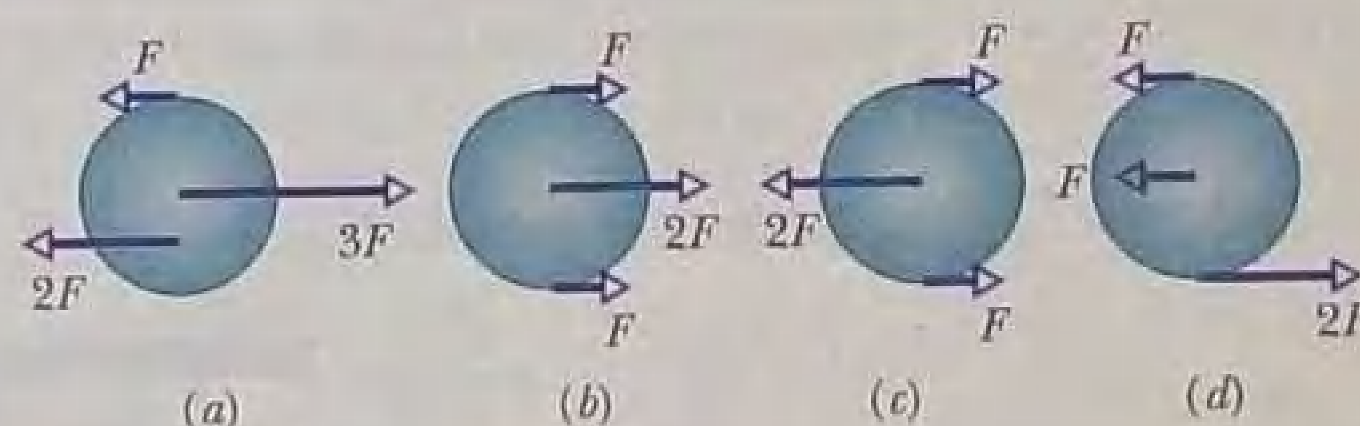


Figura 12-16 Pergunta 3.

4 Uma escada está apoiada em uma parede sem atrito mas não cai por causa do atrito com o chão. A base da escada é deslocada em direção à parede. Determine se a grandeza a seguir aumenta, diminui ou permanece a mesma (em módulo): (a) a força normal sobre a escada exercida pelo chão; (b) a força exercida pela parede sobre a escada; (c) a força de atrito estático exercida pelo chão sobre a escada; (d) o valor máximo $f_{s,\text{máx}}$ da força de atrito estático.

5 A Fig. 12-17 mostra um móbile de pinguins de brinquedo pendurado em um teto. As barras transversais são horizontais, têm massa desprezível e o comprimento à direita do fio de sustentação é três vezes maior que o comprimento à esquerda do fio. O pinguim 1 tem massa m_1 = 48 kg. Quais são as massas (a) do pinguim 2, (b) do pinguim 3 e (c) do pinguim 4?

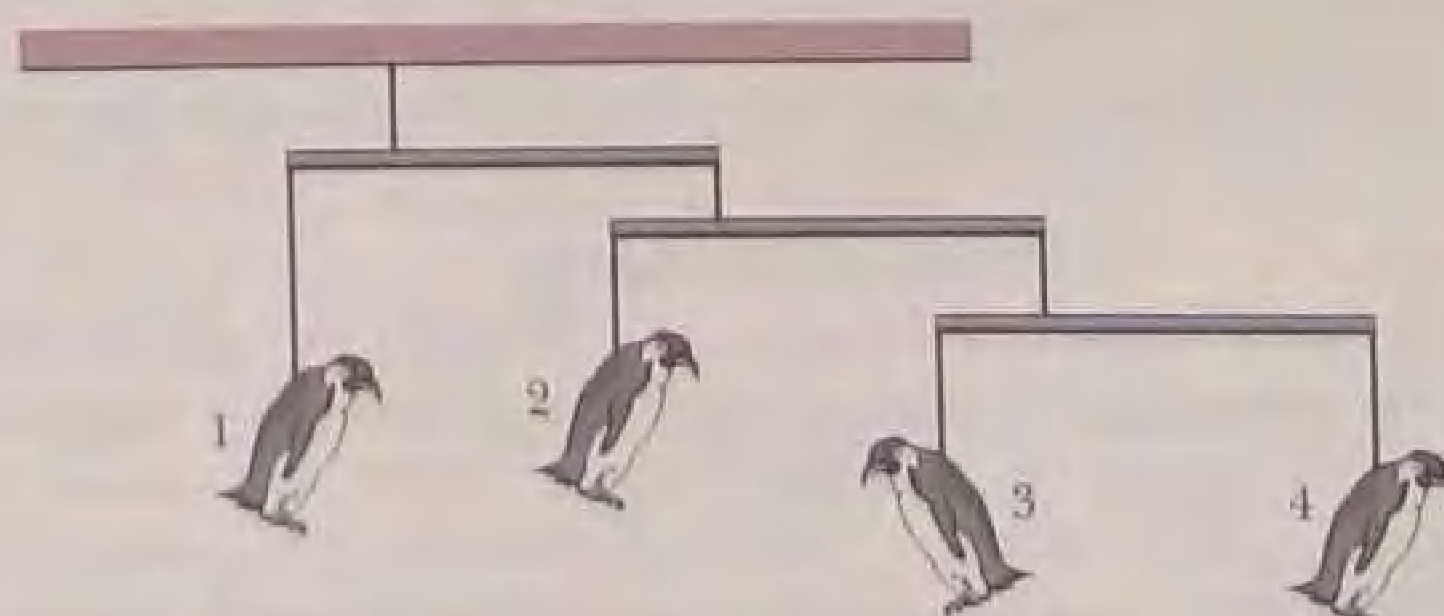


Figura 12-17 Pergunta 5.

6 A Fig. 12-18 mostra uma vista superior de uma barra homogênea sobre a qual agem quatro forças. Suponha que foi escolhido um eixo de rotação passando pelo ponto O, foram calculados os torques produzidos pelas forças em relação a esse eixo e verificou-se que o torque resultante é nulo. O torque resultante continuará a ser nulo se o eixo de rotação escolhido for (a) o ponto A (situado no interior da barra), (b) o ponto B (situado no prolongamento da barra), ou (c) o ponto C (ao lado da barra)? (d) Suponha que o torque resultante em relação ao ponto O não seja nulo. Existe algum ponto em relação ao qual o torque resultante se anula?

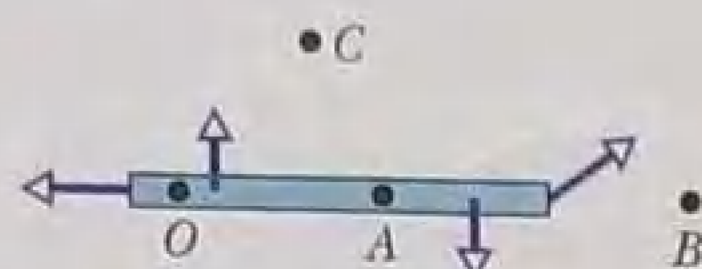


Figura 12-18 Pergunta 6.

7 Na Fig. 12-19, uma barra estacionária AC de 5 kg é sustentada de encontro a uma parede por uma corda e pelo atrito entre a barra e a parede. A barra homogênea tem 1 m de comprimento e $\theta = 30°$. (a) Onde deve ser posicionado um eixo de rotação para determinar o módulo da força $\vec{T}$ exercida pela corda sobre a barra a partir de uma única equação? Com essa escolha de eixo e considerando positivos os torques no sentido anti-horário, qual é o sinal (b) do torque τ_p exercido pelo peso sobre a barra e (c) do torque τ_c exercido pela corda sobre a barra? (d) O módulo de τ_c é maior, menor ou igual ao módulo de τ_p?

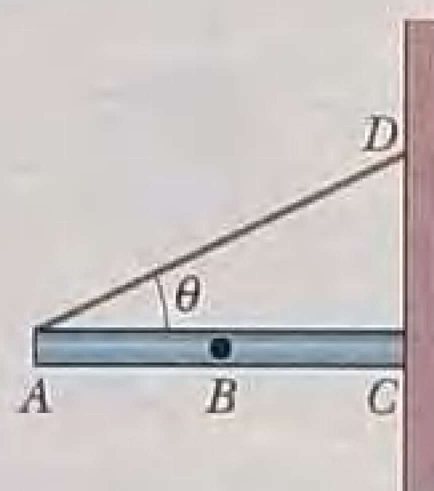


Figura 12-19 Pergunta 7.

8 Três cavalinhos estão pendurados no arranjo (em repouso) de polias ideais e cordas de massa desprezível da Fig. 12-20. Uma corda se estende do lado direito do teto até a polia mais baixa à esquerda, dando meia volta em todas as polias. Várias cordas menores sustentam as polias e os cavalinhos. São dados os pesos (em newtons) de dois cavalinhos. Qual é o peso do terceiro cavalinho? (*Sugestão:* uma corda que dá meia volta em torno de uma polia puxa-a com uma força total que é igual a duas vezes a da tensão da corda.) (b) Qual é a tensão da corda T?

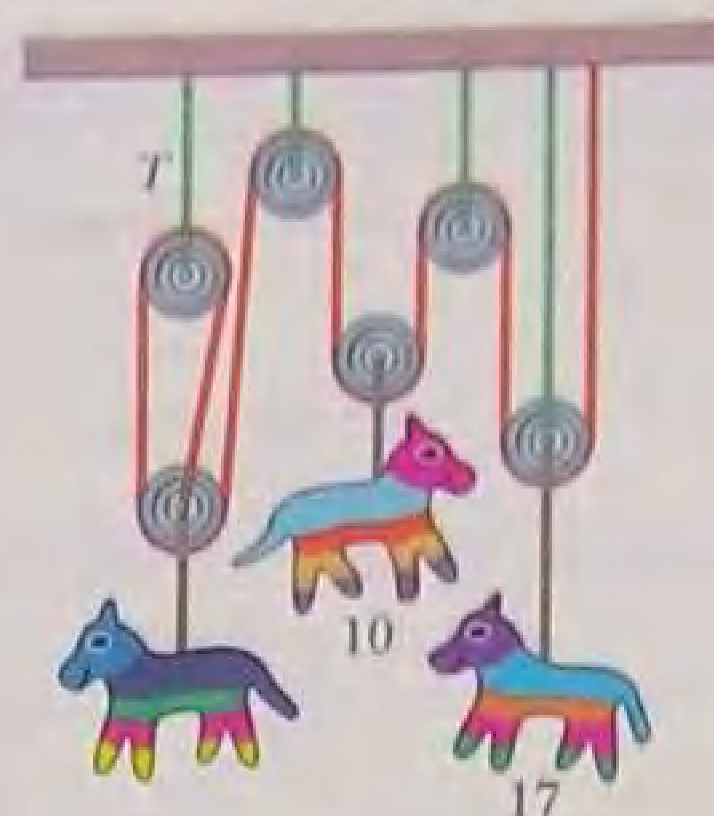


Figura 12-20 Pergunta 8.

9 Na Fig. 12-21, uma barra vertical está presa a uma dobradiça na extremidade inferior e a um cabo na extremidade superior. Uma força horizontal $\vec{F}_a$ é aplicada à barra, como mostra a figura. Se o ponto de aplicação da força é deslocado para cima ao longo da barra, a tensão do cabo aumenta, diminui ou permanece a mesma?

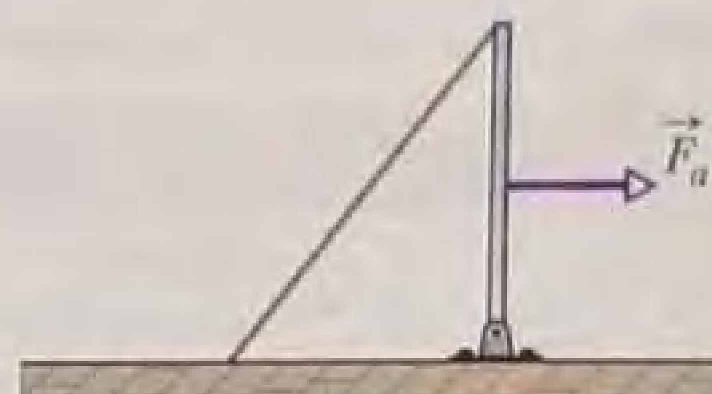


Figura 12-21 Pergunta 9.

10 A Fig. 12-22 mostra um bloco horizontal suspenso por dois fios, A e B, que são iguais em tudo, exceto no comprimento que possuíam antes que o bloco fosse pendurado. O centro de massa do bloco está mais próximo do fio B que do fio A. (a) Calculando os torques em relação ao centro de massa do bloco, determine se o módulo do torque produzido pelo fio A é maior, igual ou menor que o módulo do torque produzido pelo fio B. (b) Qual dos fios exerce mais força sobre o bloco? (c) Se os fios passaram a ter comprimentos iguais depois que o bloco foi pendurado, qual dos dois era inicialmente mais curto?

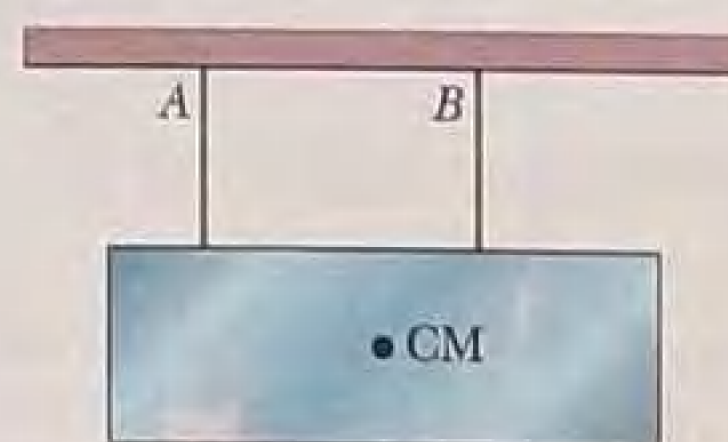


Figura 12-22 Pergunta 10.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Seção 12-4 O Centro de Gravidade

•**1** Como a constante g é praticamente a mesma em todos os pontos da maioria das estruturas, em geral supomos que o centro de gravidade de uma estrutura coincide com o centro de massa. Neste exemplo fictício, porém, a variação da constante g é significativa. A Fig. 12-23 mostra um arranjo de seis partículas, todas de massa m, presas na borda de uma estrutura rígida de massa desprezível. A distância entre partículas vizinhas da mesma borda é 2,00 m. A tabela a seguir mostra o valor de g (em m/s²) na posição de cada partícula. Usando o sistema de coordenadas mostrado na figura, determine (a) a coordenada x_{CM} e (b) a coordenada y_{CM} do centro de massa do sistema de seis partículas. Em seguida, determine (c) a coordenada x_{CG} e (d) a coordenada y_{CG} do centro de gravidade do sistema de seis partículas.



Figura 12-23 Problema 1.

Partícula	g	Partícula	g
1	8,00	4	7,40
2	7,80	5	7,60
3	7,60	6	7,80

Seção 12-5 Alguns Exemplos de Equilíbrio Estático

•**2** A distância entre os eixos dianteiro e traseiro de um automóvel é 3,05 m. A massa do automóvel é 1360 kg e o centro de gravidade está situado 1,78 m atrás do eixo dianteiro. Com o automóvel em terreno plano, determine o módulo da força exercida pelo solo (a) sobre cada roda dianteira (supondo que as forças exercidas sobre as rodas dianteiras são iguais) e (b) sobre cada roda traseira (supondo que as forças exercidas sobre as rodas traseiras são iguais).

•**3** Na Fig. 12-24, uma esfera homogênea de massa $m = 0,85$ kg e raio $r = 4,2$ cm é mantida em repouso por uma corda de massa desprezível, presa a uma parede sem atrito a uma distância $L = 8,0$ cm acima do centro da esfera. Determine (a) a tensão da corda e (b) a força que a parede exerce sobre a esfera.

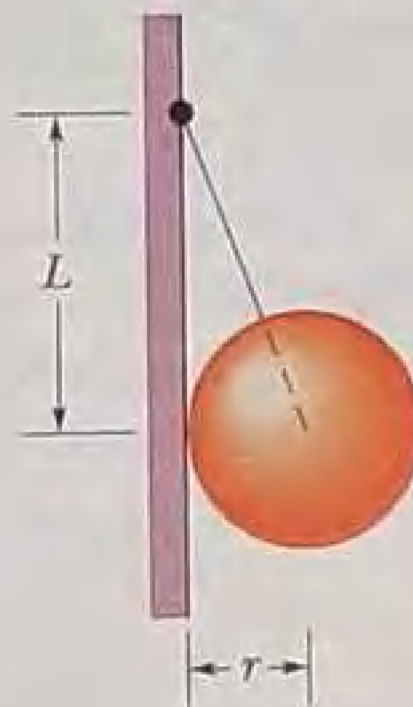


Figura 12-24 Problema 3.

•**4** Um arco é puxado pelo ponto médio até que a tensão da corda fique igual à força exercida pelo arqueiro. Qual é o ângulo entre as duas metades da corda?

•**5** Uma corda de massa desprezível está esticada horizontalmente entre dois suportes separados por uma distância de 3,44 m. Quando um objeto pesando 3160 N é pendurado no centro da corda, ela cede 35,0 cm. Qual é a tensão da corda?

•**6** Um andaime com 60 kg de massa e 5,0 m de comprimento é mantido na horizontal por um cabo vertical em cada extremidade. Um lavador de janelas com 80 kg de massa está de pé sobre o andaime a 1,5 m de distância de uma das extremidades. Qual é a tensão (a) do cabo mais próximo e (b) do cabo mais distante do trabalhador?

•**7** Um lavador de janelas de 75 kg usa uma escada com 10 kg de massa e 5,0 m de comprimento. Ele apoia uma extremidade no chão a 2,5 m de uma parede, encosta a extremidade oposta em uma janela rachada e começa a subir. Depois de percorrer uma distância de 3,0 m ao longo da escada, a janela quebra. Despreze o atrito entre a escada e a janela e suponha que a base da escada não escorrega. Quando a janela está na iminência de quebrar, qual é (a) o módulo da força que a escada exerce sobre a janela, (b) o módulo da força que o chão exerce sobre a escada e (c) o ângulo (em relação à horizontal) da força que o chão exerce sobre a escada?

•**8** Oito alunos de física, cujos pesos estão indicados em newtons na Fig. 12-25, se equilibram em uma gangorra. Qual é o número do estudante que produz o maior torque em relação a um eixo de rotação que passa pelo fulcro f no sentido (a) para fora do papel e (b) para dentro do papel?

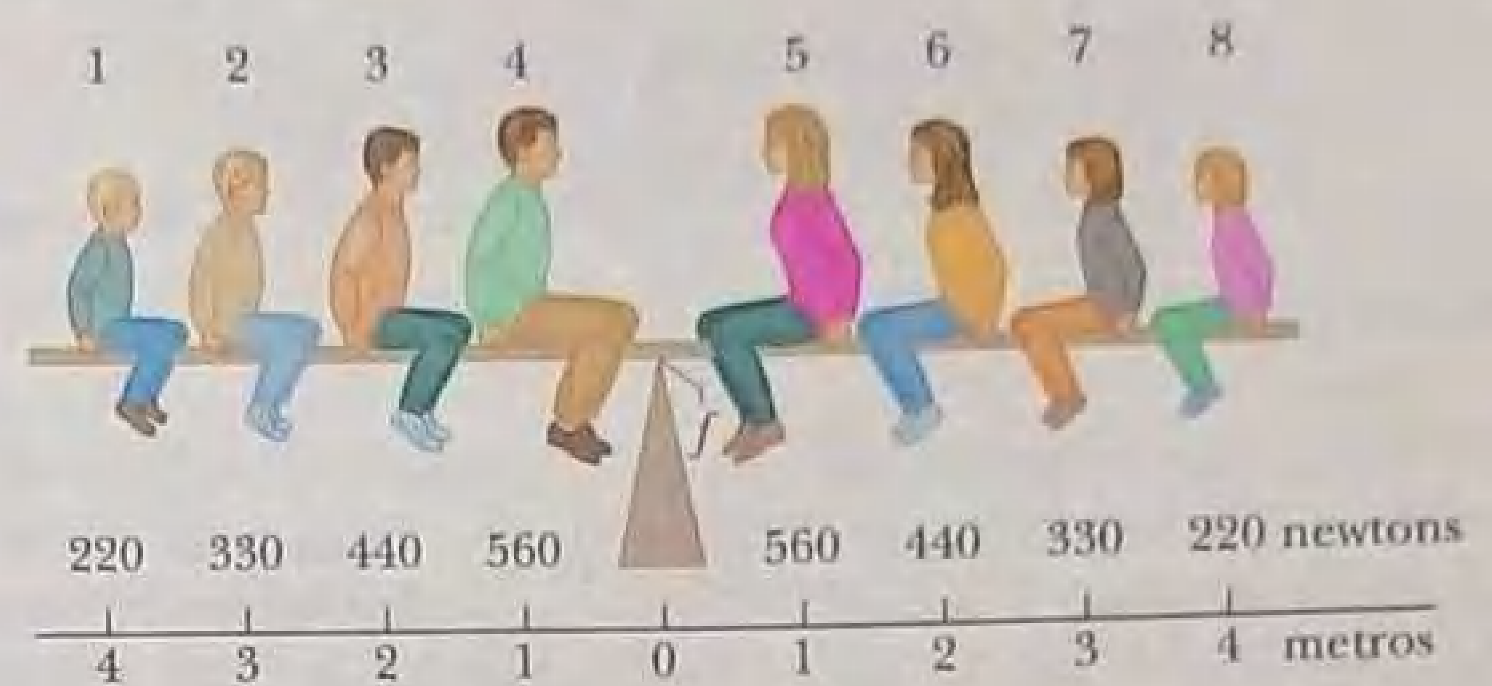


Figura 12-25 Problema 8.

•**9** Uma régua de um metro está em equilíbrio horizontal sobre a lâmina de uma faca, na marca de 50,0 cm. Com duas moedas de 5,00 g empilhadas na marca de 12,0 cm, a régua fica em equilíbrio na marca de 45,5 cm. Qual é a massa da régua?

•**10** O sistema da Fig. 12-26 está em equilíbrio, com a corda do centro exatamente na horizontal. O bloco A pesa 40 N, o bloco B pesa 50 N e o ângulo ϕ é 35°. Determine (a) a tensão T_1, (b) a tensão T_2, (c) a tensão T_3 e (d) o ângulo θ.

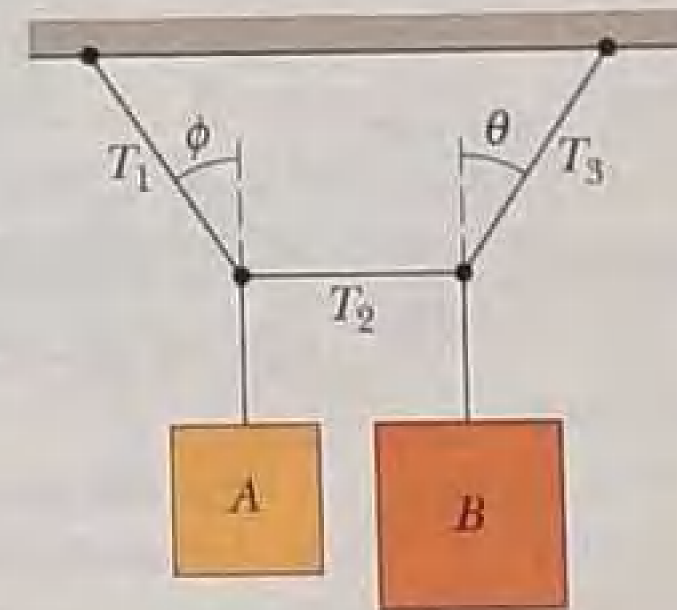


Figura 12-26 Problema 10.

•**11** Um mergulhador com 580 N de peso está em pé na extremidade de um trampolim de comprimento $L = 4,5$ m e massa desprezível (Fig. 12-27). O trampolim está preso em dois suportes separados por uma distância $d = 1,5$ m. Das forças que agem sobre o trampolim, qual é (a) o módulo e (b) o sentido (para cima ou para baixo) da força exercida pelo suporte de trás e (c) o módulo e (d) o sentido (para cima ou para baixo) da força exercida pelo suporte da frente? (e) Que pedestal (o de trás ou o da frente) está sendo tracionado e (f) que pedestal está sendo comprimido?

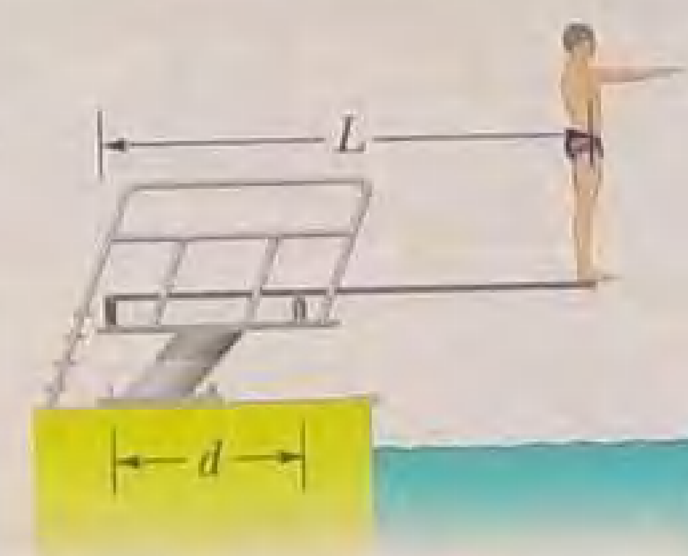


Figura 12-27 Problema 11.

•**12** Na Fig. 12-28, um homem está tentando tirar o carro de um atoleiro no acostamento de uma estrada. Para isso, amarra uma das extremidades de uma corda no para-choque dianteiro e a outra extremidade em um poste, a 18 m de distância. Em seguida, empurra a corda lateralmente, no ponto médio, com uma força de 550 N, deslocando o centro da corda de 0,30 m em relação à posição anterior, e o carro praticamente não se move. Qual é a força exercida pela corda sobre o carro? (A corda sofre um pequeno alongamento.)



Figura 12-28 Problema 12.

•**13** A Fig. 12-29 mostra as estruturas anatômicas da parte inferior da perna e do pé que estão envolvidas quando ficamos na ponta do pé, com o calcanhar levemente levantado e o pé fazendo contato com o chão apenas no ponto P. Suponha que $a = 5,0$ cm, $b = 15$ cm, e o peso da pessoa é 900 N. Das forças que agem sobre o pé, qual é (a) o módulo e (b) o sentido (para cima ou para baixo) da força que o músculo da panturrilha exerce sobre o ponto A e (c) o módulo e (d) o sentido (para cima ou para baixo) da força que os ossos da perna exercem sobre o ponto B?



Figura 12-29 Problema 13.

•**14** Na Fig. 12-30, um andaime horizontal, de 2,00 m de comprimento e massa homogênea de 50,0 kg, está suspenso de um edifício por dois cabos. O andaime tem várias latas de tinta empilhadas. A massa total das latas de tinta é 75,0 kg. A tensão do cabo à direita é 722 N. A que distância desse cabo está o centro de massa do sistema de latas de tinta?



Figura 12-30 Problema 14.

•**15** As forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ agem sobre a estrutura cuja vista superior aparece na Fig. 12-31. Deseja-se colocar a estrutura em equilíbrio aplicando uma quarta força em um ponto como P. A quarta força tem componentes vetoriais $\vec{F}_h$ e $\vec{F}_v$. Sabe-se que $a = 2,0$ m, $b = 3,0$ m, $c = 1,0$ m, $F_1 = 20$ N, $F_2 = 10$ N e $F_3 = 5,0$ N. Determine (a) F_h, (b) F_v e (c) d.

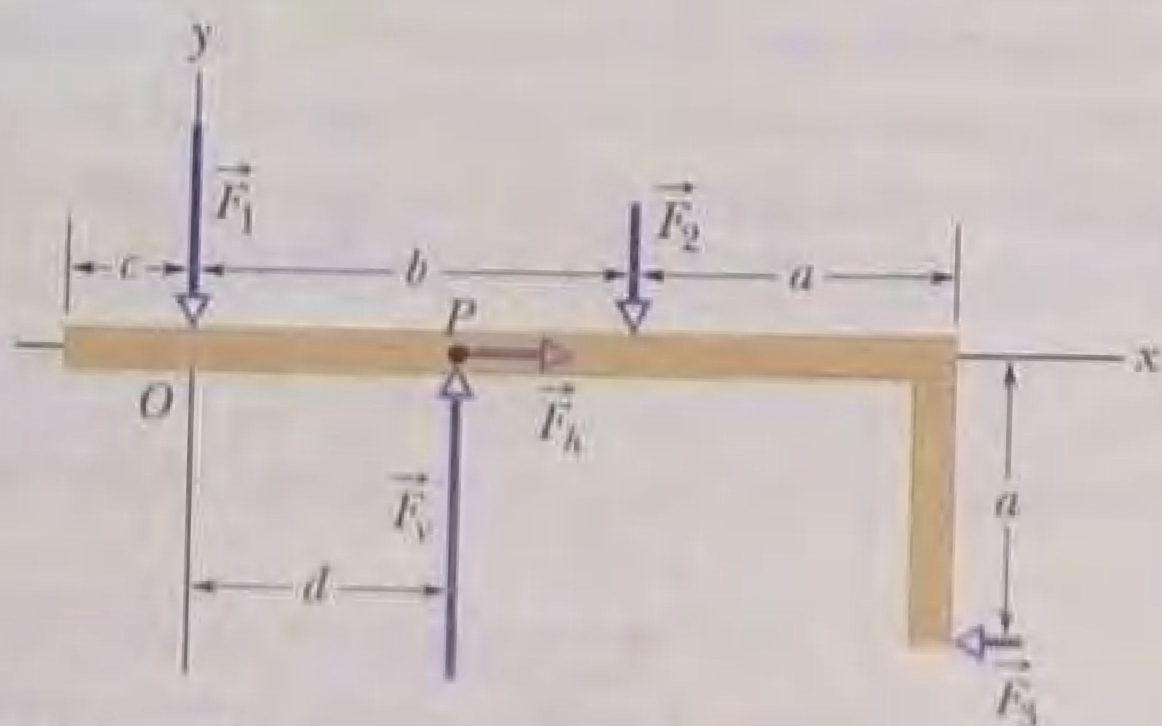


Figura 12-31 Problema 15.

•**16** Um caixote cúbico homogêneo com 0,750 m de lado e 500 N de peso repousa em um piso com um dos lados da base encostado em um obstáculo fixo de pequena altura. A que altura mínima acima do piso deve ser aplicada uma força horizontal de 350 N para virar o caixote?

•**17** Na Fig. 12-32, uma viga homogênea de 3,0 m de comprimento e 500 N de peso está suspensa horizontalmente. No lado esquerdo, está presa a uma parede por uma dobradiça; no lado direito, é sustentada por um cabo pregado na parede a uma distância D acima da viga. A tensão de ruptura do cabo é 1200 N. (a) Que valor de D corresponde a essa tensão? (b) Para que o cabo não se rompa, D deve aumentar ou diminuir em relação a esse valor?

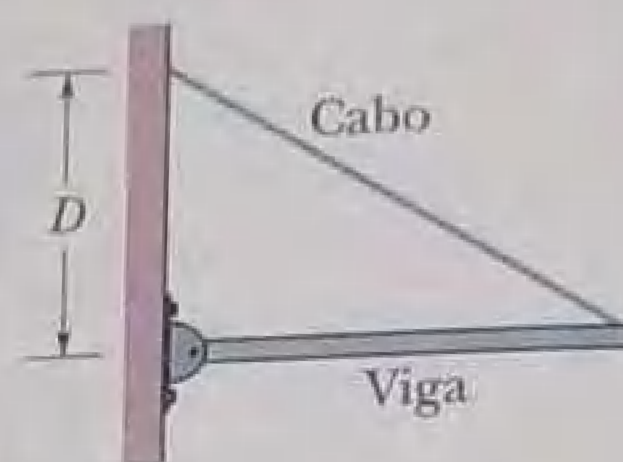


Figura 12-32 Problema 17.

•**18** Na Fig. 12-33, o andaime horizontal 2, de massa homogênea $m_2 = 30,0$ kg e comprimento $L_2 = 2,00$ m, está pendurado em um andaime horizontal 1, de massa homogênea $m_1 = 50,0$ kg. Uma caixa de pregos de 20,0 kg está no andaime 2, com o centro a distância $d = 0,500$ m da extremidade esquerda. Qual é a tensão T do cabo indicado na figura?

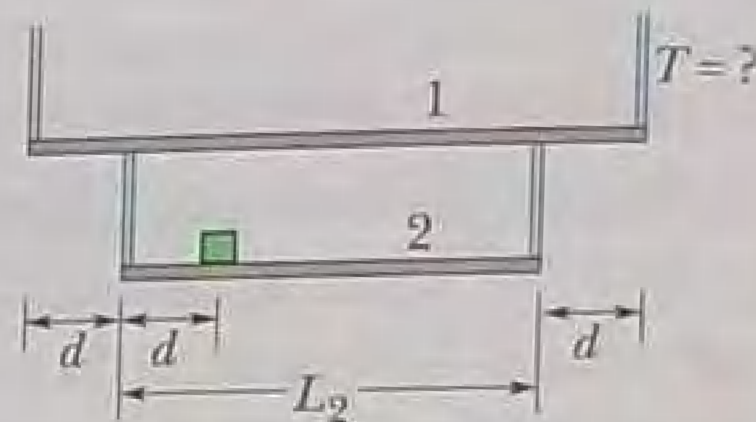


Figura 12-33 Problema 18.

•**19** Para quebrar a casca de uma noz com um quebra-nozes, forças de pelo menos 40 N de módulo devem agir sobre a casca em ambos os lados. Para o quebra-nozes da Fig. 12-34, com distâncias $L = 12$ cm e $d = 2,6$ cm, quais são as componentes em cada cabo das forças $F_\perp$ (aplicadas perpendicularmente aos cabos) que correspondem a esses 40 N?

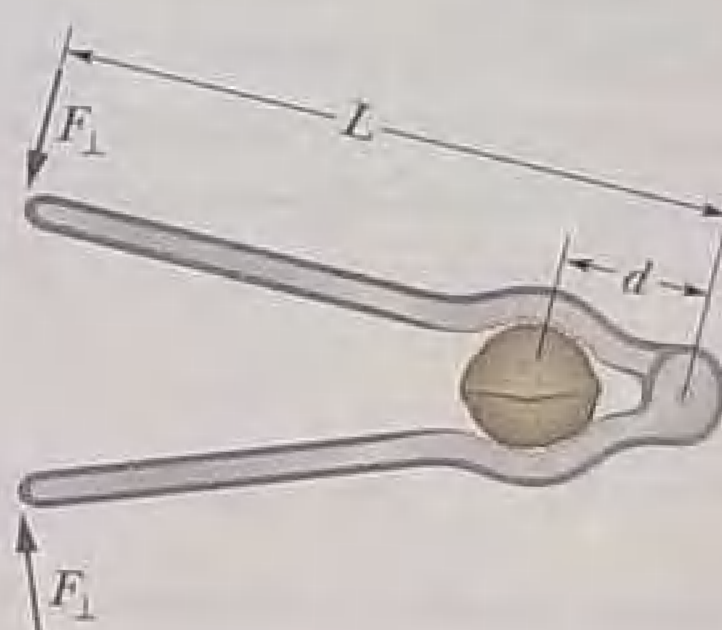


Figura 12-34 Problema 19.

•**20** Um jogador segura uma bola de boliche ($M = 7,2$ kg) na palma da mão (Fig. 12-35). O braço está na vertical e o antebraço ($m = 1,8$ kg) na horizontal. Qual é o módulo (a) da força que o bíceps exerce sobre o antebraço e (b) da força que os ossos exercem entre si na articulação do cotovelo?

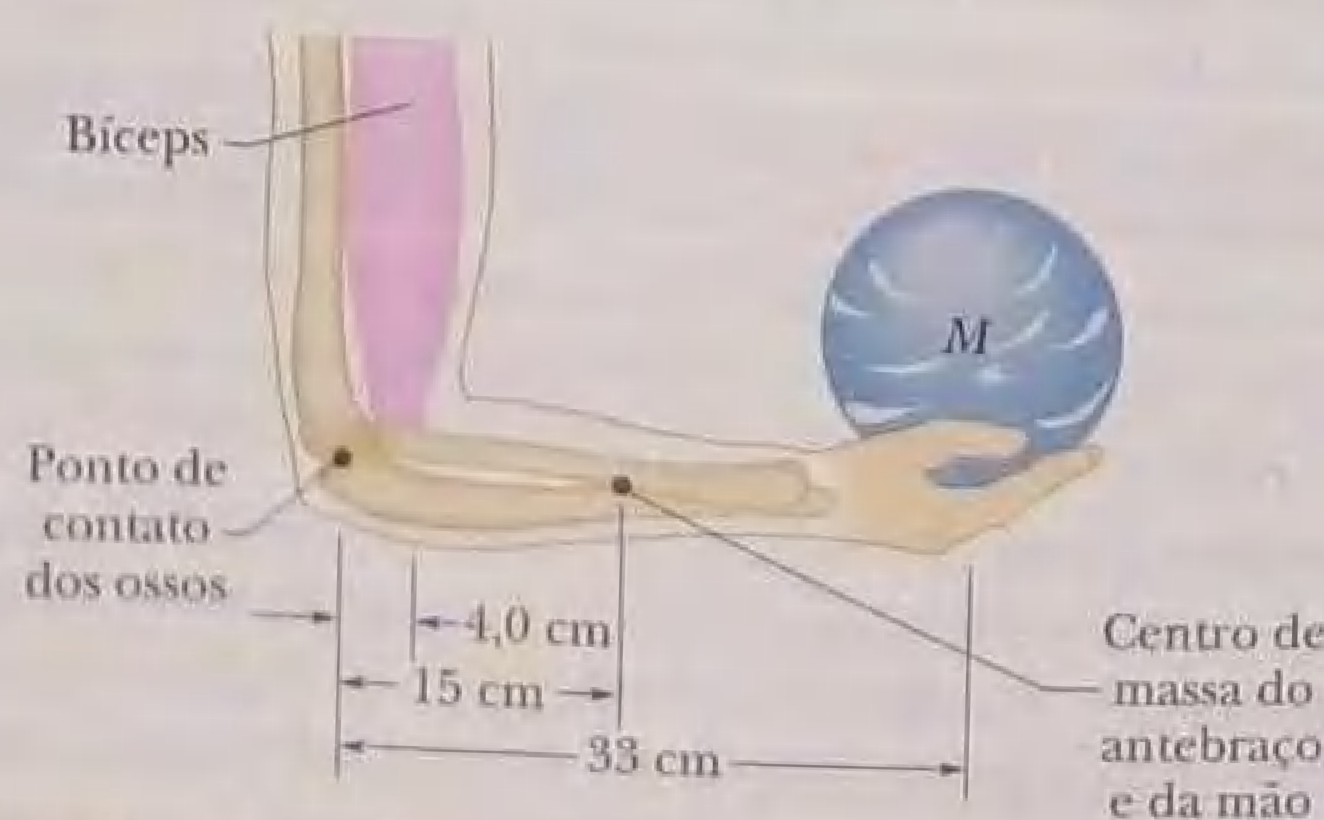


Figura 12-35 Problema 20.

••21 O sistema na Fig. 12-36 está em equilíbrio. Um bloco de concreto com uma massa de 225 kg está pendurado na extremidade de uma longarina homogênea com uma massa de 45,0 kg. Para os ângulos $\phi = 30,0°$ e $\theta = 45,0°$, determine (a) a tensão T do cabo e as componentes (b) horizontal e (c) vertical da força que a dobradiça exerce sobre a longarina.

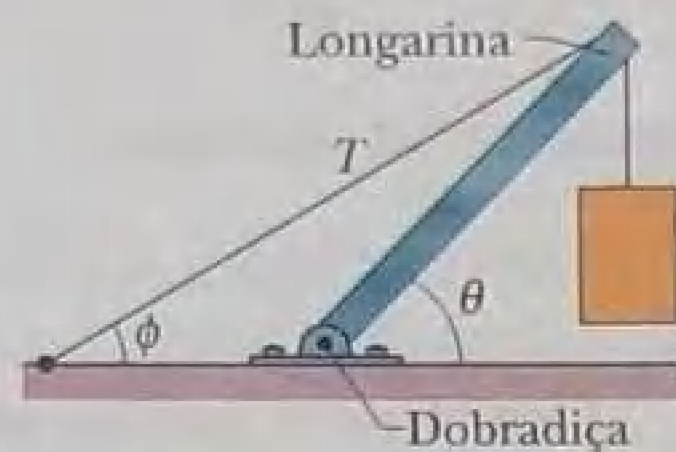


Figura 12-36 Problema 21.

••22 Na Fig. 12-37, um alpinista de 55 kg está subindo por uma chaminé na pedra, com as mãos puxando um lado da chaminé e os pés pressionando o lado oposto. A chaminé tem uma largura $w = 0,20$ m e o centro de massa do alpinista está a uma distância horizontal $d = 0,40$ m da chaminé. O coeficiente de atrito estático entre mãos e rocha é $\mu_1 = 0,40$ e entre as botas e a pedra é $\mu_2 = 1,2$. (a) Qual é a menor força horizontal das mãos e dos pés que mantém o alpinista estável? (b) Para a força horizontal do item (a), qual deve ser a distância vertical h entre as mãos e os pés? Se o alpinista encontra uma pedra molhada, para a qual os valores de μ_1 e μ_2 são menores, o que acontece com (c) a resposta do item (a) e (d) a resposta do item (b)?

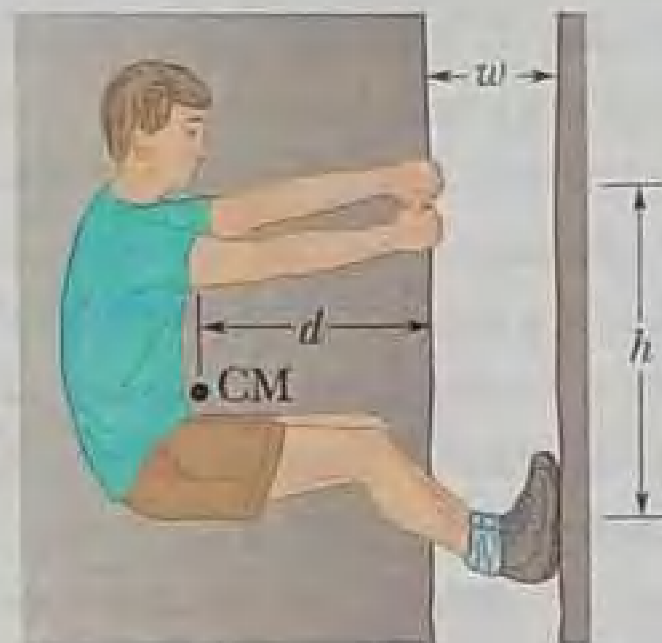


Figura 12-37 Problema 22.

••23 Na Fig. 12-38, uma extremidade de uma viga homogênea de 222 N de peso está presa por uma dobradiça a uma parede; a outra extremidade é sustentada por um fio que faz o mesmo ângulo $\theta = 30,0°$ com a viga e com a parede. Determine (a) a tensão do fio e as componentes (b) horizontal e (c) vertical da força que a dobradiça exerce sobre a viga.

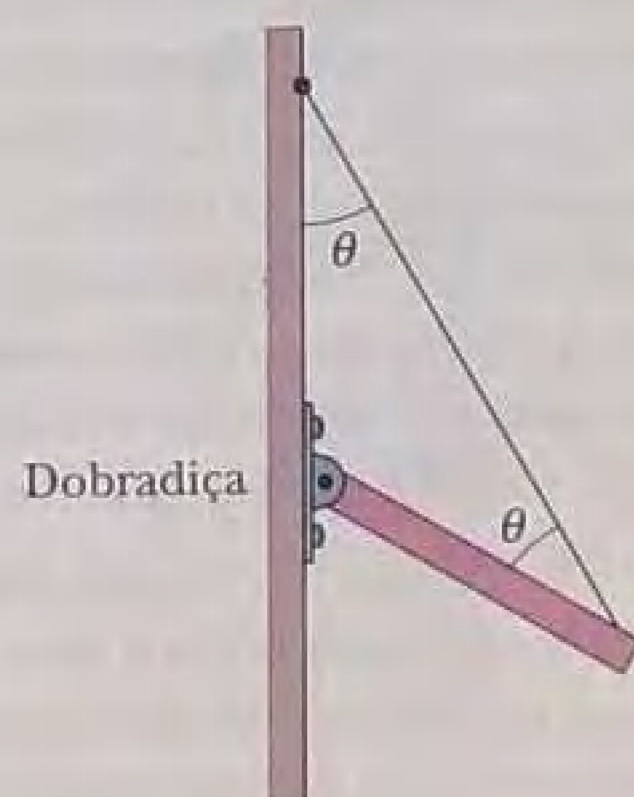


Figura 12-38 Problema 23.

••24 Na Fig. 12-39, uma alpinista com 533,8 N de peso é sustentada por uma corda de segurança presa a um grampo em uma das extremidades e a um mosquetão na cintura da moça na outra extremidade. A linha de ação da força exercida pela corda passa pelo centro de massa da alpinista. Os ângulos indicados na figura são $\theta = 40,0°$ e $\phi = 30,0°$. Se os pés da moça estão na iminência de escorregar na parede vertical, qual é o coeficiente de atrito estático entre os sapatos de alpinismo e a parede?



Figura 12-39 Problema 24.

••25 Na Fig. 12-40, qual é o menor valor do módulo da força horizontal (constante) $\vec{F}$, aplicada horizontalmente ao eixo da roda, que permite à roda ultrapassar um degrau de altura $h = 3,00$ cm? O raio da roda é $r = 6,00$ cm e a massa é $m = 0,800$ kg.

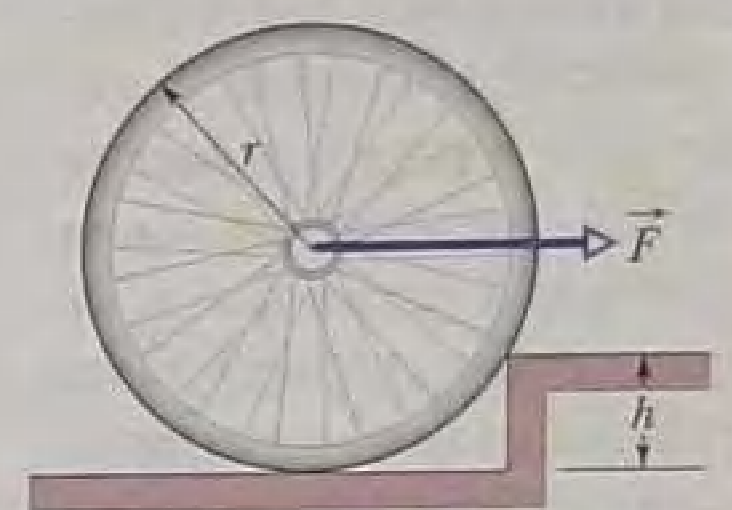


Figura 12-40 Problema 25.

••26 Na Fig. 12-41, um alpinista se apoia com as mãos em um encosta vertical coberta de gelo cujo atrito é desprezível. A distância a é 0,914 m e a distância L é 2,10 m. O centro de massa do alpinista está a uma distância $d = 0,940$ m do ponto de contato entre os pés do alpinista e uma plataforma horizontal na pedra. Se o alpinista está na iminência de escorregar, qual é o coeficiente de atrito estático entre os pés e a pedra?

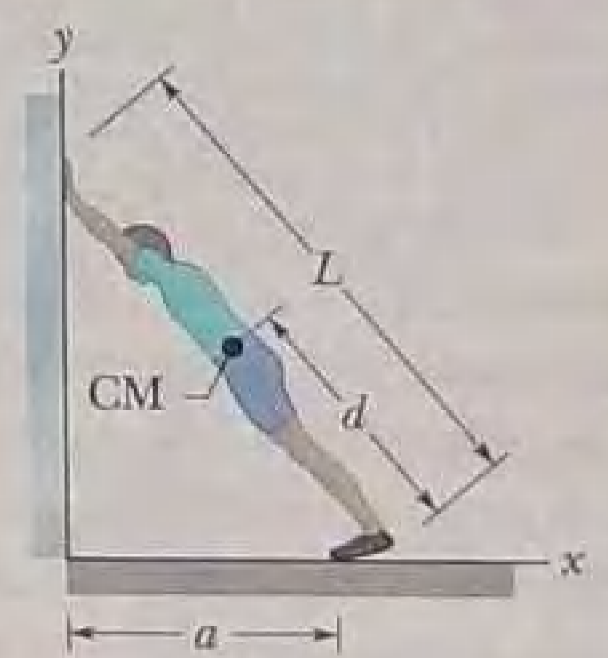


Figura 12-41 Problema 26.

••27 Na Fig. 12-42, um bloco de 15 kg é mantido em repouso através de um sistema de polias. O braço da pessoa está na vertical; o antebraço faz um ângulo $\theta = 30°$ com a horizontal. O antebraço e a mão têm uma massa conjunta de 2,0 kg, com o centro de massa a uma distância $d_1 = 15$ cm à frente do ponto de contato dos ossos do antebraço com o osso do braço (úmero). Um músculo (o tríceps) puxa o antebraço verticalmente para cima com uma força cujo ponto de aplicação está a uma distância $d_2 = 2,5$ cm atrás desse ponto de contato. A distância d_3 é 35 cm. Qual é (a) o módulo e (b) o sentido (para cima ou para baixo) da força exercida pelo tríceps sobre o antebraço e (c) o módulo e (d) o sentido (para cima ou para baixo) da força exercida pelo úmero sobre o antebraço?

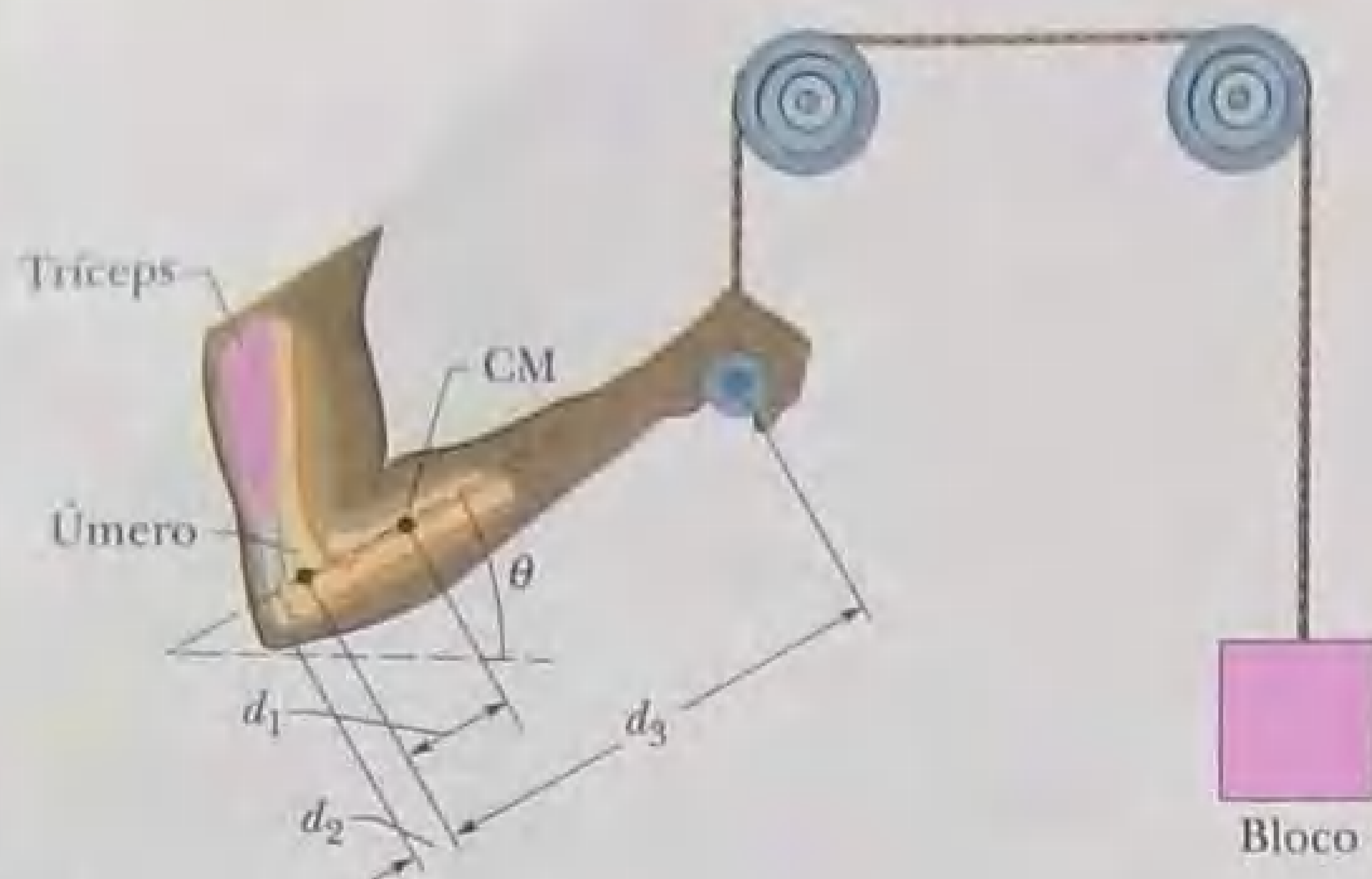


Figura 12-42 Problema 27.

••**28** Na Fig. 12-43, suponha que o comprimento L da barra homogênea seja 3,00 m e o peso seja 200 N. Suponha ainda que o bloco tenha um peso de 300 N e que $\theta = 30,0°$. O fio pode suportar uma tensão máxima de 500 N. (a) Qual é a maior distância x para a qual o fio não arrebenta? Com o bloco posicionado nesse valor máximo de x, qual é a componente (b) horizontal e (c) vertical da força que a dobradiça exerce sobre a barra no ponto A?

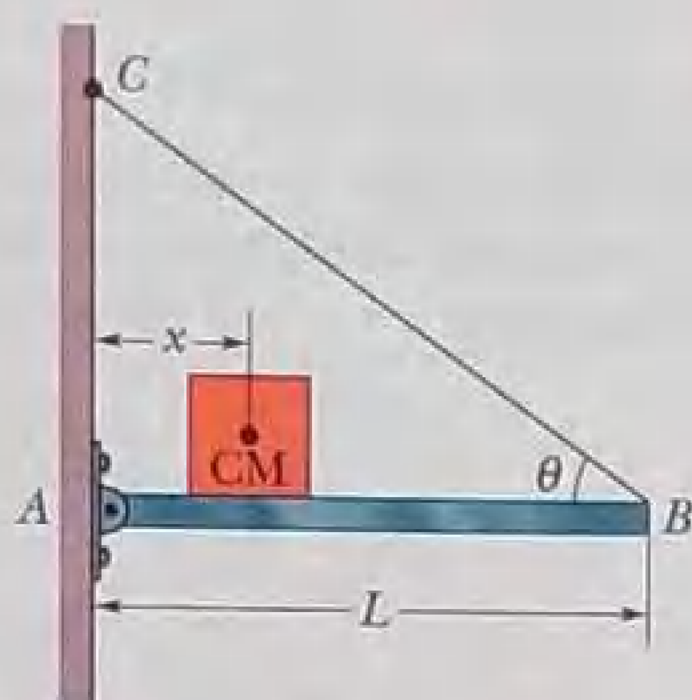


Figura 12-43 Problemas 28 e 34.

••**29** Uma porta tem uma altura de 2,1 m, ao longo de um eixo y que se estende verticalmente para cima, e uma largura de 0,91 m, ao longo de um eixo x que se estende horizontalmente a partir do lado da porta que está preso com dobradiças. Uma das dobradiças está a 0,30 m da borda superior da porta e outra a 0,30 m da borda inferior; cada uma sustenta metade do peso da porta, cuja massa é 27 kg. Em termos dos vetores unitários, qual é a força exercida sobre a porta (a) pela dobradiça superior e (b) pela dobradiça inferior?

••**30** Na Fig. 12-44, um cartaz quadrado homogêneo de 50,0 kg, de lado $L = 2,00$ m, está pendurado em uma barra horizontal de comprimento $d_h = 3,00$ m e massa desprezível. Um cabo está preso em uma extremidade da barra e em um ponto de uma parede a uma distância $d_v = 4,00$ m acima do ponto onde a outra extremidade da barra está presa na parede por uma dobradiça. (a) Qual é a tensão do cabo? Qual é (b) o módulo e (c) o sentido (para a esquerda ou para a direita) da componente horizontal da força que a dobradiça exerce sobre a haste e (d) o módulo e (e) o sentido (para cima ou para baixo) da componente vertical dessa força?



Figura 12-44 Problema 30.

••**31** Na Fig. 12-45, uma barra não homogênea está suspensa em repouso, na horizontal, por duas cordas de massa desprezível. Uma corda faz um ângulo $\theta = 36,9°$ com a vertical; a outra faz um ângulo $\phi = 53,1°$ com a vertical. Se o comprimento L da barra é 6,10 m, calcule a distância x entre a extremidade esquerda da barra e o centro de massa.

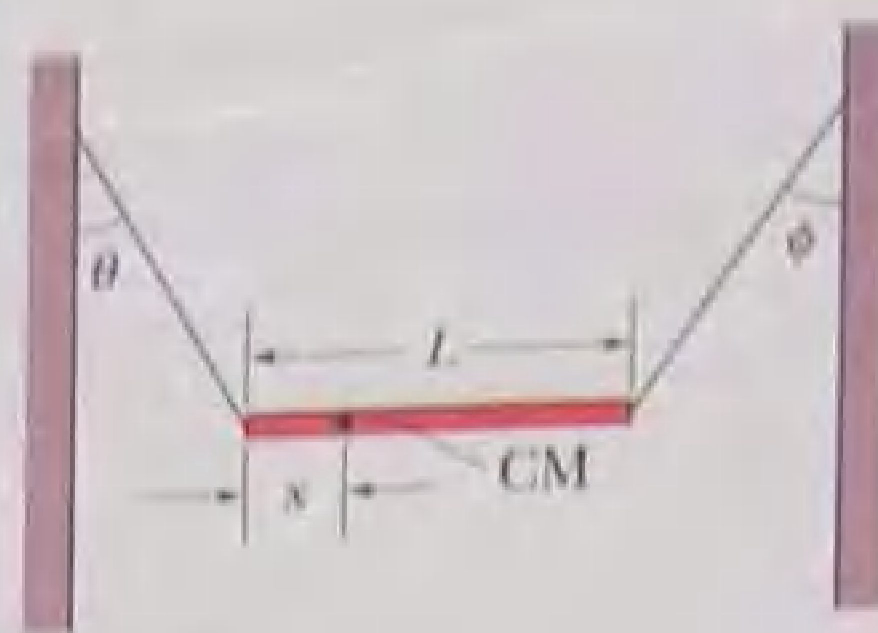


Figura 12-45 Problema 31.

••**32** Na Fig. 12-46, a motorista de um carro que se move em uma estrada horizontal faz uma parada de emergência aplicando os freios de tal forma que as quatro rodas ficam bloqueadas e derrapam na pista. O coeficiente de atrito cinético entre os pneus e a pista é 0,40. A distância entre os eixos dianteiro e traseiro é $L = 4,2$ m e o centro de massa do carro está a uma distância $d = 1,8$ m atrás do eixo dianteiro e a uma altura $h = 0,75$ m acima da pista. O carro pesa 11 kN. Determine o módulo (a) da aceleração do carro durante a frenagem, (b) da força normal a que uma das rodas traseiras é submetida, (c) da força normal a que uma das rodas dianteiras é submetida, (d) da força de frenagem a que uma das rodas traseiras é submetida, e (e) da força de frenagem a que uma das rodas dianteiras é submetida. (*Sugestão:* embora o carro não esteja em equilíbrio para translações, *está* em equilíbrio para rotações.)

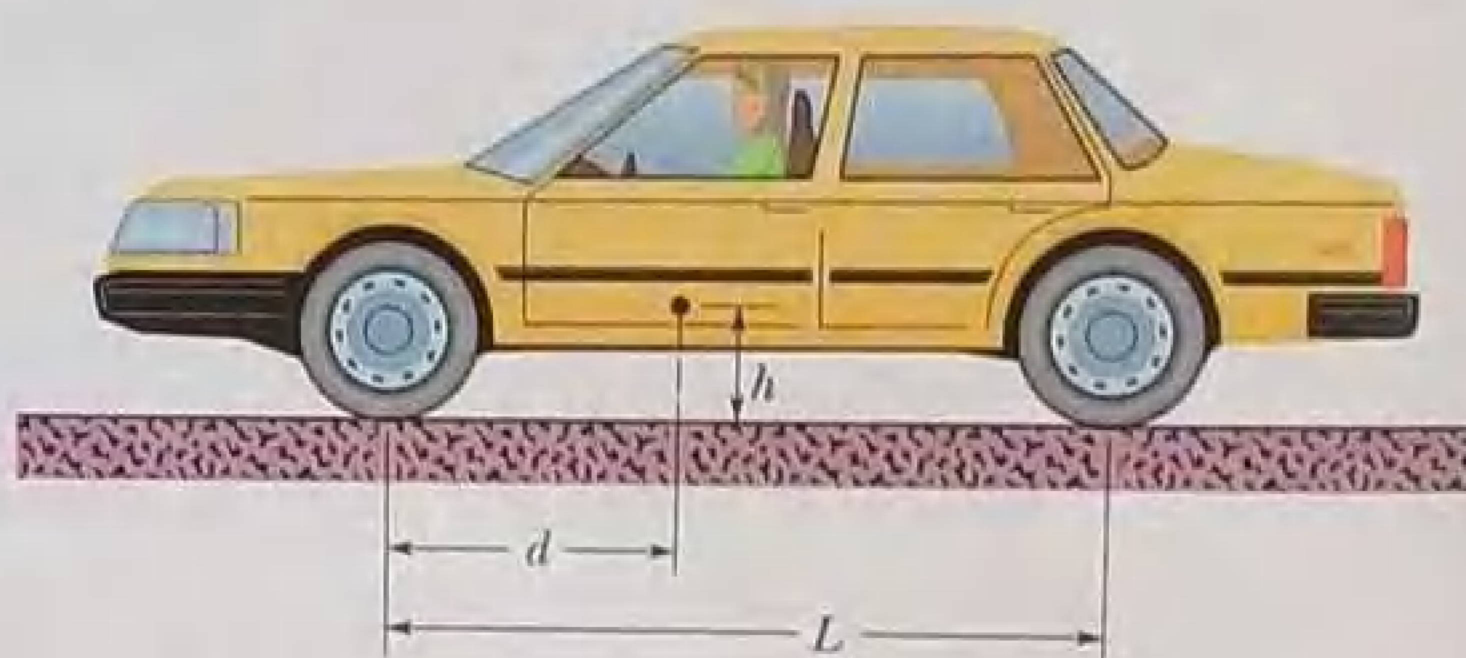


Figura 12-46 Problema 32.

••**33** A Fig. 12-47*a* mostra uma viga vertical homogênea de comprimento L que está presa a uma dobradiça na extremidade inferior. Uma força horizontal $\vec{F}_a$ é aplicada à viga a uma distância y da extremidade inferior. A viga permanece na vertical porque há um cabo preso na extremidade superior, fazendo um ângulo θ com a horizontal. A Fig. 12-47*b* mostra a tensão T do cabo em função do ponto de aplicação da força, dada como uma fração y/L do comprimento da barra. A escala do eixo vertical é definida por $T_s = 600$ N. A Fig. 12-47*c* mostra o módulo F_h da componente horizontal da força que a dobradiça exerce sobre a viga, também em função de y/L. Calcule (a) o ângulo θ e (b) o módulo de $\vec{F}_a$.

••**34** Na Fig. 12-43, uma barra fina AB de peso desprezível e comprimento L está presa a uma parede vertical por uma dobradiça no ponto A e é sustentada no ponto B por um fio fino BC que faz um ângulo θ com a horizontal. Um bloco de peso P pode ser deslocado para qualquer posição ao longo da barra; sua posição é definida pela distância x da parede ao seu centro de massa. Determine, em função de x, (a) a tensão do fio e as componentes (b) horizontal e (c) vertical da força que a dobradiça exerce sobre a barra no ponto A.

••**35** Uma caixa cúbica está cheia de areia e pesa 890 N. Desejamos fazer a caixa "rolar" empurrando-a horizontalmente por uma das bordas superiores. (a) Qual é a menor força necessária? (b) Qual é o menor coeficiente de atrito estático necessário entre a caixa e o piso? (c) Se existe um modo mais eficiente de fazer a caixa rolar,

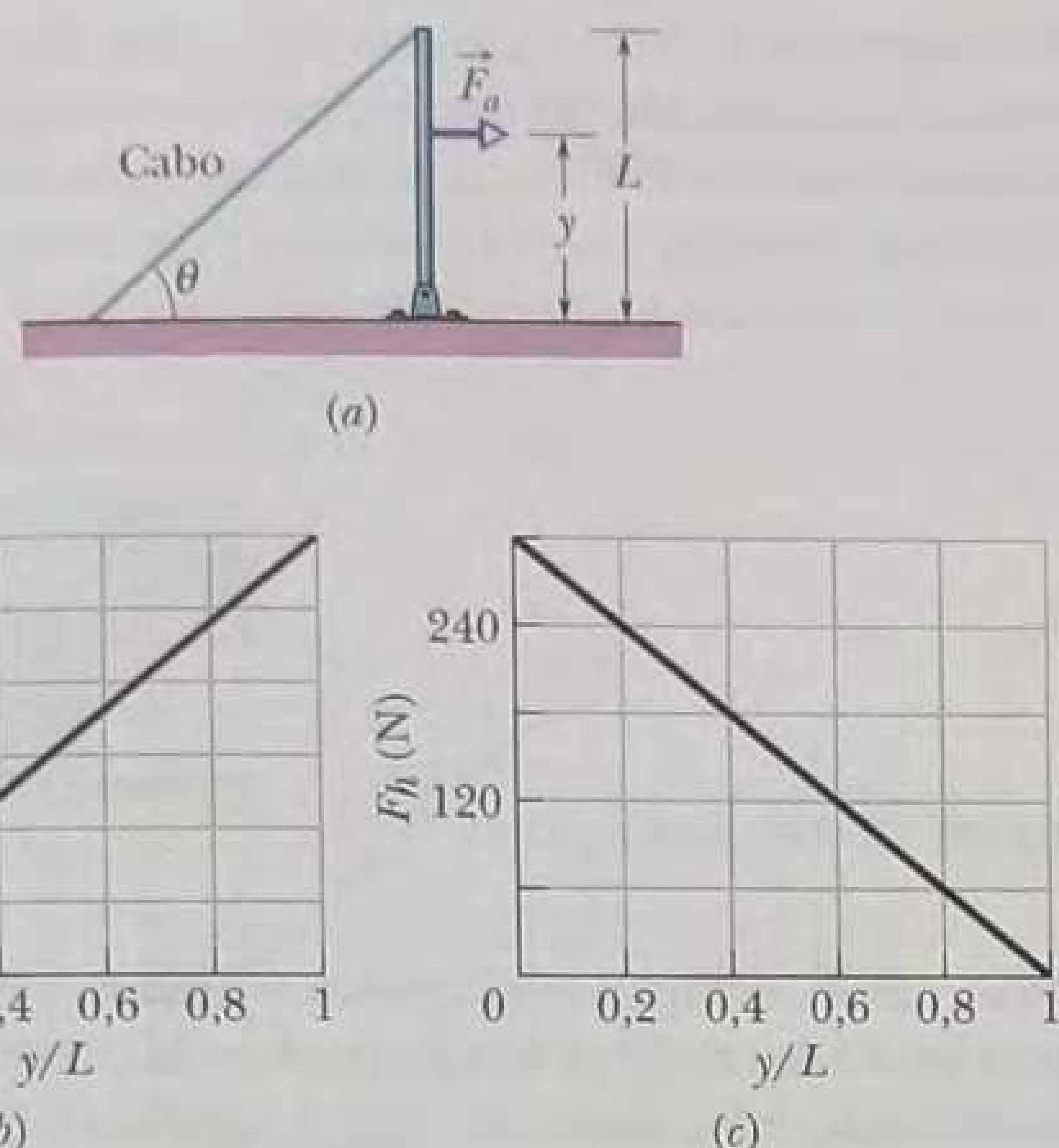


Figura 12-47 Problema 33.

determine a menor força possível que deve ser aplicada diretamente à caixa para que isso aconteça. (*Sugestão:* qual é o ponto de aplicação da força normal quando a caixa está prestes a tombar?)

••**36** A Fig. 12-48 mostra uma alpinista de 70 kg sustentada apenas por uma das mãos em uma saliência horizontal de uma encosta vertical, uma pegada conhecida como *pinça*. (A moça exerce uma força para baixo com os dedos para se segurar.) Os pés da alpinista tocam a pedra a uma distância $H = 2{,}0$ m verticalmente abaixo dos dedos, mas não oferecem nenhum apoio; o centro de massa da alpinista está a uma distância $a = 0{,}20$ m da encosta. Suponha que a força que a saliência exerce sobre a mão está distribuída igualmente por quatro dedos. Determine o valor (a) da componente horizontal F_h e (b) da componente vertical F_v da força exercida pela saliência sobre *um dos dedos*.

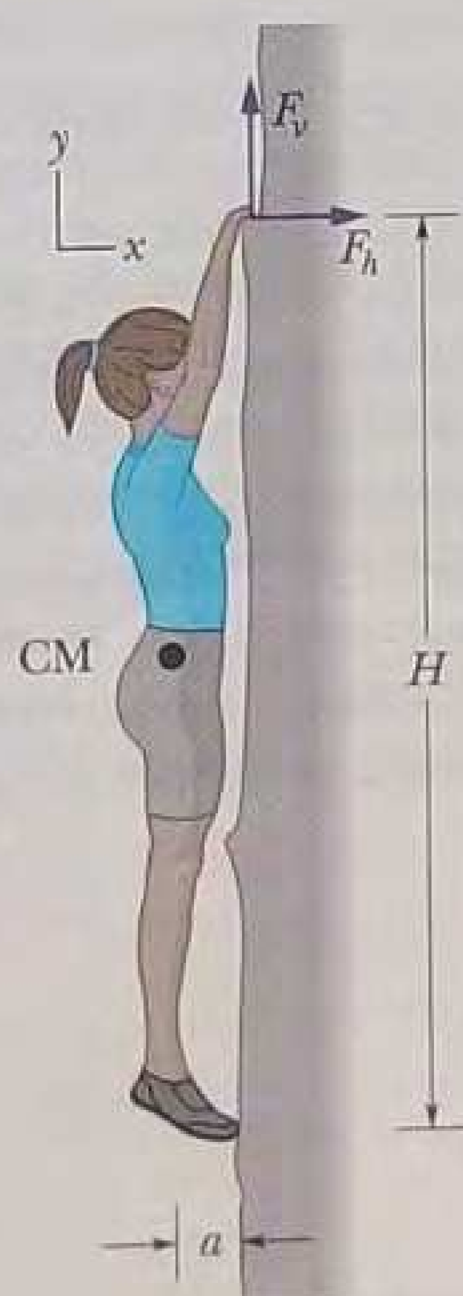


Figura 12-48 Problema 36.

••**37** Na Fig. 12-49, uma prancha homogênea, com um comprimento L de 6,10 m e um peso de 445 N, repousa apoiada no chão e em um rolamento sem atrito no alto de uma parede de altura $h = 3{,}05$ m. A prancha permanece em equilíbrio para qualquer valor de $\theta \geq 70°$, mas escorrega se $\theta < 70°$. Determine o coeficiente de atrito estático entre a prancha e o chão.

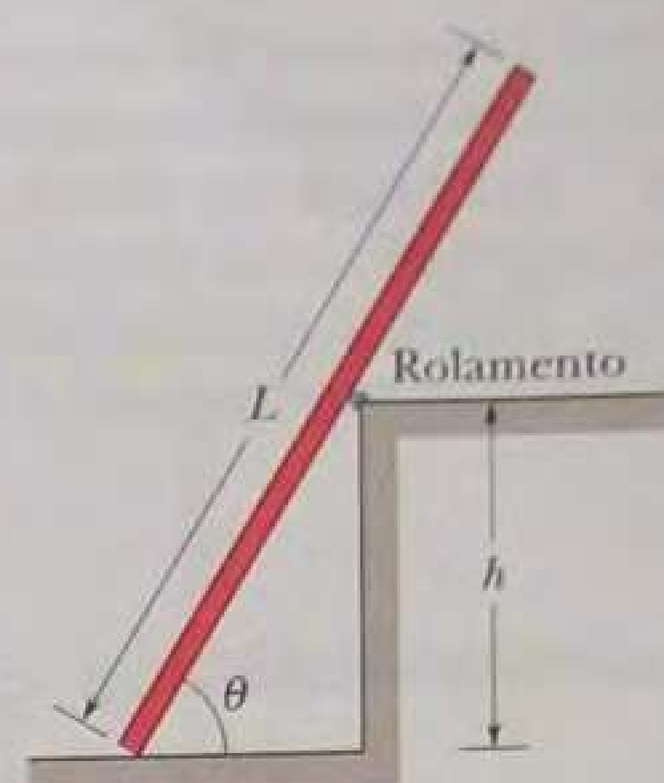


Figura 12-49 Problema 37.

••**38** Na Fig. 12-50, vigas homogêneas A e B estão presas a uma parede por dobradiças e frouxamente rebitadas uma na outra (uma não exerce torque sobre a outra). A viga A tem um comprimento $L_A = 2{,}40$ m e uma massa de 54,0 kg; a viga B tem uma massa de 68,0 kg. As dobradiças estão separadas por uma distância $d = 1{,}80$ m. Em termos dos vetores unitários, qual é a força (a) sobre a viga A exercida por sua dobradiça, (b) sobre a viga A exercida pelo rebite, (c) sobre a viga B exercida por sua dobradiça e (d) sobre a viga B exercida pelo rebite?

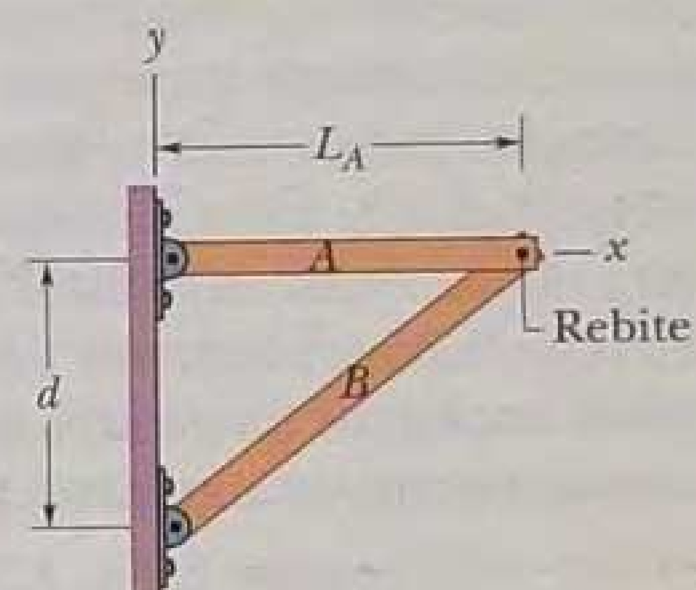


Figura 12-50 Problema 38.

•••**39** Os lados AC e CE da escada da Fig. 12-51 têm 2,44 m de comprimento e estão unidos por uma dobradiça no ponto C. A barra horizontal BD tem 0,762 m de comprimento e está na metade da altura da escada. Um homem pesando 854 N sobe 1,80 m ao longo da escada. Supondo que não há atrito com o chão e desprezando a massa da escada, determine (a) a tensão da barra e o módulo da força que o chão exerce sobre a escada (b) no ponto A e (c) no ponto E. (*Sugestão:* isole partes da escada ao aplicar as condições de equilíbrio.)

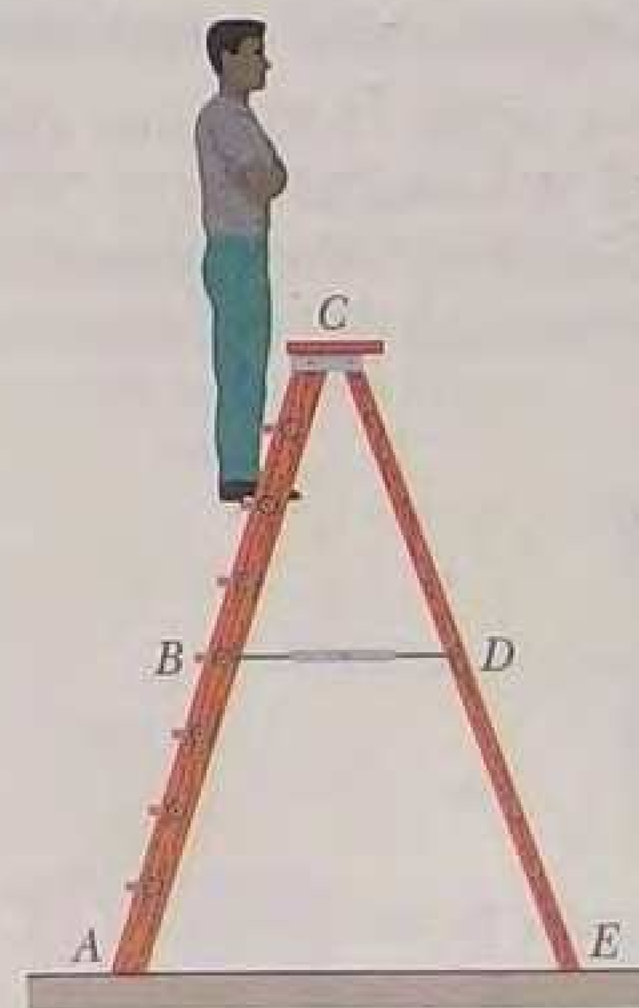


Figura 12-51 Problema 39.

•••**40** A Fig. 12-52a mostra uma viga horizontal homogênea, de massa m_b e comprimento L, que é sustentada à esquerda por uma dobradiça presa a uma parede e à direita por um cabo que faz um ângulo

θ com a horizontal. Um pacote de massa m_p está posicionado sobre a viga a uma distância x da extremidade esquerda. A massa total é $m_b + m_p = 61{,}22$ kg. A Fig. 12-52*b* mostra a tensão T do cabo em função da posição do pacote, dada como uma fração x/L do comprimento da viga. A escala do eixo das tensões é definida por $T_a = 500$ N e $T_b = 700$ N. Calcule (a) o ângulo θ, (b) a massa m_b e (c) a massa m_p.

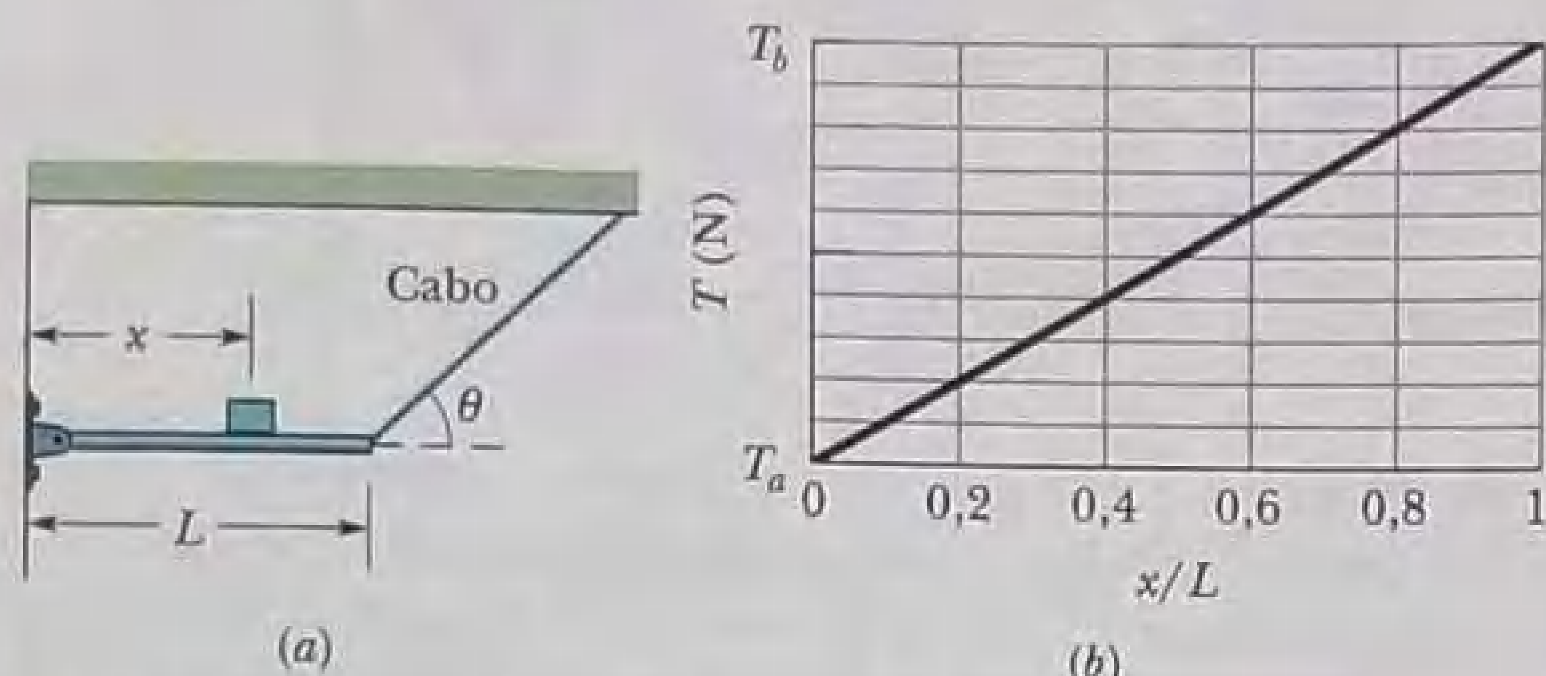


Figura 12-52 Problema 40.

•••41 Um caixote, na forma de um cubo com 1,2 m de lado, contém uma peça de máquina; o centro de massa do caixote e do conteúdo está localizado 0,30 m acima do centro geométrico do caixote. O caixote repousa em uma rampa que faz um ângulo θ com a horizontal. Quando θ aumenta a partir de zero, um valor de ângulo é atingido para o qual o caixote tomba ou desliza pela rampa. Se o coeficiente de atrito estático μ_s entre a rampa e o caixote é 0,60, (a) a rampa tomba ou desliza? (b) Para que ângulo θ isso acontece? Se $\mu_s = 0{,}70$, (c) o caixote tomba ou desliza? (d) Para que ângulo θ isso acontece? (*Sugestão:* qual é o ponto de aplicação da força normal quando o caixote está prestes a tombar?)

•••42 No Exemplo da Fig. 12-5, suponha que o coeficiente de atrito estático μ_s entre a escada e o piso é 0,53. A que distância (como porcentagem do comprimento total da escada) o bombeiro deve subir para que a escada esteja na iminência de escorregar?

Seção 12-7 Elasticidade

•43 Uma barra horizontal de alumínio com 4,8 cm de diâmetro se projeta 5,3 cm para fora de uma parede. Um objeto de 1200 kg está suspenso na extremidade da barra. O módulo de cisalhamento do alumínio é $3{,}0 \times 10^{10}$ N/m². Desprezando a massa da barra, determine (a) a tensão de cisalhamento que age sobre a barra e (b) a deflexão vertical da extremidade da barra.

•44 A Fig. 12-53 mostra a curva tensão–deformação de um material. A escala do eixo das tensões é definida por $s = 300$, em unidades de 10^6 N/m². Determine (a) o módulo de Young e (b) o valor aproximado do limite elástico do material.

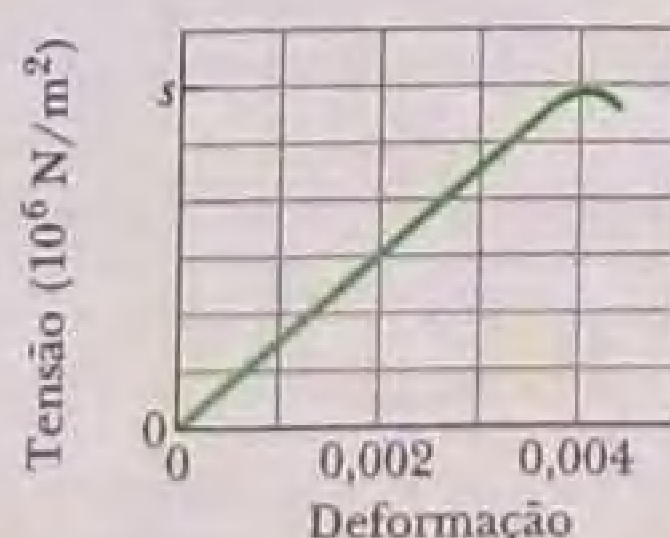


Figura 12-53 Problema 44.

••45 Na Fig. 12-54, um tijolo de chumbo repousa horizontalmente sobre os cilindros A e B. As áreas das faces superiores dos cilindros obedecem à relação $A_A = 2A_B$; os módulos de Young dos cilindros obedecem à relação $E_A = 2E_B$. Os cilindros tinham a mesma altura antes que o tijolo fosse colocado sobre eles. Que fração da massa do tijolo é sustentada (a) pelo cilindro A e (b) pelo cilindro B? As distâncias horizontais entre o centro de massa do tijolo e os eixos dos cilindros são d_A e d_B. (c) Qual é o valor da razão d_A/d_B?

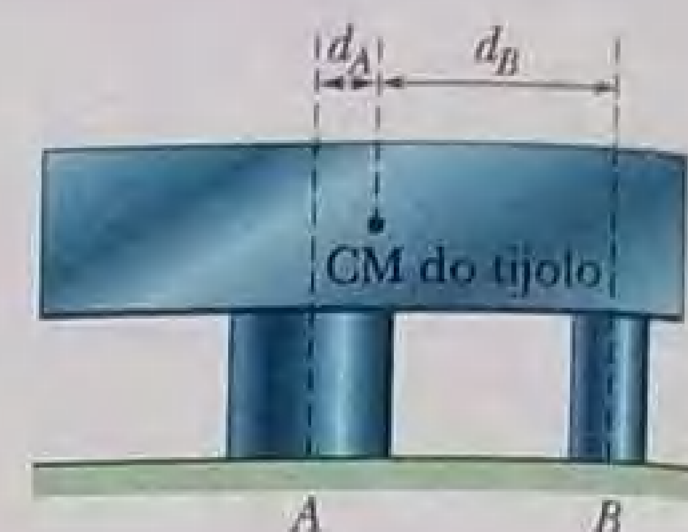


Figura 12-54 Problema 45.

••46 A Fig. 12-55 mostra o gráfico tensão–deformação aproximado de um fio de teia de aranha, até o ponto em que se rompe com uma deformação de 2,00. A escala do eixo das tensões é definida por $a = 0{,}12$ GN/m², $b = 0{,}30$ GN/m² e $c = 0{,}80$ GN/m². Suponha que o fio tem um comprimento inicial de 0,80 cm, uma área da seção reta inicial de $8{,}0 \times 10^{-12}$ m² e um volume constante durante o alongamento. Suponha também que quando um inseto se choca com o fio, toda a energia cinética do inseto é usada para alongar o fio. (a) Qual é a energia cinética que coloca o fio na iminência de se romper? Qual é a energia cinética (b) de uma drosófila com uma massa de 6,00 mg voando a 1,70 m/s e (c) uma abelha com uma massa de 0,388 g voando a 0,420 m/s? O fio seria rompido (d) pela drosófila e (e) pela abelha?

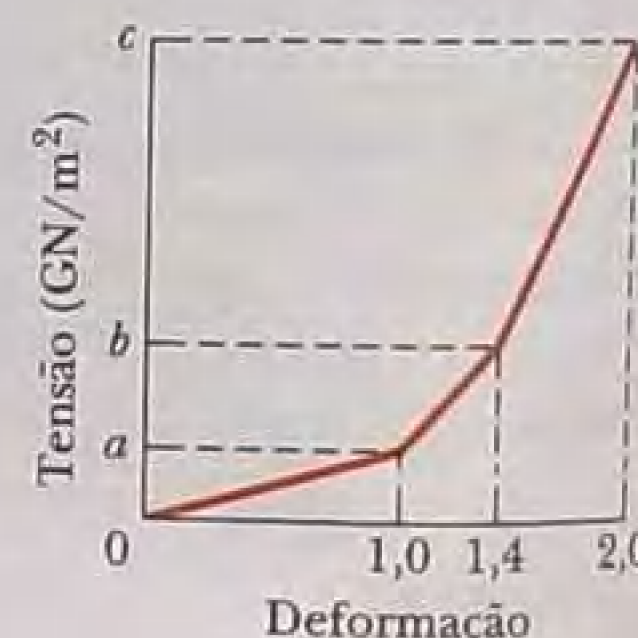


Figura 12-55 Problema 46.

••47 Um túnel de comprimento $L = 150$ m, altura $H = 7{,}2$ m, largura de 5,8 m e teto plano deve ser construído a uma distância $d = 60$ m da superfície. (Veja a Fig. 12-56.) O teto do túnel deve ser sustentado inteiramente por colunas quadradas de aço com uma seção reta de 960 cm². A massa de 1,0 cm³ de solo é 2,8 g. (a) Qual é o peso total que as colunas do túnel devem sustentar? (b) Quantas colunas são necessárias para manter a tensão compressiva em cada coluna na metade do limite de ruptura?

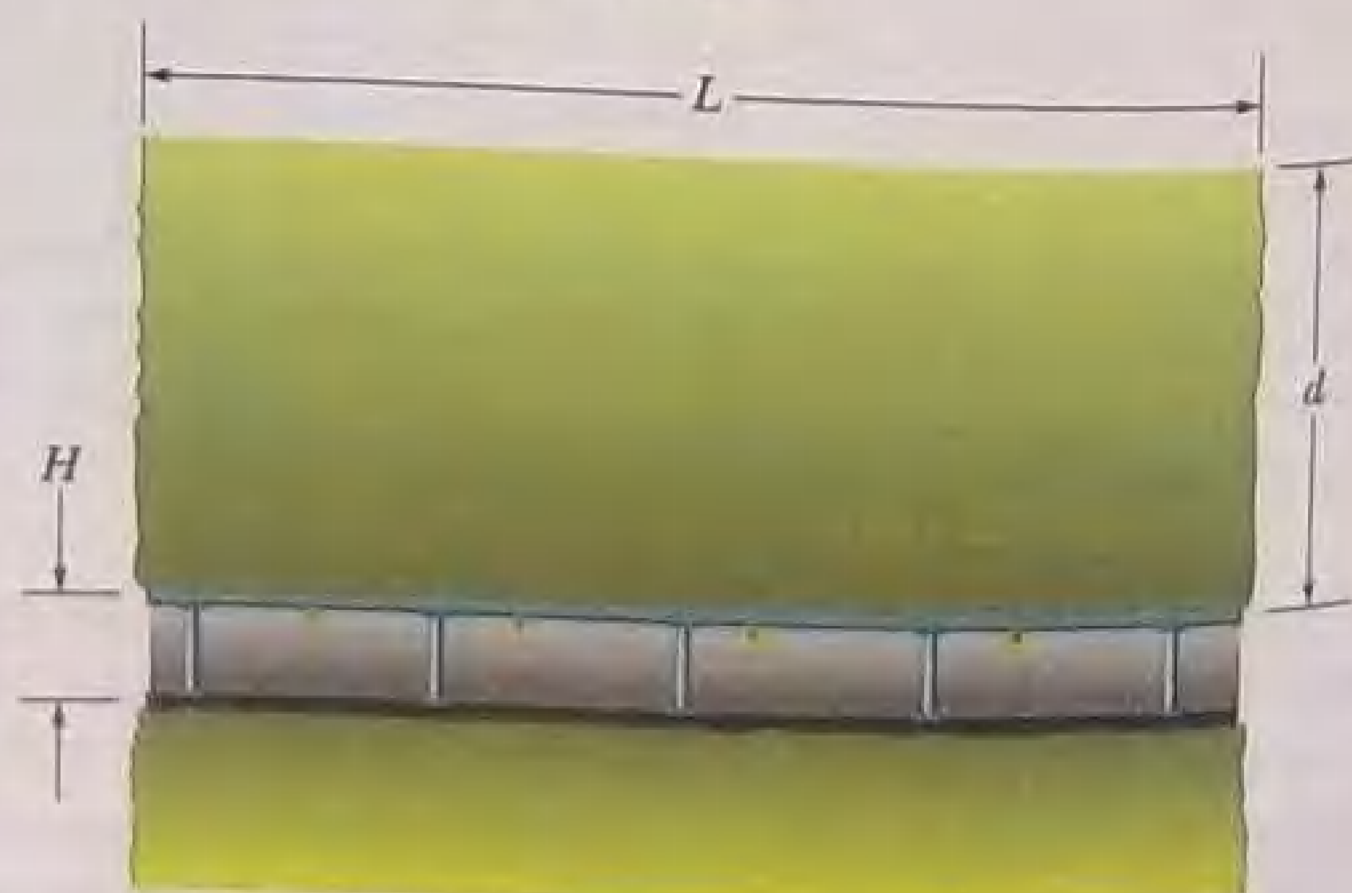


Figura 12-56 Problema 47.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
- BIBLIOTECA CENTRAL

••48 A Figura 12-57 mostra a curva tensão–deformação de um fio de alumínio que está sendo ensaiado em uma máquina que puxa as duas extremidades do fio em sentidos opostos. A escala do eixo das tensões é definida por $s = 7{,}0$, em unidades de 10^7 N/m². O fio tem um comprimento inicial de 0,800 m e a área da seção reta inicial é $2{,}00 \times 10^{-6}$ m². Qual é o trabalho realizado pela força que a máquina de ensaios exerce sobre o fio para produzir uma deformação de $1{,}00 \times 10^{-3}$?

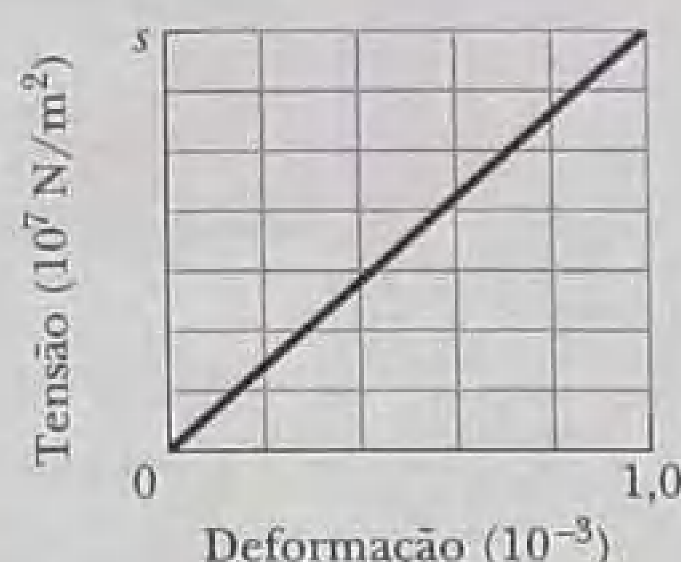


Figura 12-57 Problema 48.

••49 Na Fig. 12-58, um tronco homogêneo de 103 kg está pendurado por dois fios de aço, A e B, ambos com 1,20 mm de raio. Inicialmente, o fio A tinha 2,50 m de comprimento e era 2,00 mm mais curto do que o fio B. O tronco agora está na horizontal. Qual é o módulo da força exercida sobre o tronco (a) pelo fio A e (b) pelo fio B? (c) Qual é o valor da razão d_A/d_B?

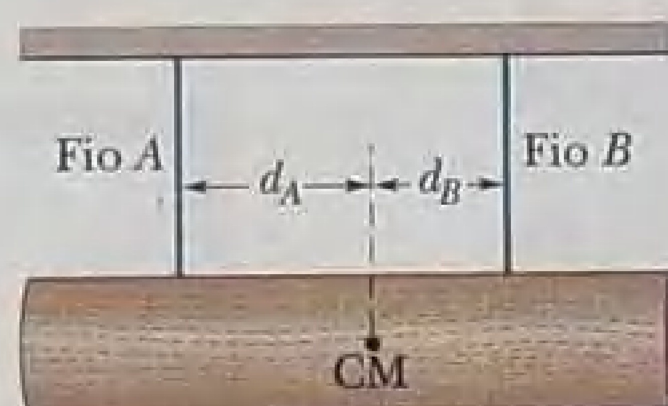


Figura 12-58 Problema 49.

•••50 A Fig. 12-59 mostra um inseto capturado no ponto médio do fio de uma teia de aranha. O fio se rompe ao ser submetido a uma tensão de $8{,}20 \times 10^8$ N/m² e a deformação correspondente é 2,00. Inicialmente, o fio estava na horizontal e tinha um comprimento de 2,00 cm e uma área da seção reta de $8{,}00 \times 10^{-12}$ m². Quando o fio cedeu ao peso do inseto, o volume permaneceu constante. Se o peso do inseto coloca o fio na iminência de se romper, qual é a massa do inseto? (Uma teia de aranha é construída para se romper se um inseto potencialmente perigoso, como uma abelha, fica preso na teia.)



Figura 12-59 Problema 50.

•••51 A Fig. 12-60 é uma vista superior de uma barra rígida que gira em torno de um eixo vertical até que dois calços de borracha exatamente iguais, A e B, situados a $r_A = 7{,}0$ cm e $r_B = 4{,}0$ cm de distância do eixo sejam empurrados contra paredes rígidas. Inicialmente, os calços tocam as paredes sem sofrer compressão. Em seguida, uma força $\vec{F}$ de módulo 220 N é aplicada perpendicularmente à barra a uma distância $R = 5{,}0$ cm do eixo. Determine o módulo da força que comprime (a) o calço A e (b) o calço B.

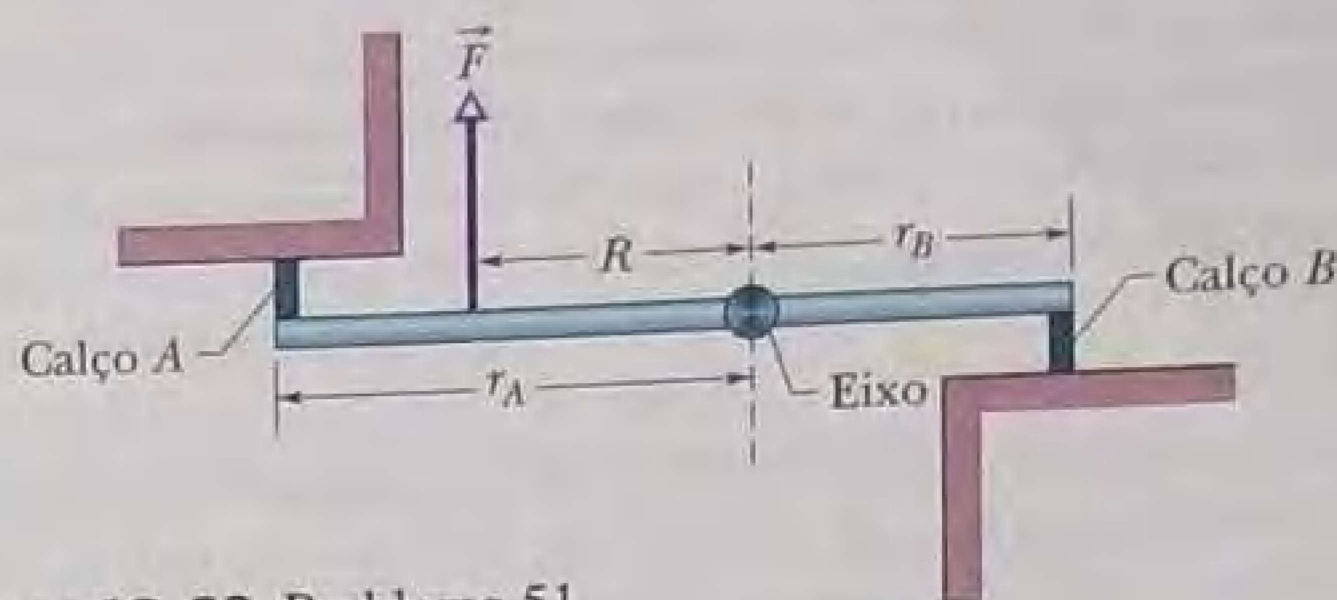


Figura 12-60 Problema 51.

Problemas Adicionais

52 Depois de uma queda, um alpinista de 95 kg está pendurado na extremidade de uma corda originalmente com 15 m de comprimento e 9,6 mm de diâmetro, que foi esticada de 2,8 cm. Determine (a) a tensão, (b) a deformação e (c) o módulo de Young da corda.

53 Na Fig. 12-61, uma placa retangular de ardósia repousa em uma superfície rochosa com uma inclinação $\theta = 26°$. A placa tem um comprimento $L = 43$ m, uma espessura $T = 2{,}5$ m, uma largura $W = 12$ m e 1,0 cm³ da placa tem uma massa de 3,2 g. O coeficiente de atrito estático entre a placa e a rocha é 0,39. (a) Calcule a componente da força gravitacional que age sobre a placa paralelamente à superfície da rocha. (b) Calcule o módulo da força de atrito estático que a rocha exerce sobre a placa. Comparando (a) e (b), você pode ver que a placa corre o risco de escorregar. Isso é evitado apenas pela presença de protuberâncias na rocha. (c) Para estabilizar a placa, pinos devem ser instalados perpendicularmente à superfície da rocha (dois desses pinos são mostrados na figura). Se cada pino tem uma seção reta de 6,4 cm² e se rompe ao ser submetido a uma tensão de cisalhamento de $3{,}6 \times 10^8$ N/m², qual é o número mínimo de pinos necessário? Suponha que os pinos não alteram a força normal.

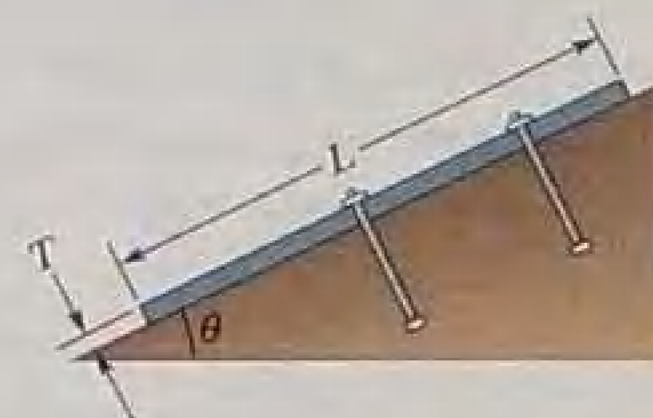


Figura 12-61 Problema 53.

54 Uma escada homogênea com 5,0 m de comprimento e 400 N de peso está apoiada em uma parede vertical sem atrito. O coeficiente de atrito estático entre o chão e o pé da escada é 0,46. Qual é a maior distância a que o pé da escada pode estar da base da parede sem que a escada escorregue?

55 Na Fig. 12-62, o bloco A, com uma massa de 10 kg, está em repouso, mas escorregaria se o bloco B, que tem uma massa de 5,0 kg, fosse mais pesado. Se $\theta = 30°$, qual é o coeficiente de atrito estático entre o bloco A e a superfície na qual está apoiado?

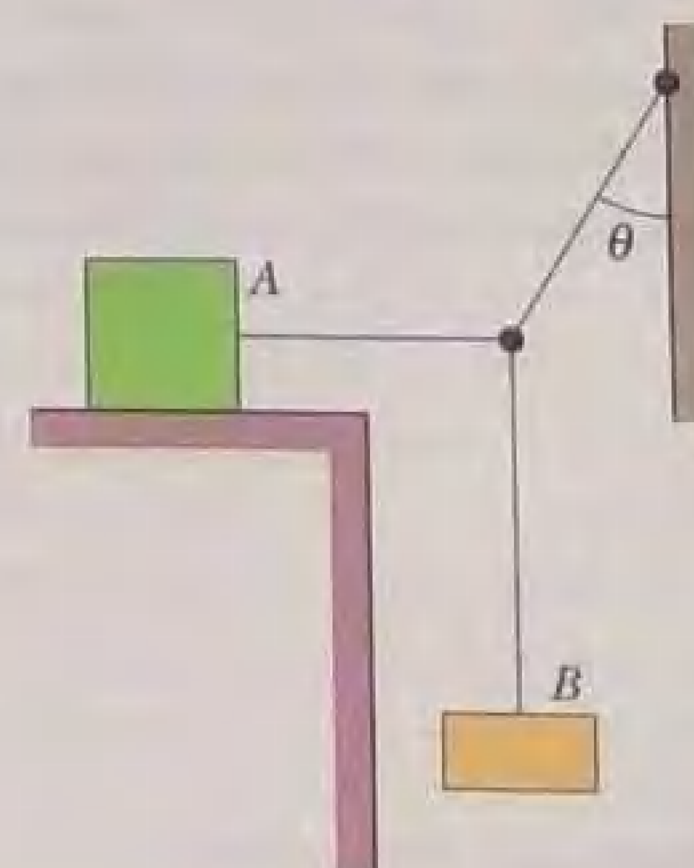


Figura 12-62 Problema 55.

56 A Fig. 12-63*a* mostra uma rampa homogênea entre dois edifícios que leva em conta a possibilidade de que os edifícios oscilem ao serem submetidos a ventos fortes. Na extremidade esquerda, está presa por uma dobradiça na parede de um dos edifícios; na extremidade direita, tem um rolamento que permite o movimento ao longo da parede do outro edifício. A força que o edifício exerce sobre o rolamento não possui componente vertical, mas apenas uma força horizontal de módulo F_h. A distância horizontal entre os edifícios é $D = 4{,}00$ m. O desnível entre as extremidades da rampa é $h = 0{,}490$ m. Um homem caminha ao longo da rampa a partir da extremidade esquerda. A Fig. 12-63*b* mostra F_h em função da distância horizontal x entre o homem e o edifício da esquerda. A escala do eixo de F_h é definida por $a = 20$ kN e $b = 25$ kN. Quais são as massas (a) da rampa e (b) do homem?

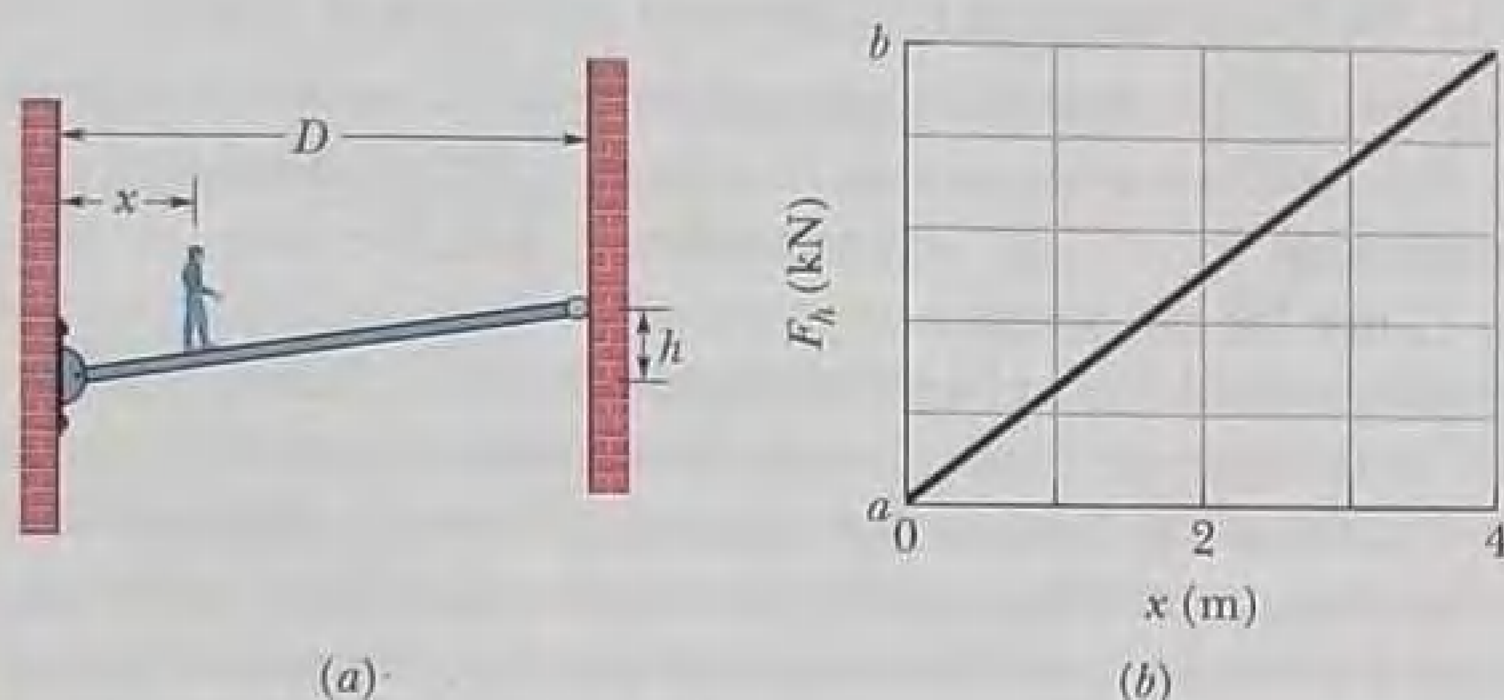


Figura 12-63 Problema 56.

57 Na Fig. 12-64, uma esfera de 10 kg está presa por um cabo sobre um plano inclinado sem atrito que faz um ângulo $\theta = 45°$ com a horizontal. O ângulo ϕ é 25°. Calcule a tensão do cabo.

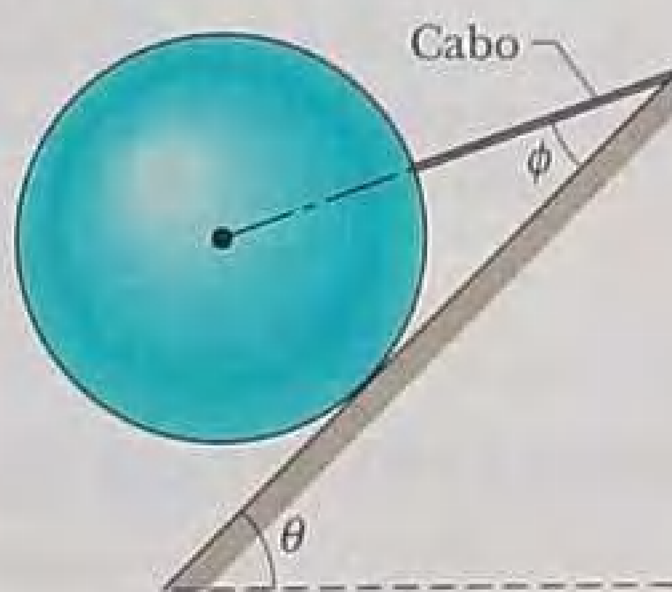


Figura 12-64 Problema 57.

58 Na Fig. 12-65*a*, uma viga homogênea de 40,0 kg repousa simetricamente em dois rolamentos. As distâncias entre as marcas verticais ao longo da viga são iguais. Duas das marcas coincidem com a posição dos rolamentos; um pacote de 10,0 kg é colocado sobre a viga, na posição do rolamento *B*. Qual é o módulo da força exercida sobre a viga (a) pelo rolamento *A* e (b) pelo rolamento *B*? A viga é empurrada para a esquerda até que a extremidade direita esteja acima do rolamento *B* (Fig. 12-65*b*). Qual é o novo módulo da força exercida sobre a viga (c) pelo rolamento *A* e (d) pelo rolamento *B*? A viga é empurrada para a direita. Suponha que tem um comprimento de 0,800 m. (e) Que distância horizontal entre o pacote e o rolamento *B* coloca a viga na iminência de perder contato com o rolamento *A*?

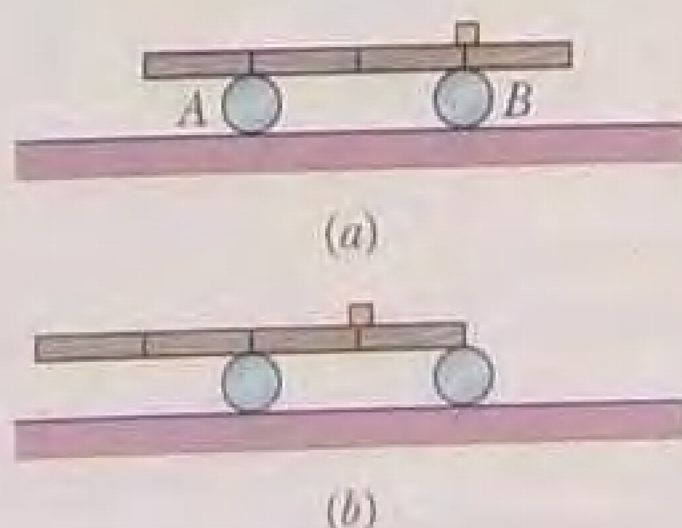


Figura 12-65 Problema 58.

59 Na Fig. 12-66, uma caçamba de 817 kg está suspensa por um cabo *A* que, por sua vez, está preso no ponto *O* a dois outros cabos, *B* e *C*, que fazem ângulos $\theta_1 = 51{,}0°$ e $\theta_2 = 66{,}0°$ com a horizontal. Determine a tensão (a) do cabo *A*, (b) do cabo *B* e (c) do cabo *C*. (*Sugestão:* para não ter que resolver um sistema de duas equações com duas incógnitas, defina os eixos da forma mostrada na figura.)

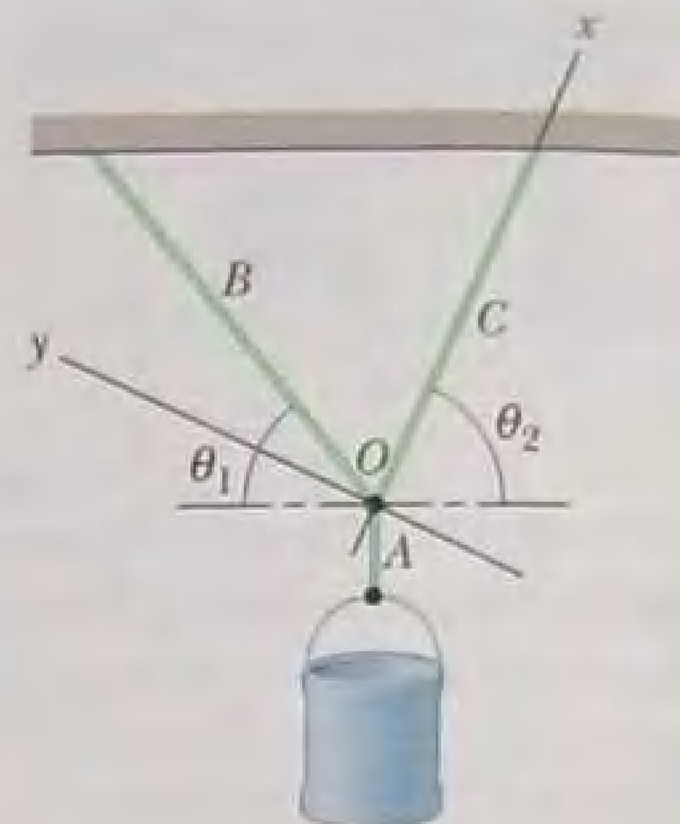


Figura 12-66 Problema 59.

60 Na Fig. 12-67, um pacote de massa *m* está pendurado em uma corda que, por sua vez, está presa à parede através da corda 1 e ao teto através da corda 2. A corda 1 faz um ângulo $\phi = 40°$ com a horizontal; a corda 2 faz um ângulo θ. (a) Para que valor de θ a tensão da corda 2 é mínima? (b) Qual é a tensão mínima da corda 2, em múltiplos de *mg*?

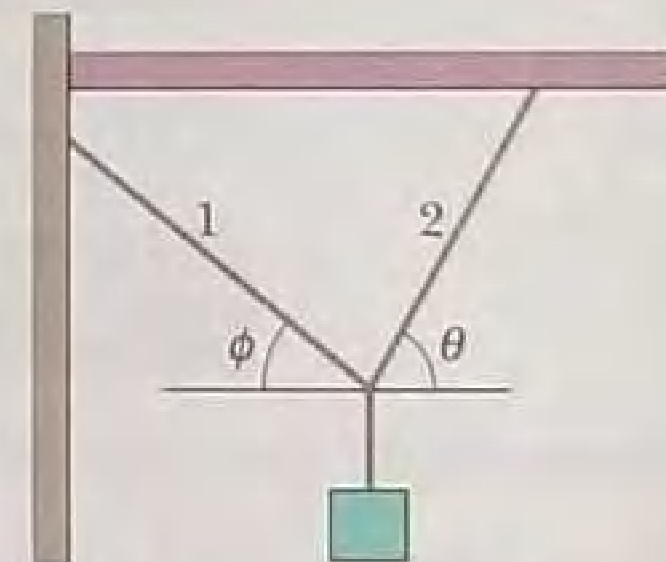


Figura 12-67 Problema 60.

61 A força $\vec{F}$ da Fig. 12-68 mantém o bloco de 6,40 kg e as polias em equilíbrio. As polias têm massa e atrito desprezíveis. Calcule a tensão *T* do cabo de cima. (*Sugestão:* quando um cabo dá meia volta em torno de uma polia, como neste problema, o módulo da força que exerce sobre a polia é o dobro da tensão do cabo.)

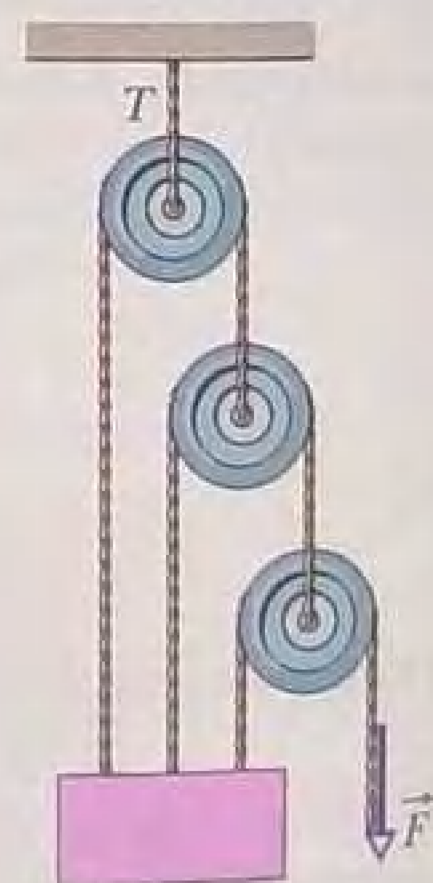


Figura 12-68 Problema 61.

62 Um elevador de mina é sustentado por um único cabo de aço com 2,5 cm de diâmetro. A massa total do elevador e seus ocupantes é 670 kg. De quanto o cabo se alonga quando o elevador está pendurado por (a) 12 m e (b) 362 m de cabo? (Despreze a massa do cabo.)

63 Quatro tijolos de comprimento L, iguais e homogêneos, são empilhados (Fig. 12-69) de tal forma que parte de cada um se estende além da superfície na qual está apoiado. Determine, em função de L, o valor máximo de (a) a_1, (b) a_2, (c) a_3, (d) a_4 e (e) h para que a pilha fique em equilíbrio.

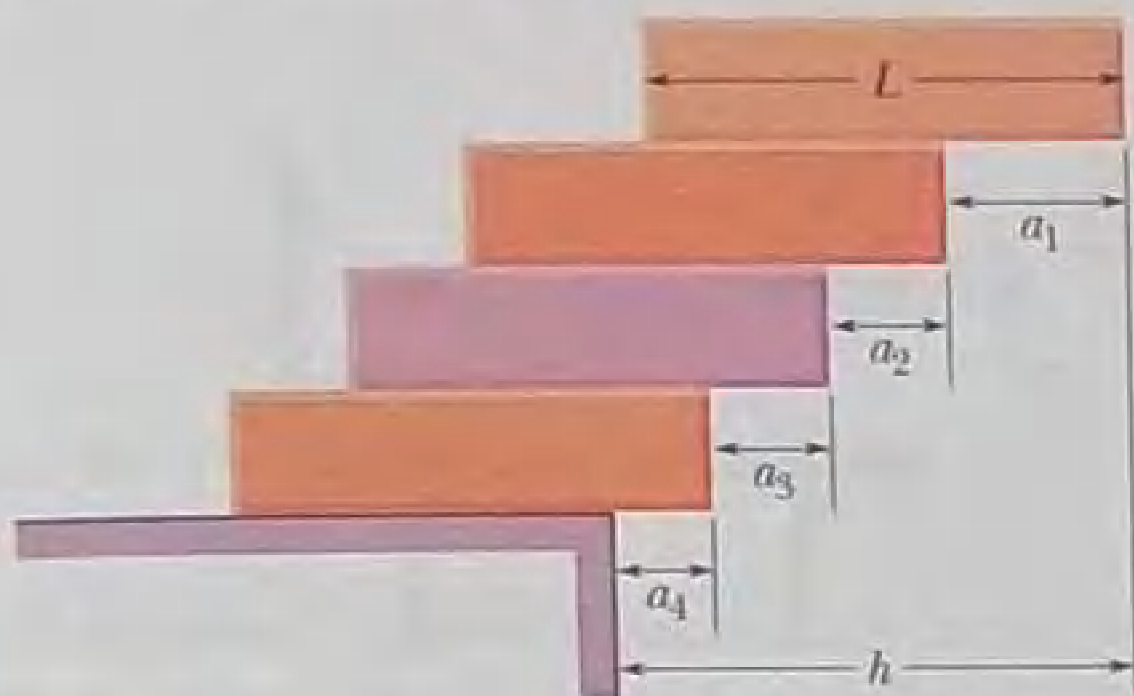


Figura 12-69 Problema 63.

64 Na Fig. 12-70, duas esferas iguais, homogêneas e sem atrito, de massa m, repousam em um recipiente retangular rígido. A reta que liga os centros das esferas faz 45° com a horizontal. Determine o módulo da força exercida sobre as esferas (a) pelo fundo do recipiente, (b) pela parede lateral esquerda do recipiente, (c) pela parede lateral direita do recipiente e (d) por uma das esferas sobre a outra. (*Sugestão:* a força de uma esfera sobre a outra tem a direção da reta que liga os centros das esferas.)

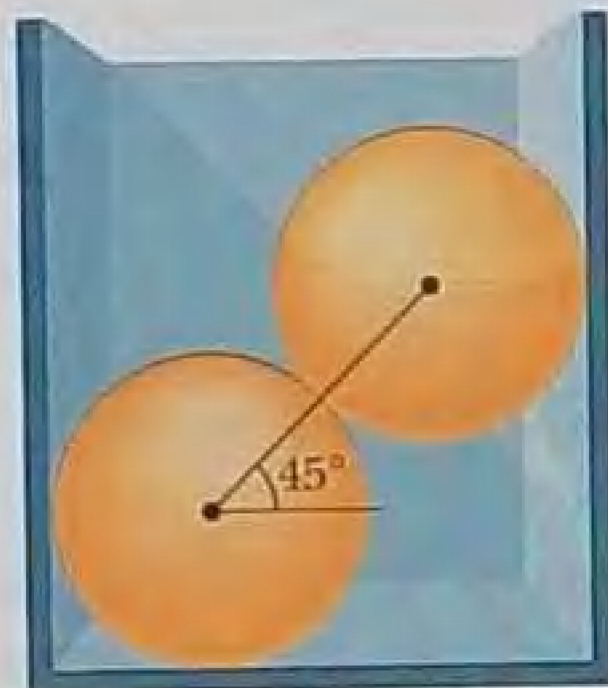


Figura 12-70 Problema 64.

65 Na Fig. 12-71, uma viga homogênea com 60 N de peso e 3,2 m de comprimento está presa a uma dobradiça na extremidade inferior e uma força horizontal $\vec{F}$ de módulo 50 N age sobre a extremidade superior. A viga é mantida na posição vertical por um cabo que faz um ângulo $\theta = 25°$ com o chão e está preso à viga a uma distância $h = 2,0$ m do chão. Quais são (a) a tensão do cabo e (b) a força exercida pela dobradiça sobre a viga, em termos dos vetores unitários?

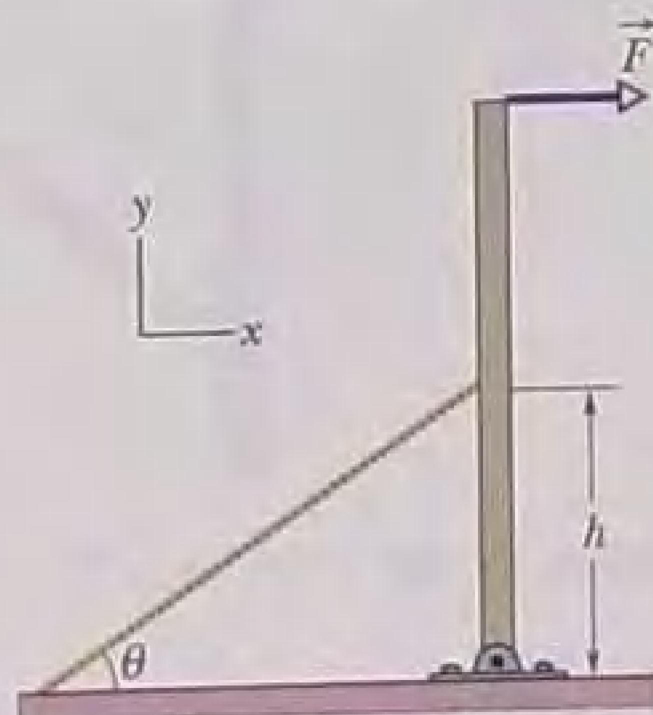


Figura 12-71 Problema 65.

66 Uma viga homogênea tem 5,0 m de comprimento e uma massa de 53 kg. Na Fig. 12-72, a viga está sustentada na posição horizontal por uma dobradiça e um cabo; $\theta = 60°$. Em termos dos vetores unitários, qual é a força que a dobradiça exerce sobre a viga?

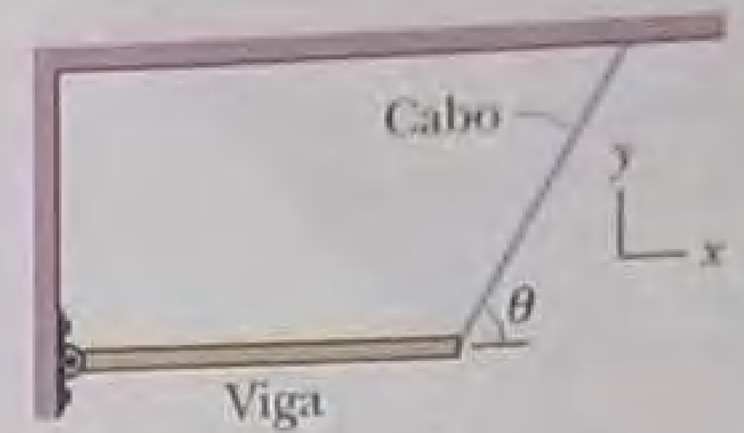


Figura 12-72 Problema 66.

67 Um cubo de cobre maciço tem 85,5 cm de lado. Qual é a tensão que deve ser aplicada ao cubo para reduzir o lado para 85,0 cm? O módulo de elasticidade volumétrico do cobre é $1,4 \times 10^{11}$ N/m^2.

68 Um operário tenta levantar uma viga homogênea do chão até a posição vertical. A viga tem 2,50 m de comprimento e pesa 500 N. Em um certo instante, o operário mantém a viga momentaneamente em repouso com a extremidade superior a uma distância $d = 1,50$ m do chão, como mostra a Fig. 12-73, exercendo uma força $\vec{P}$ perpendicular à viga. (a) Qual é o módulo P da força? (b) Qual é o módulo da força (resultante) que o piso exerce sobre a viga? (c) Qual é o valor mínimo do coeficiente de atrito estático entre a viga e o chão para que a viga não escorregue nesse instante?

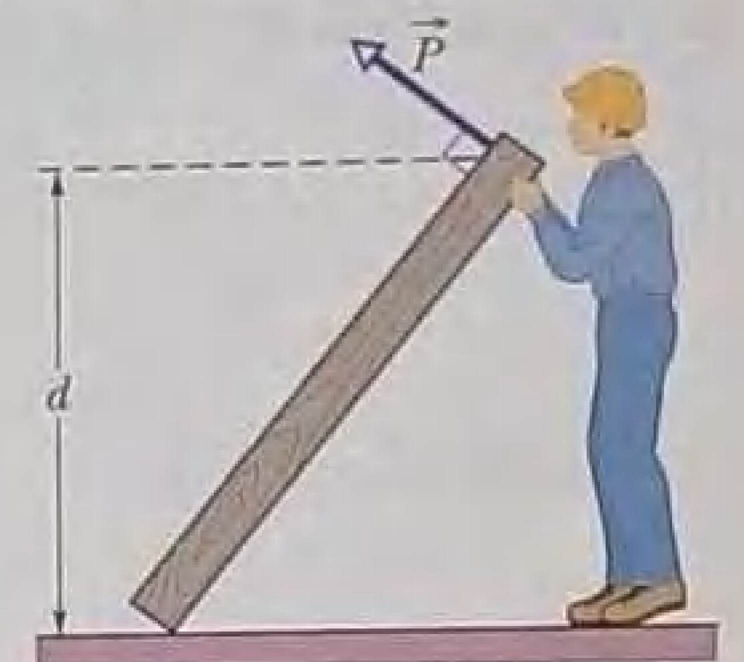


Figura 12-73 Problema 68.

69 Na Fig. 12-74, uma viga homogênea de massa m está presa a uma parede por uma dobradiça na extremidade inferior, enquanto a extremidade superior é sustentada por uma corda presa na parede. Se $\theta_1 = 60°$, que valor deve ter o ângulo θ_2 para que a tensão da corda seja $mg/2$?



Figura 12-74 Problema 69.

70 Um homem de 73 kg está em pé em uma ponte horizontal de comprimento L, a uma distância $L/4$ de uma das extremidades. A ponte é homogênea e pesa 2,7 kN. Qual é o módulo da força vertical exercida sobre a ponte pelos suportes (a) na extremidade mais afastada do homem e (b) na extremidade mais próxima?

71 Um cubo homogêneo de 8,0 cm de lado repousa em um piso horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o cubo e o piso é μ. Uma força horizontal $\vec{P}$ é aplicada perpendicularmente a uma das faces verticais do cubo, 7,0 cm acima do piso, em um ponto da reta vertical que passa pelo centro da face do cubo. O módulo de $\vec{P}$ é gradualmente aumentado. Para que valor de μ o cubo finalmente (a) começa a escorregar e (b) começa a tombar? (*Sugestão:* qual é o ponto de aplicação da força normal quando o cubo está prestes a tombar?)

72 O sistema da Fig. 12-75 está em equilíbrio. Os ângulos são $\theta_1 = 60°$ e $\theta_2 = 20°$ e a bola tem uma massa $M = 2,0$ kg. Qual é a tensão (a) da corda ab e (b) da corda bc?

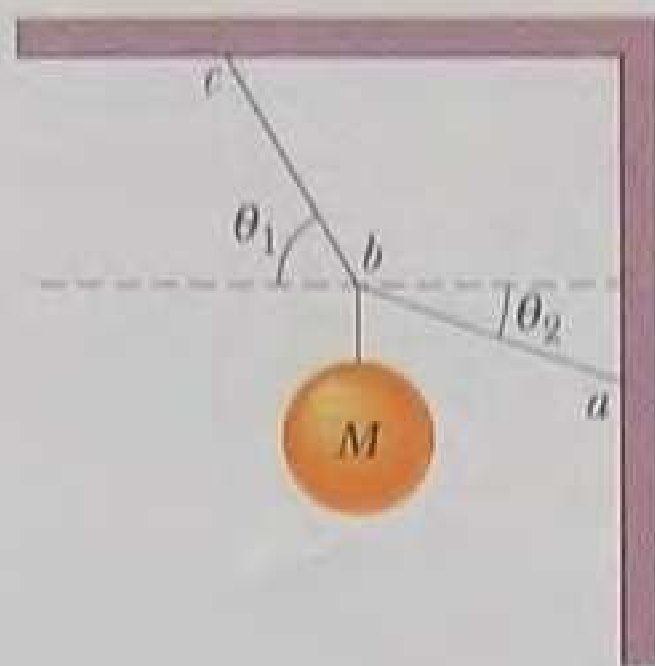


Figura 12-75 Problema 72.

73 Uma escada homogênea tem 10 m de comprimento e pesa 200 N. Na Fig. 12-76, a escada está apoiada em uma parede vertical sem atrito a uma altura $h = 8{,}0$ m acima do piso. Uma força horizontal $\vec{F}$ é aplicada à escada a uma distância $d = 2{,}0$ m da base (medida ao longo da escada). (*a*) Se $F = 50$ N, qual é a força que o piso exerce sobre a escada, em termos dos vetores unitários? (*b*) Se $F = 150$ N, qual é a força que o piso exerce sobre a escada, também em termos dos vetores unitários? (*c*) Suponha que o coeficiente de atrito estático entre a escada e o chão é 0,38; para que valor de F a base da escada está na iminência de se mover em direção à parede?

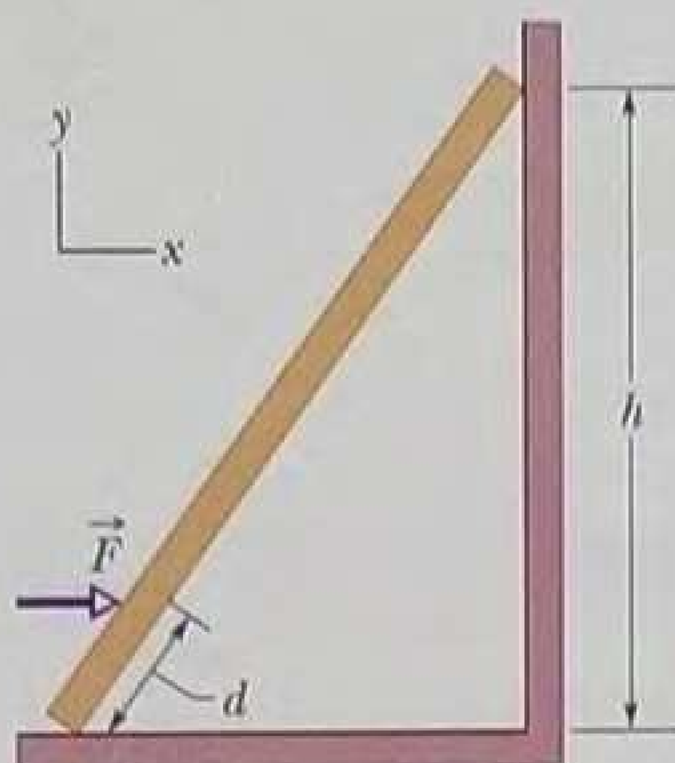


Figura 12-76 Problema 73.

74 Uma balança de pratos consiste em uma barra rígida de massa desprezível e dois pratos pendurados nas extremidades da barra. A barra está apoiada em um ponto que não fica no centro da barra, em torno do qual pode girar livremente. Para que a balança fique em equilíbrio, massas diferentes devem ser colocadas nos dois pratos. Uma massa m desconhecida, colocada no prato da esquerda, é equilibrada por uma massa m_1 no braço da direita; quando a mesma massa m é colocada no prato da direita, é equilibrada por uma massa m_2 no prato da esquerda. Mostre que $m = \sqrt{m_1 m_2}$.

75 A armação quadrada rígida da Fig. 12-77 é formada por quatro barras laterais *AB*, *BC*, *CD* e *DA* e duas barras diagonais *AC* e *BD*, que passam livremente uma pela outra no ponto *E*. Através do esticador *G*, a barra *AB* é submetida a uma tensão trativa, como se as extremidades estivessem submetidas a forças horizontais $\vec{T}$, para fora do quadrado, de módulo 535 N. (a) Quais das outras barras também estão sob tração? Quais são os módulos (b) das forças que causam essas trações e (c) das forças que causam compressão nas outras barras? (*Sugestão:* considerações de simetria podem simplificar bastante o problema.)

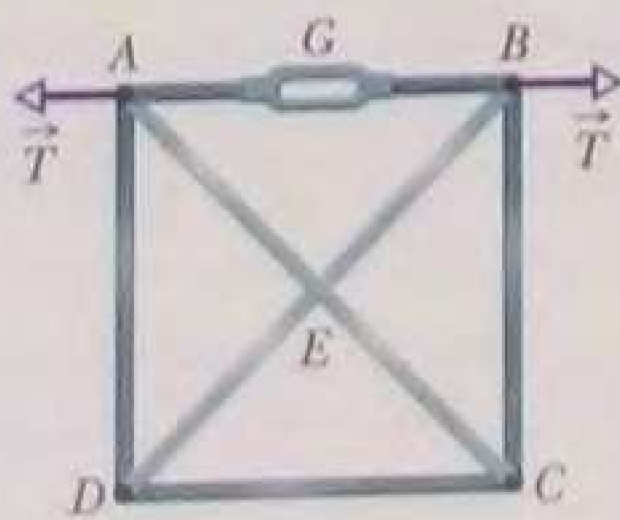


Figura 12-77 Problema 75.

76 Uma ginasta com 46,0 kg de massa está em pé na extremidade de uma trave, como mostra a Fig. 12-78. A trave tem 5,00 m de comprimento e uma massa de 250 kg. Os suportes estão a 0,540 m das extremidades da trave. Em termos dos vetores unitários, qual é a força exercida sobre a trave (a) pelo suporte 1 e (b) pelo suporte 2?

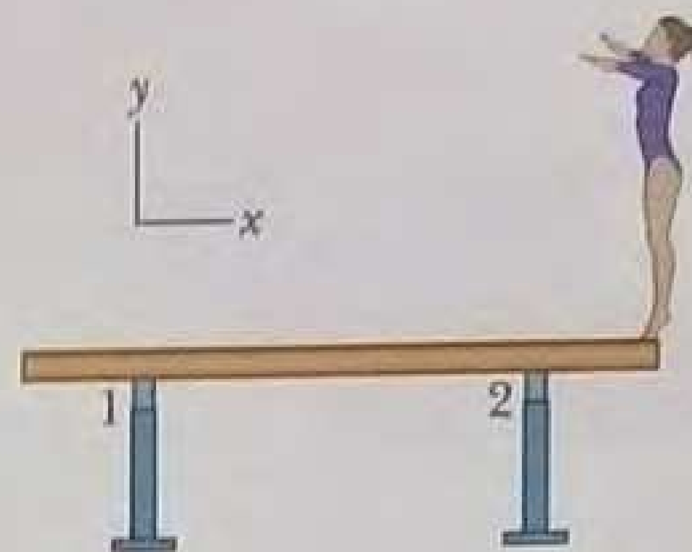


Figura 12-78 Problema 76.

77 A Fig. 12-79 mostra um cilindro horizontal de 300 kg sustentado por três fios de aço presos em um teto. Os fios 1 e 3 estão nas extremidades do cilindro e o fio 2 está no centro. Os fios têm uma seção reta de $2{,}00 \times 10^{-6}$ m². Inicialmente (antes de o cilindro ser pendurado), os fios 1 e 3 tinham 2,0000 m de comprimento e o fio 2 era 6,00 mm mais comprido que os outros dois. Agora (com o cilindro no lugar), os três fios estão esticados. Qual é a tensão (a) no fio 1 e (b) no fio 2?



Figura 12-79 Problema 77.

78 Na Fig. 12-80, uma viga homogênea de 12,0 m de comprimento é sustentada por um cabo horizontal e por uma dobradiça e faz um ângulo $\theta = 50{,}0°$ com a horizontal. A tensão do cabo é 400 N. Em termos dos vetores unitários, qual é (a) a força gravitacional a que a viga está submetida e (b) a força que a dobradiça exerce sobre a viga?

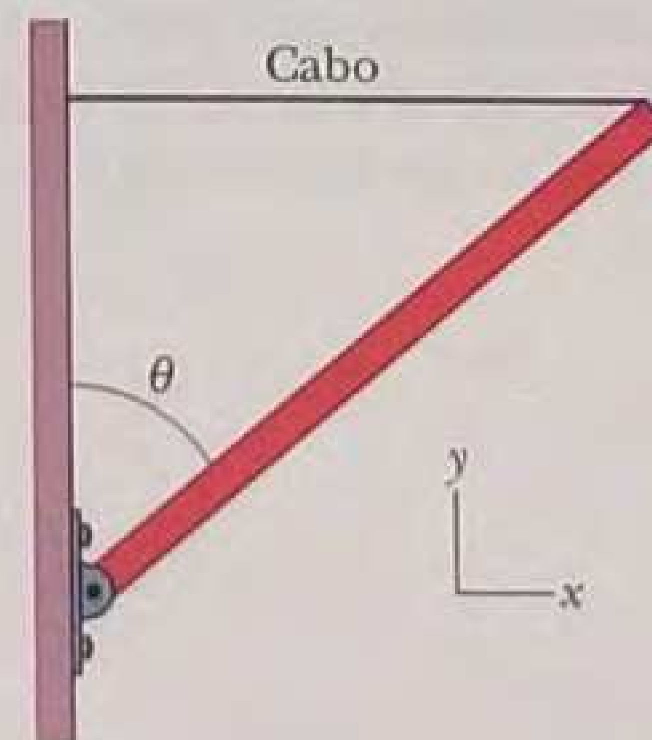


Figura 12-80 Problema 78.

79 Quatro tijolos iguais e homogêneos, de comprimento L, são empilhados de duas formas diferentes em uma mesa, como mostra a Fig. 12-81 (compare com o Problema 63). Estamos interessados em maximizar a distância h nas duas configurações. Determine as distâncias ótimas a_1, a_2, b_1 e b_2 e calcule h para os dois arranjos.

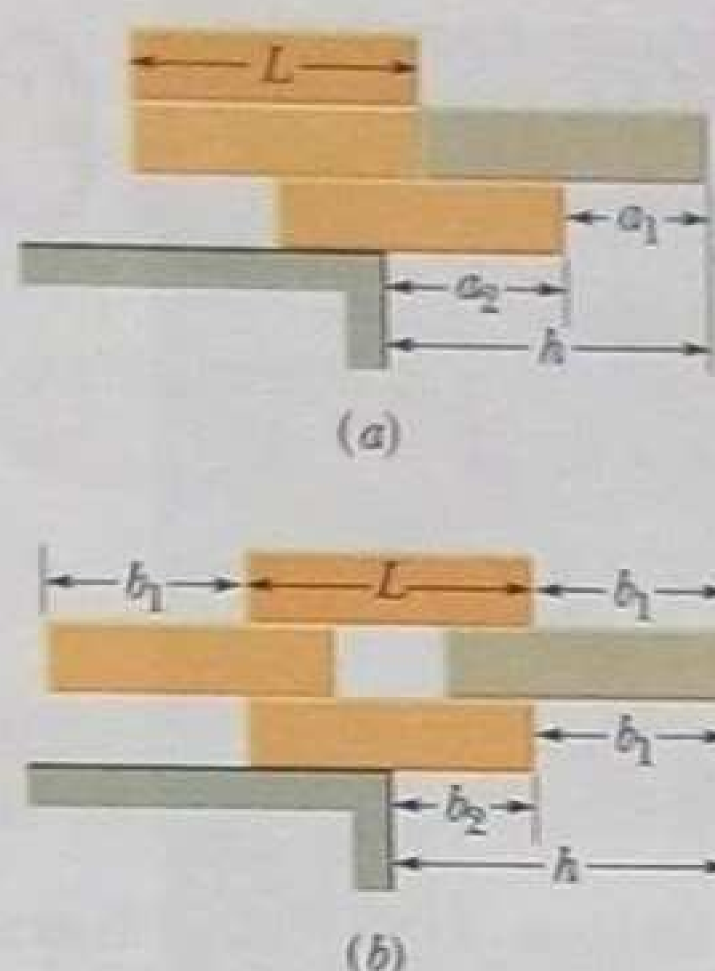


Figura 12-81 Problema 79.

80 Uma barra cilíndrica homogênea, com um comprimento inicial de 0,8000 m e um raio de 1000,0 μm, é fixada em uma extremidade e esticada por uma máquina que puxa a outra extremidade paralelamente à maior dimensão da barra. Supondo que a massa específica (massa por unidade de volume) da barra não varia, determine o módulo da força que a máquina deve aplicar à barra para que o raio da barra diminua para 999,9 mm. (O limite elástico não é ultrapassado.)

81 Uma viga de comprimento L é carregada por três homens, um em uma extremidade e os outros dois apoiando a viga entre eles em uma barra transversal posicionada de tal forma que o peso da viga é dividido igualmente entre os três homens. A que distância da extremidade livre da viga está a barra de apoio? (Despreze a massa da barra de apoio.)

82 Se a viga (quadrada) na Fig. 12-6*a* é feita de pinho, qual deve ser sua espessura para que a tensão compressiva a que está submetida seja $\frac{1}{6}$ do limite de ruptura?

83 A Fig. 12-82 mostra um arranjo estacionário de duas caixas de lápis e três cordas. A caixa A tem uma massa de 11,0 kg e está sobre uma rampa de ângulo $\theta = 30{,}0°$; a caixa B tem uma massa de 7,00 kg e está pendurada. A corda presa à caixa A está paralela à rampa, cujo atrito é desprezível. (a) Qual é a tensão da corda de cima e (b) que ângulo essa corda faz com a horizontal?

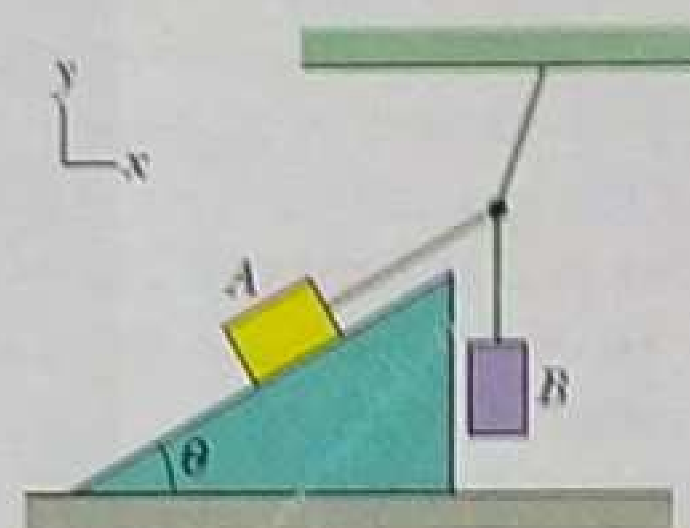


Figura 12-82 Problema 83.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
BIBLIOTECA CENTRAL

CAPÍTULO

13 GRAVITAÇÃO

13-1 O QUE É FÍSICA?

Um dos mais antigos objetivos da física é compreender a força gravitacional, a força que nos mantém na superfície da Terra, que mantém a Lua em órbita em torno da Terra e que mantém a Terra em órbita em torno do Sol. Ela também se estende a toda a Via Láctea, evitando que se dispersem os bilhões e bilhões de estrelas e incontáveis moléculas e partículas isoladas que existem em nossa galáxia. Estamos situados perto da borda desse aglomerado de estrelas em forma de disco, a $2{,}6 \times 10^4$ anos-luz ($2{,}5 \times 10^{20}$ m) do centro da galáxia, em torno do qual giramos lentamente.

A força gravitacional também se estende ao espaço intergaláctico, mantendo unidas as galáxias do Grupo Local, que inclui, além da Via Láctea, a galáxia de Andrômeda (Fig. 13-1), a uma distância de $2{,}3 \times 10^6$ anos-luz da Terra, e várias galáxias anãs mais próximas, como a Grande Nuvem de Magalhães. O Grupo Local faz parte do Superaglomerado Local de galáxias, que está sendo atraído pela força gravitacional para uma região do espaço excepcionalmente densa, conhecida como Grande Atrator. Esta região parece estar a cerca de $3{,}0 \times 10^8$ anos-luz da Terra, do lado oposto da Via Láctea. A força gravitacional se estende ainda mais longe, já que tenta manter unido o universo inteiro, que está se expandindo.

Essa força também é responsável por uma das entidades mais misteriosas do universo, o *buraco negro*. Quando uma estrela consideravelmente maior que o Sol se apaga, a força gravitacional entre suas partículas pode fazer com que a estrela se contraia indefinidamente, formando um buraco negro. A força gravitacional na superfície de uma estrela desse tipo é tão intensa que nem a luz pode escapar (daí o termo "buraco negro"). Qualquer estrela que passe nas proximidades de um buraco negro pode ser despedaçada pela força gravitacional e sugada para o interior do buraco negro. Depois de várias capturas desse tipo, surge um *buraco negro supermaciço*. Monstros misteriosos desse tipo parecem ser comuns no universo.

Embora a força gravitacional ainda não esteja totalmente compreendida, o ponto de partida para nosso entendimento é a *lei da gravitação* de Isaac Newton.

13-2 A Lei da Gravitação de Newton

Os físicos adoram estudar fenômenos aparentemente desconexos e mostrar que, na verdade, existe uma relação entre eles. Esse ideal de unificação vem sendo perseguido há séculos. Em 1665, Isaac Newton, então com 23 anos, prestou uma contribuição fundamental à física ao demonstrar que não existe diferença entre a força que mantém a Lua em órbita e a força responsável pela queda de uma maçã. Hoje em dia, essa ideia é tão familiar que temos dificuldade para compreender a antiga crença de que os movimentos dos corpos terrestres e dos corpos celestes eram diferentes e obedeciam a um conjunto diferente de leis.

Newton chegou à conclusão de que não só a Terra atrai as maçãs e a Lua, mas cada corpo do universo atrai todos os demais; essa tendência dos corpos de se atraírem mutuamente é chamada de **gravitação**. A universalidade da gravitação não é óbvia para nós porque a força de atração que a Terra exerce sobre os corpos próximos é muito maior que a força de atração que os corpos exercem uns sobre os outros. Assim, por exemplo, a Terra atrai uma maçã com uma força da ordem de



Figura 13-1 A galáxia de Andrômeda. Situada a $2{,}3 \times 10^6$ anos-luz da Terra e fracamente visível a olho nu, é muito parecida com a nossa galáxia, a Via Láctea. *(Cortesia da NASA)*

0,8 N. Nós também atraímos uma maçã próxima (e somos atraídos por ela), mas a força de atração é menor que o peso de uma partícula de poeira.

Newton propôs uma *lei* para a força de gravitação, que é chamada de **lei da gravitação de Newton**: toda partícula do universo atrai as outras partículas com uma **força gravitacional** cujo módulo é dado por

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{(Lei da gravitação de Newton).} \tag{13-1}$$

onde m_1 e m_2 são as massas das partículas, r é a distância entre elas e G é uma constante, conhecida como **constante gravitacional**, cujo valor é

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$$
$$= 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg \cdot s^2}. \tag{13-2}$$

Na Fig. 13-2*a*, $\vec{F}$ é a força gravitacional exercida sobre a partícula 1 (de massa m_1) pela partícula 2 (de massa m_2). A força aponta para a partícula 2 e dizemos que é uma *força atrativa* porque tende a aproximar a partícula 1 da partícula 2. O módulo da força é dado pela Eq. 13-1.

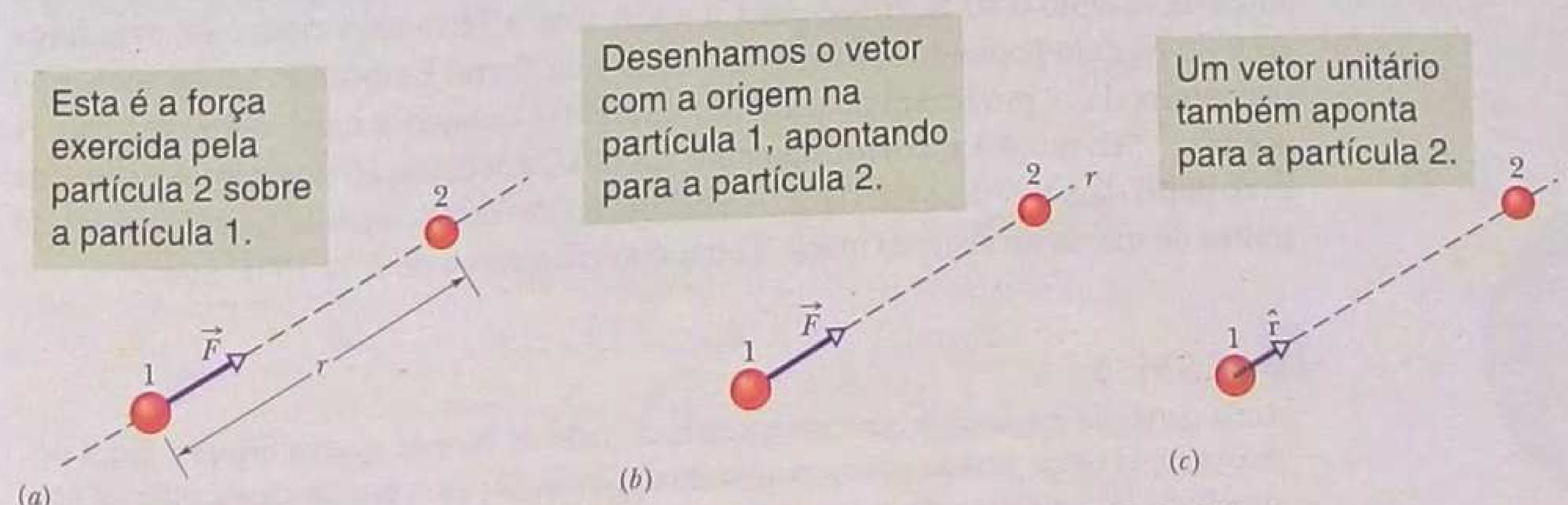


Figura 13-2 (*a*) A força gravitacional $\vec{F}$ que a partícula 2 exerce sobre a partícula 1 é uma força atrativa porque aponta para a partícula 2. (*b*) A força $\vec{F}$ está sobre um eixo radial r que passa pelas duas partículas. (*c*) A força $\vec{F}$ tem o mesmo sentido que o vetor unitário $\hat{r}$ do eixo r.

Podemos dizer que $\vec{F}$ aponta no sentido positivo de um eixo r traçado ao longo da reta que liga a partícula 1 à partícula 2 (Fig. 13-2*b*). Podemos também representar a força $\vec{F}$ usando um vetor unitário $\hat{r}$ (um vetor adimensional de módulo 1) que aponta da partícula 1 para a partícula 2 (Fig. 13-2*c*). Nesse caso, de acordo com a Eq. 13-1, a força que age sobre a partícula 1 é dada por

$$\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}. \tag{13-3}$$

A força gravitacional que a partícula 1 exerce sobre a partícula 2 tem o mesmo módulo que a força que a partícula 2 exerce sobre a partícula 1 e o sentido oposto. As duas forças formam um par de forças da terceira lei e podemos falar da força gravitacional *entre* as duas partículas como tendo um módulo dado pela Eq. 13-1. A força entre duas partículas não é alterada pela presença de outros objetos, mesmo que estejam situados entre as partículas. Em outras palavras, nenhum objeto pode blindar uma das partículas da força gravitacional exercida pela outra partícula.

A intensidade da força gravitacional, ou seja, a intensidade da força com a qual duas partículas de massa conhecida e separadas por uma distância conhecida se atraem, depende do valor da constante gravitacional G. Se G, por algum milagre, fosse de repente multiplicada por 10, seríamos esmagados contra o chão pela atração da Terra. Se G fosse dividida por 10, a atração da Terra se tornaria tão fraca que poderíamos saltar sobre um edifício.

Embora a lei da gravitação de Newton se aplique estritamente apenas a partículas, podemos aplicá-la a objetos reais, desde que os tamanhos desses objetos sejam pequenos em comparação com a distância entre eles. A Lua e a Terra estão suficientemente distantes uma da outra para que, com boa aproximação, possam ser tratadas como partículas. O que dizer, porém, do caso de uma maçã e a Terra? Do ponto de vista da maçã, a Terra extensa e plana, que vai até o horizonte, certamente não se parece com uma partícula.

Newton resolveu o problema da atração entre Terra e a maçã provando um importante teorema, conhecido como *teorema das cascas*:

> Uma casca esférica homogênea de matéria atrai uma partícula que se encontra fora da casca como se toda a massa da casca estivesse concentrada no seu centro.

A Terra pode ser imaginada como um conjunto de cascas, uma dentro da outra, cada uma atraindo uma partícula localizada fora da superfície da Terra como se a massa da casca estivesse no seu centro. Assim, do ponto de vista da maçã, a Terra *se comporta* como uma partícula localizada no centro da Terra, que possui uma massa igual à massa da Terra.

Suponha que, como na Fig. 13-3, a Terra atraia uma maçã para baixo com uma força de módulo 0,80 N. Nesse caso, a maçã atrai a Terra para cima com uma força de 0,80 N, cujo ponto de aplicação é o centro da Terra. Embora as forças tenham o mesmo módulo, produzem acelerações diferentes quando a maçã começa a cair. A aceleração da maçã é aproximadamente 9,8 m/s^2, a aceleração dos corpos em queda livre perto da superfície da Terra. A aceleração da Terra, medida no referencial do centro de massa do sistema maçã–Terra, é apenas cerca de 1×10^{-25} m/s^2.

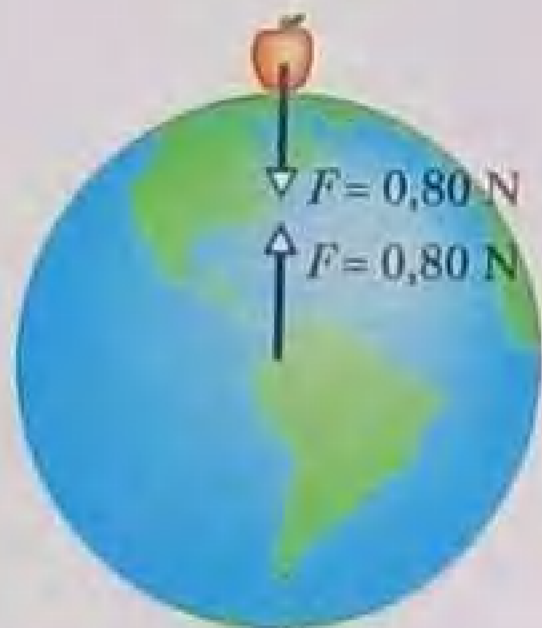


Figura 13-3 A maçã puxa a Terra para cima com a mesma força com a qual a Terra puxa a maçã para baixo.

TESTE 1

Uma partícula é colocada, sucessivamente, do lado de fora de quatro objetos, todos de massa m: (1) uma grande esfera maciça homogênea, (2) uma grande casca esférica homogênea, (3) uma pequena esfera maciça homogênea e (4) uma pequena casca homogênea. Em todos os casos, a distância entre a partícula e o centro do objeto é d. Ordene os objetos de acordo com o módulo da força gravitacional que exercem sobre a partícula, em ordem decrescente.

BIBLIOTECA CENTRAL

13-3 Gravitação e o Princípio da Superposição

Dado um grupo de partículas, podemos determinar a força gravitacional a que uma das partículas está submetida devido à presença das outras usando o **princípio da superposição**. Trata-se de um princípio segundo o qual, em muitas circunstâncias, um efeito total pode calculado somando efeitos parciais. No caso da gravitação, esse princípio pode ser aplicado, o que significa que podemos calcular a força total a que uma partícula está submetida somando vetorialmente as forças que todas as outras partículas exercem sobre ela.

No caso de *n* partículas, a aplicação do princípio da superposição às forças gravitacionais que agem sobre a partícula 1 permite escrever

$$\vec{F}_{1,\text{res}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{15} + \cdots + \vec{F}_{1n}. \tag{13-4}$$

onde $\vec{F}_{1,\text{res}}$ é a força resultante a que está submetida a partícula 1 e, por exemplo, $\vec{F}_{13}$ é a força exercida pela partícula 3 sobre a partícula 1. Podemos expressar a Eq. 13-4 de forma mais compacta através de um somatório:

$$\vec{F}_{1,\text{res}} = \sum_{i=2}^{n} \vec{F}_{1i}. \tag{13-5}$$

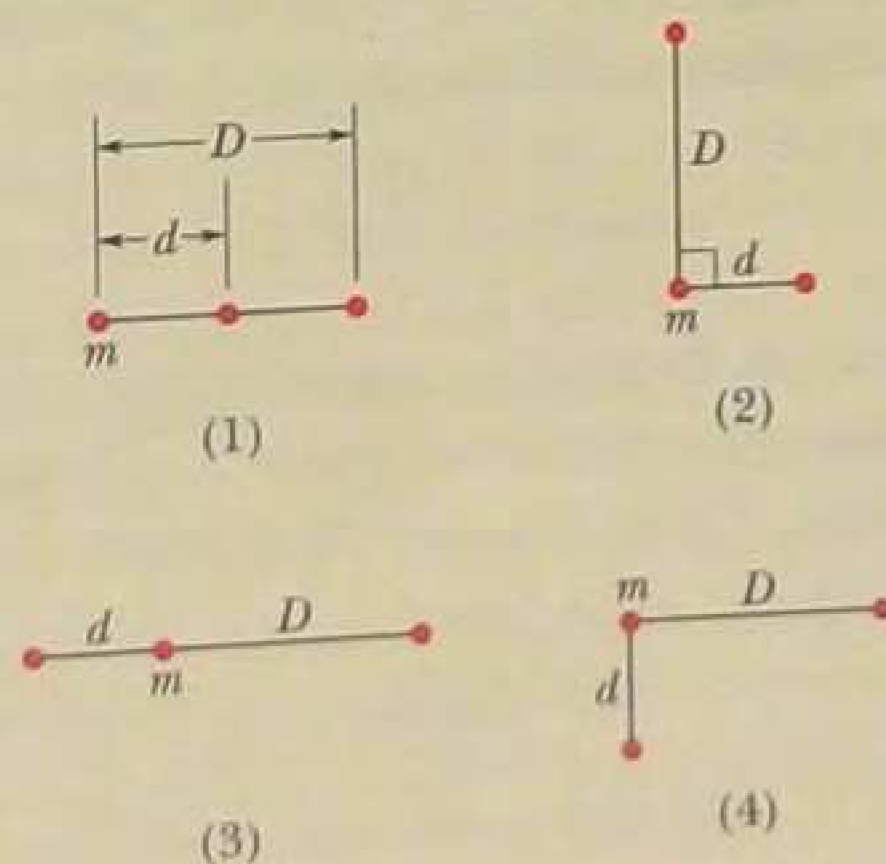
O que dizer da força gravitacional que um objeto real (de dimensões finitas) exerce sobre uma partícula? Essa força pode ser calculada dividindo o objeto em partes suficientemente pequenas para serem tratadas como partículas e usando a Eq. 13-5 para calcular a soma vetorial das forças exercidas pelas partes sobre a partícula. No caso limite, podemos dividir o objeto de dimensões finitas em partes infinitesimais de massa dm, cada uma das quais exercendo uma força infinitesimal $d\vec{F}$ sobre a partícula. Neste limite, o somatório da Eq. 13-5 se torna uma integral e temos

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F}, \tag{13-6}$$

onde a integração é realizada para todo o objeto e omitimos o índice "res". Se o objeto é uma esfera ou uma casca esférica, podemos evitar a integração da Eq. 13-6 supondo que a toda a massa está no centro do objeto e usando a Eq. 13-1.

TESTE 2

A figura mostra quatro arranjos de partículas de mesma massa. (a) Ordene os arranjos de acordo com o módulo da força gravitacional a que está submetida a partícula *m*, começando pelo maior. (b) No arranjo 2, a direção da força resultante está mais próxima da horizontal ou da vertical?



Exemplo

Força gravitacional resultante: três partículas no mesmo plano

A Fig. 13-4*a* mostra um arranjo de três partículas: a partícula 1, de massa $m_1 = 6{,}0$ kg, e as partículas 2 e 3, de massa $m_2 = m_3 = 4{,}0$ kg; $a = 2{,}0$ cm. Qual é a força gravitacional resultante $\vec{F}_{1,res}$ que as outras partículas exercem sobre a partícula 1?

IDEIA-CHAVE

(1) O módulo da força gravitacional que cada uma das outras partículas exerce sobre a partícula 1 é dado pela Eq. 13-1 ($F = Gm_1m_2/r^2$). (2) A direção da força gravitacional é a da reta que liga cada partícula à partícula 1. (3) Como as forças não são colineares, *não podemos* simplesmente somar ou subtrair o módulo das forças para obter a força total, mas devemos usar uma soma vetorial.

Cálculo De acordo com a Eq. 13-1, o módulo da força $\vec{F}_{12}$ que a partícula 2 exerce sobre a partícula 1 é dado por

$$F_{12} = \frac{Gm_1m_2}{a^2} \quad (13\text{-}7)$$

$$= \frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2)(6{,}0\ \text{kg})(4{,}0\ \text{kg})}{(0{,}020\ \text{m})^2}$$

$$= 4{,}00 \times 10^{-6}\ \text{N}.$$

Analogamente, o módulo da força $\vec{F}_{13}$ que a partícula 3 exerce sobre a partícula 1 é dado por

$$F_{13} = \frac{Gm_1m_3}{(2a)^2} \quad (13\text{-}8)$$

$$= \frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2)(6{,}0\ \text{kg})(4{,}0\ \text{kg})}{(0{,}040\ \text{m})^2}$$

$$= 1{,}00 \times 10^{-6}\ \text{N}.$$

A força $\vec{F}_{12}$ aponta no sentido positivo do eixo y (Fig. 13-4*b*) e possui apenas a componente y, F_{12}; a força $\vec{F}_{13}$ aponta no sentido negativo do eixo x e possui apenas a componente x, $-F_{13}$ (Fig. 13-4*c*).

Para determinar a força resultante $\vec{F}_{1,res}$ a que está submetida a partícula 1, devemos calcular a soma vetorial das duas forças (Figs.13.4*d* e *e*). Isso poderia ser feito usando uma calculadora. Acontece, porém, que $-F_{13}$ e F_{12} podem ser vistas como as componentes x e y de $\vec{F}_{1,res}$ e, portanto, podemos usar a Eq. 3-6 para determinar o módulo e a orientação de $\vec{F}_{1,res}$. O módulo é

$$F_{1,res} = \sqrt{(F_{12})^2 + (-F_{13})^2}$$

$$= \sqrt{(4{,}00 \times 10^{-6}\ \text{N})^2 + (-1{,}00 \times 10^{-6}\ \text{N})^2}$$

$$= 4{,}1 \times 10^{-6}\ \text{N}. \quad \text{(Resposta)}$$

A Eq. 3-6 nos dá a orientação de $\vec{F}_{1,res}$ em relação ao semieixo positivo como

$$\theta = \tan^{-1}\frac{F_{12}}{-F_{13}} = \tan^{-1}\frac{4{,}00 \times 10^{-6}\ \text{N}}{-1{,}00 \times 10^{-6}\ \text{N}} = -76°.$$

Este resultado (Fig. 13-4*f*) é razoável? Não, já que a orientação de $\vec{F}_{1,res}$ deve estar entre as orientações de $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{13}$. Como vimos no Capítulo 3, as calculadoras mostram apenas um dos dois valores possíveis da função $\tan^{-1}$. Para obter o outro valor, somamos 180°:

$$-76° + 180° = 104°, \quad \text{(Resposta)}$$

que *é* (Fig. 13-4*g*) uma orientação razoável de $\vec{F}_{1,res}$.

13-4 A Gravitação Perto da Superfície da Terra

Vamos supor que a Terra é uma esfera homogênea de massa M. O módulo da força gravitacional que a Terra exerce sobre uma partícula de massa m, localizada fora da Terra a uma distância r do centro da Terra, é dada pela Eq. 13-1:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}. \quad (13\text{-}9)$$

Se a partícula é liberada, cai em direção ao centro da Terra, em consequência da força gravitacional $\vec{F}$, com uma aceleração que chamaremos de **aceleração da gravidade** $\vec{a}_g$. De acordo com a segunda lei de Newton, os módulos de F e a_g estão relacionados através da equação

$$F = ma_g. \quad (13\text{-}10)$$

Substituindo F na Eq. 13-10 pelo seu valor, dado pela Eq. 13-9, e explicitando a_g, obtemos

$$a_g = \frac{GM}{r^2}. \quad (13\text{-}11)$$

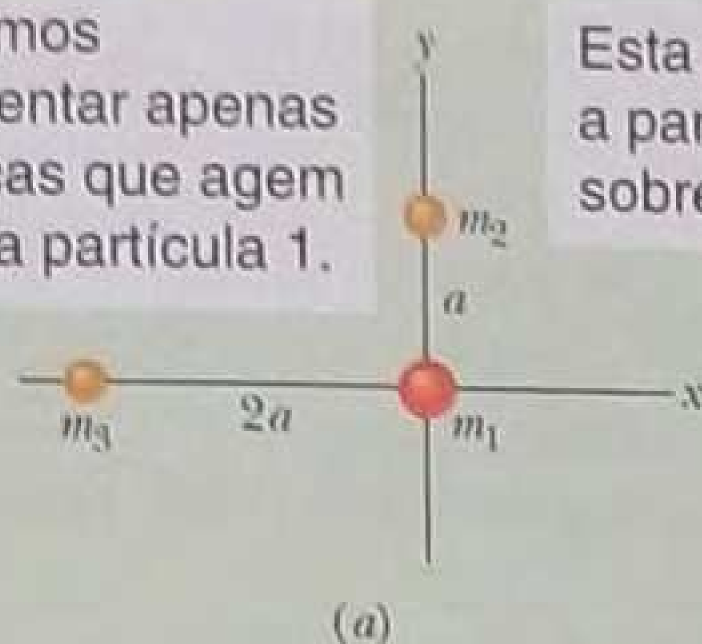
Tabela 13-1

Variação de a_g com a Altitude

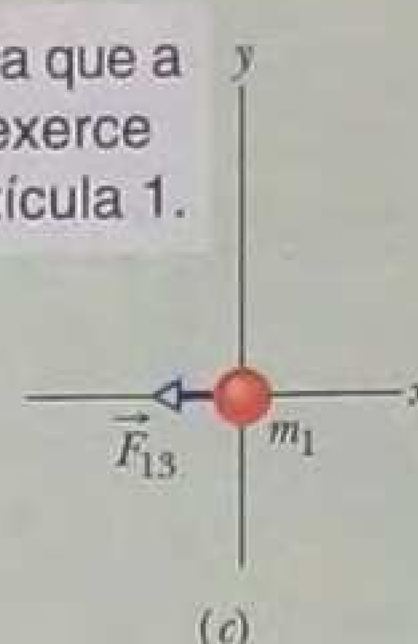
Altitude (km)	a_g (m/s²)	Exemplo de altitude
0	9,83	Superfície média da Terra
8,8	9,80	Monte Everest
36,6	9,71	Recorde para um balão tripulado
400	8,70	Órbita do ônibus espacial
35 700	0,225	Satélite de comunicações

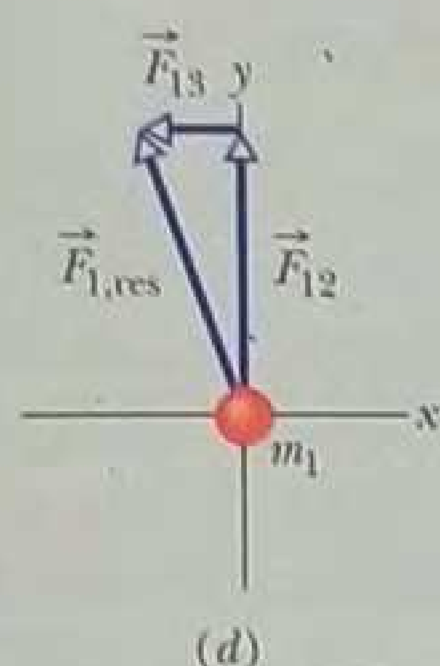
BIBLIOTECA CENTRAL
Nº 450408

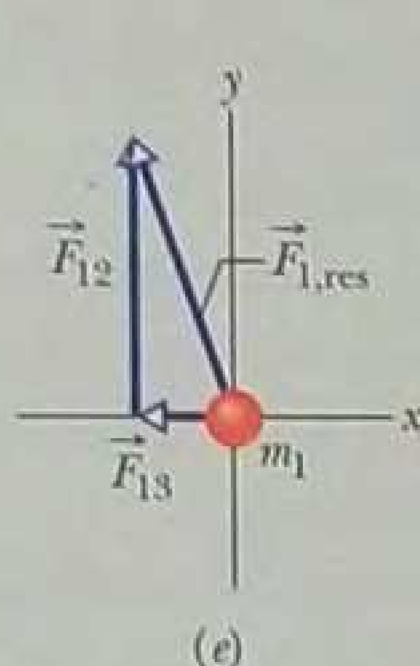


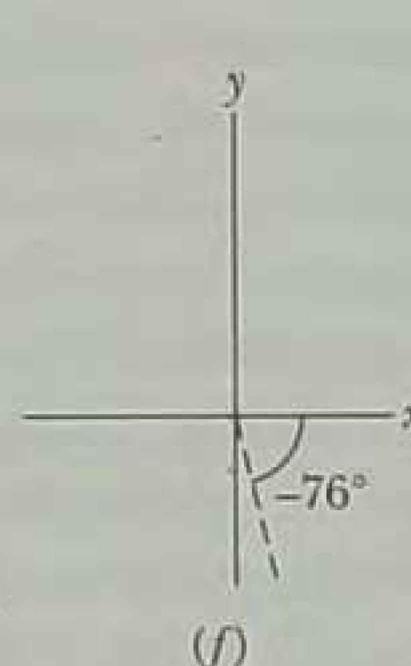












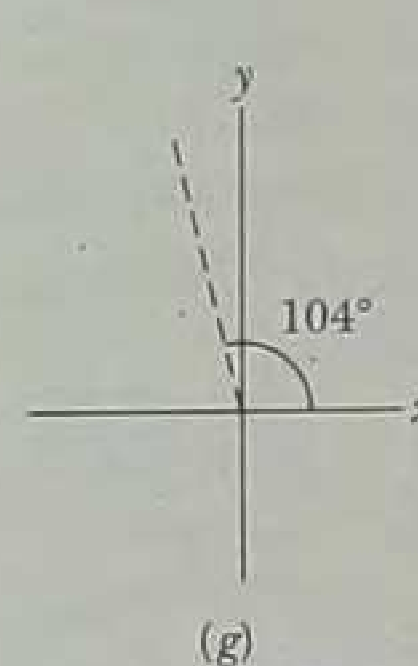


Figura 13-4 (*a*) Um arranjo de três partículas. A força exercida sobre a partícula 1 (*b*) pela partícula 2 e (*c*) pela partícula 3. (*d*) e (*e*) Duas formas diferentes de combinar as duas forças para obter a força resultante. (*f*) Ângulo da força resultante fornecido por uma calculadora. (*g*) Ângulo correto da força resultante.

A Tabela 13-1 mostra os valores de a_g calculados para várias altitudes acima da superfície da Terra. Note que a_g tem um valor relativamente grande mesmo a 400 km de altura.

A partir da Seção 5-4, supusemos que a Terra era um referencial inercial, desprezando o movimento de rotação do nosso planeta. Essa simplificação permitiu supor que a aceleração de queda livre g de uma partícula é igual à aceleração gravitacional da partícula (que agora chamamos de a_g). Além disso, supusemos que g possui o valor de 9,8 m/s² em qualquer lugar sobre a superfície da Terra. Na prática, o valor de g medido em um ponto específico da superfície terrestre é diferente do valor de a_g calculado usando a Eq. 13-11 para o mesmo ponto, por três razões: (1) A massa da Terra não está distribuída uniformemente, (2) a Terra não é uma esfera perfeita e (3) a Terra está girando. Pelas mesmas três razões, o peso mg de uma partícula é diferente do módulo da força gravitacional a que a partícula está submetida, dado pela Eq. 13-9. Vamos agora discutir essas três razões.

1. ***A massa da Terra não está uniformemente distribuída.*** A massa específica (massa por unidade de volume) da Terra varia com a distância do centro, como mostra a Fig. 13-5, e a massa específica da crosta (parte mais próxima da superfície) va-

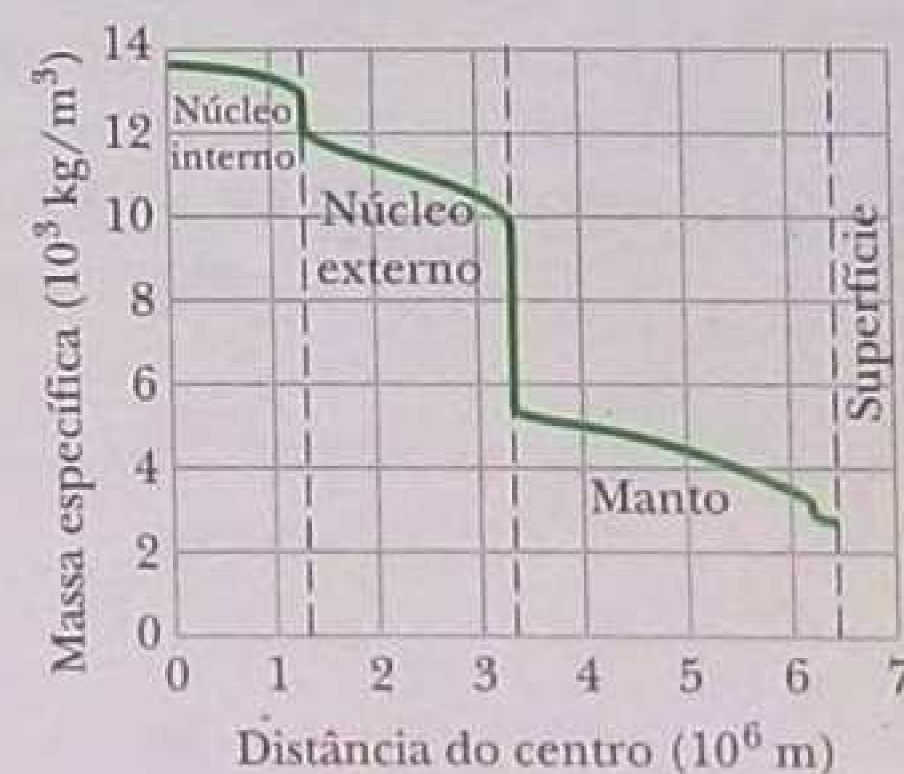
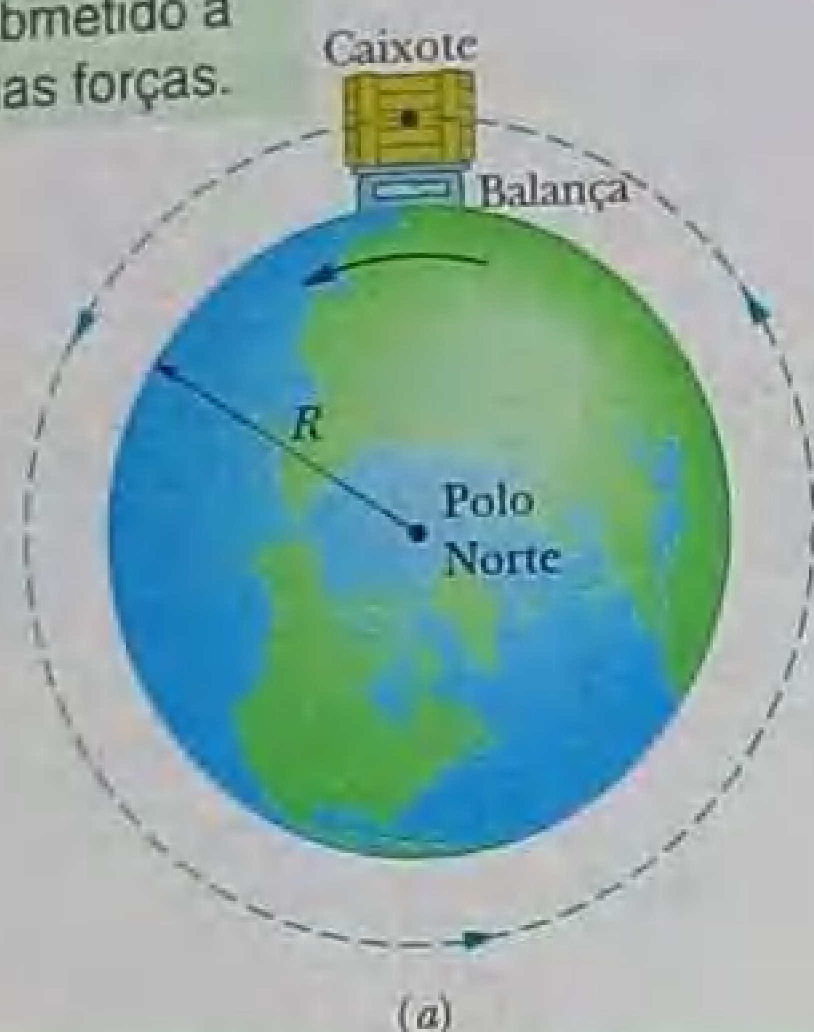


Figura 13-5 Massa específica da Terra em função da distância do centro. Os limites do núcleo sólido interno, do núcleo externo semilíquido e do manto sólido são claramente visíveis, mas a crosta da Terra é fina demais para ser mostrada no gráfico.



(a)

A força normal aponta para cima.

r

$\vec{F}_N$

Caixote

$\vec{a}$

$m\vec{a}_g$

A força gravitacional aponta para baixo.

Como a força resultante aponta para baixo, a aceleração do caixote também é para baixo.

(b)

Figura 13-6 (a) Um caixote sobre uma balança no equador da Terra, visto por um observador posicionado no eixo de rotação da Terra, em algum ponto acima do polo Norte. (b) Diagrama de corpo livre do caixote, com um eixo radial r na direção da reta que liga o caixote ao centro da Terra. A força gravitacional que age sobre o caixote está representada pelo vetor $m\vec{a}_g$. A força normal exercida pela balança sobre o caixote é $\vec{F}_N$. Devido à rotação da Terra, o caixote possui uma aceleração centrípeta $\vec{a}$ dirigida para o centro da Terra.

ria de ponto para ponto da superfície da Terra. Assim, g não é igual em todos os pontos da superfície.

2. ***A Terra não é uma esfera.*** A Terra tem a forma aproximada de um elipsoide; é achatada nos polos e saliente no equador. A diferença entre o raio no equador e o raio nos polos é da ordem de 21 km. Assim, um ponto nos polos está mais próximo do centro da Terra do que um ponto no equador. Essa é uma das razões pelas quais a aceleração de queda livre g ao nível do mar aumenta à medida que nos afastamos do equador em direção a um dos polos.
3. ***A Terra está girando.*** O eixo de rotação passa pelos polos norte e sul da Terra. Um objeto localizado em qualquer lugar da superfície da Terra, exceto os polos, descreve uma circunferência em torno do eixo de rotação e, portanto, possui uma aceleração centrípeta dirigida para o centro da circunferência. Essa aceleração centrípeta é produzida por uma força centrípeta que também está dirigida para o centro.

Para vermos de que forma a rotação da Terra faz com que g seja diferente de a_g, vamos analisar uma situação simples na qual um caixote de massa m está sobre uma balança no equador. A Fig. 13-6a mostra a situação observada de um ponto do espaço acima do polo norte.

A Fig. 13-6b, um diagrama de corpo livre, mostra as duas forças que agem sobre o caixote, ambas orientadas ao longo da reta que liga o centro da Terra ao caixote. A força normal $\vec{F}_N$ exercida pela balança sobre o caixote é dirigida para fora da Terra, no sentido positivo do eixo r. A força gravitacional, representada pela força equivalente $m\vec{a}_g$, é dirigida para dentro da Terra. Como se move em uma circunferência por causa da rotação da Terra, o caixote possui uma aceleração centrípeta $\vec{a}$ dirigida para o centro da Terra. De acordo com a Eq. 10-23 ($a_r = \omega^2 r$), a aceleração centrípeta do caixote é igual a $\omega^2 R$, onde ω é a velocidade angular da Terra e R é o raio da circunferência (aproximadamente o raio da Terra). Assim, podemos escrever a segunda lei de Newton para as forças ao longo do eixo r ($F_{res,r} = ma_r$) na forma

$$F_N - ma_g = m(-\omega^2 R). \tag{13-12}$$

O módulo F_N da força normal é igual ao peso mg indicado pela balança. Substituindo F_N por mg, a Eq. 13-12 se torna

$$mg = ma_g - m(\omega^2 R), \tag{13-13}$$

ou, em palavras,

$$\begin{pmatrix}\text{peso}\\ \text{medido}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{módulo da força}\\ \text{gravitacional}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{massa vezes}\\ \text{aceleração centrípeta}\end{pmatrix}.$$

Assim, a rotação da Terra faz com que o peso medido seja menor que a força gravitacional que age sobre o caixote.

Para obter uma expressão correspondente para g e a_g, cancelamos m na Eq. 13-13, o que nos dá

$$g = a_g - \omega^2 R, \tag{13-14}$$

ou, em palavras,

$$\begin{pmatrix}\text{aceleração de}\\ \text{queda livre}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{aceleração}\\ \text{gravitacional}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{aceleração}\\ \text{centrípeta}\end{pmatrix}.$$

Assim, a rotação da Terra faz com que aceleração de queda livre seja menor que a aceleração gravitacional.

A diferença entre as acelerações g e a_g é igual a $\omega^2 R$ e é máxima no equador, já que o raio R da circunferência descrita pelo caixote é máximo no equador. Para estimar a diferença, podemos usar a Eq. 10-5 ($\omega = \Delta\theta/\Delta t$) e o raio médio da Terra, $R = 6{,}37 \times 10^6$ m. Para uma rotação da Terra, $\theta = 2\pi$ rad e o período Δt é aproximadamente 24 horas. Usando esses valores (e convertendo horas para segundos),

descobrimos que a diferença entre a_g e g é apenas cerca de 0,034 m/s² (um valor muito pequeno em comparação com 9,8 m/s²). Assim, desprezar a diferença entre as acelerações g e a_g constitui, na maioria dos casos, uma aproximação razoável. Da mesma forma, desprezar a diferença entre o peso e o módulo da força gravitacional constitui, na maioria das vezes, uma aproximação razoável.

Exemplo

Diferença entre a aceleração da cabeça e a aceleração dos pés

(a) Uma astronauta cuja altura h é 1,70 m flutua "com os pés para baixo" em um ônibus espacial em órbita a uma distância $r = 6{,}77 \times 10^6$ m do centro da Terra. Qual é a diferença entre a aceleração gravitacional dos pés e a aceleração da cabeça da astronauta?

IDEIA-CHAVE

Podemos aproximar a Terra por uma esfera homogênea de massa M_T. De acordo com a Eq. 13-11, a aceleração gravitacional a qualquer distância r do centro da Terra é

$$a_g = \frac{GM_T}{r^2}. \qquad (13\text{-}15)$$

Poderíamos simplesmente aplicar esta equação duas vezes, primeiro com $r = 6{,}77 \times 10^6$ m para os pés e depois com $r = 6{,}77 \times 10^6 + 1{,}70$ m para a cabeça. Entretanto, como h é muito menor que r, uma calculadora forneceria o mesmo valor para a_g nos dois casos e, portanto, obteríamos uma diferença nula. Outra abordagem é mais produtiva: como a diferença dr entre a distância dos pés e a distância da cabeça da astronauta e o centro da Terra é muito pequena, vamos diferenciar a Eq. 13-15 em relação a r.

Cálculos Diferenciando a Eq. 13-15, obtemos

$$da_g = -2\frac{GM_T}{r^3}\,dr, \qquad (13\text{-}16)$$

onde da_g é o acréscimo da aceleração gravitacional em consequência de um acréscimo dr da distância ao centro da Terra. No caso da astronauta, $dr = h$ e $r = 6{,}77 \times 10^6$ m. Substituindo os valores conhecidos na Eq. 13-16, temos:

$$da_g = -2\frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\cdot s^2})(5{,}98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}{(6{,}77 \times 10^6\ \mathrm{m})^3}(1{,}70\ \mathrm{m})$$

$$= -4{,}37 \times 10^{-6}\ \mathrm{m/s^2}, \qquad \text{(Resposta)}$$

onde o valor de M_T foi obtido no Apêndice C. O resultado significa que a aceleração gravitacional dos pés da astronauta em direção à Terra é ligeiramente maior que a aceleração da cabeça. A diferença entre as acelerações (conhecida como *efeito maré*) tende a esticar o corpo da astronauta, mas é tão pequena que não pode ser percebida.

(b) Se a mesma astronauta está "de pés para baixo" em uma nave espacial em uma órbita com o mesmo raio $r = 6{,}77 \times 10^6$ m em torno de um buraco negro de massa $M_b = 1{,}99 \times 10^{31}$ kg (10 vezes a massa do Sol), qual é a diferença entre a aceleração gravitacional dos pés e da cabeça? O buraco negro possui uma superfície (chamada de *horizonte de eventos*) de raio $R_b = 2GM_b/c^2 \approx 1{,}48 \times 10^{-27}M_b = 2{,}95 \times 10^4$ m, onde c é a velocidade da luz. Nada, nem mesmo a luz, pode escapar dessa superfície ou de qualquer ponto do interior. Note que a astronauta está bem longe do horizonte de eventos ($r = 229R_b$).

Cálculos Mais uma vez, temos uma variação dr entre os pés e a cabeça da astronauta e podemos empregar a Eq. 13-16. Agora, porém, em vez de M_T, temos que usar $M_b = 1{,}99 \times 10^{31}$ kg. O resultado é

$$da_g = -2\frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\cdot s^2})(1{,}99 \times 10^{31}\ \mathrm{kg})}{(6{,}77 \times 10^6\ \mathrm{m})^3}(1{,}70\ \mathrm{m})$$

$$= -14{,}5\ \mathrm{m/s^2}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Isso significa que a aceleração gravitacional dos pés da astronauta em direção ao buraco negro é bem maior que a da cabeça. A força resultante seria suportável, mas dolorosa. Se a astronauta se aproximasse do buraco negro, a força de estiramento aumentaria drasticamente.

13-5 A Gravitação no Interior da Terra

O teorema das cascas de Newton também pode ser aplicado a uma situação na qual a partícula se encontra *no interior* de uma casca homogênea, para demonstrar o seguinte:

Uma casca homogênea de matéria não exerce força gravitacional sobre uma partícula localizada no interior.

Atenção: esta afirmação *não significa* que as forças gravitacionais exercidas pelas partículas da casca sobre a partícula considerada desaparecem magicamente, mas apenas que a *resultante* das forças gravitacionais que agem sobre a partícula é nula.

Se a massa da Terra fosse uniformemente distribuída, a força gravitacional que age sobre uma partícula seria máxima na superfície da Terra e decresceria à medida que a partícula se movesse para fora, afastando-se do planeta. Se a partícula se movesse para dentro, penetrando no poço de uma mina, por exemplo, a força gravitacional mudaria por duas razões: (1) tenderia a aumentar porque a partícula estaria se aproximando do centro da Terra; (2) tenderia a diminuir porque uma casca de material de espessura cada vez maior, localizada do lado de fora da partícula em relação ao centro da Terra, deixaria de contribuir para a força gravitacional.

No caso de uma Terra homogênea, a segunda influência prevaleceria e a força exercida sobre a partícula diminuiria progressivamente à medida que a partícula se aproximasse do centro da Terra. No caso real, porém, de uma Terra não homogênea, a força sobre a partícula aumenta quando a partícula começa a descer. A força atinge um valor máximo a uma certa profundidade e depois começa a diminuir.

Exemplo

Túnel passando pelo centro da Terra: gravitação

Em *De Polo a Polo*, uma conto de ficção científica escrito por George Griffith em 1904, três exploradores usam uma cápsula para viajar em um túnel natural (fictício, é claro) que vai do Polo Sul ao Polo Norte (Fig. 13-7). Na história, quando a cápsula se aproxima do centro da Terra, a força gravitacional experimentada pelos exploradores aumenta assustadoramente, mas desaparece por um momento, quando a cápsula atinge o centro da Terra. Em seguida, a gravidade volta a assumir um valor elevado e começa a diminuir enquanto a cápsula atravessa a outra metade do túnel e chega ao polo Norte.

Verifique se a descrição de Griffith está correta calculando a força gravitacional experimentada pela cápsula de massa m quando está a uma distância r do centro da Terra. Suponha que a Terra é uma esfera homogênea de massa específica (massa por unidade de volume) ρ.

IDEIA-CHAVE

O teorema das cascas de Newton nos fornece três ideias:

1. Quando a cápsula se encontra a uma distância r do centro da Terra, a parte da Terra situada do lado de fora de uma esfera de raio r não produz uma força gravitacional resultante sobre a cápsula.
2. A parte da Terra localizada no interior dessa esfera produz uma força gravitacional resultante sobre a cápsula.
3. Podemos tratar a massa M_{int} dessa parte interior da Terra como a massa de uma partícula situada no centro da Terra.

Cálculos De acordo com as três ideias e a Eq. 13-1, o módulo da força gravitacional experimentada pela cápsula é dado por

$$F = \frac{GmM_{int}}{r^2}. \qquad (13\text{-}17)$$

Para escrever a massa M_{int} em termos do raio r, note que o volume V_{int} que contém essa massa é $\frac{4}{3}\pi r^3$. Além disso, como estamos supondo que Terra é homogênea, a massa específica $\rho_{int} = M_{int}/V_{int}$ é igual à massa específica ρ da Terra. Assim, temos:

$$M_{int} = \rho V_{int} = \rho \frac{4\pi r^3}{3}. \qquad (13\text{-}18)$$

Substituindo a Eq. 13-18 na Eq. 13-17 e simplificando, obtemos

$$F = \frac{4\pi Gm\rho}{3} r. \quad \text{(Resposta)} \qquad (13\text{-}19)$$

De acordo com a Eq. 13-19, o módulo da força F varia linearmente com a distância r entre a cápsula e o centro da

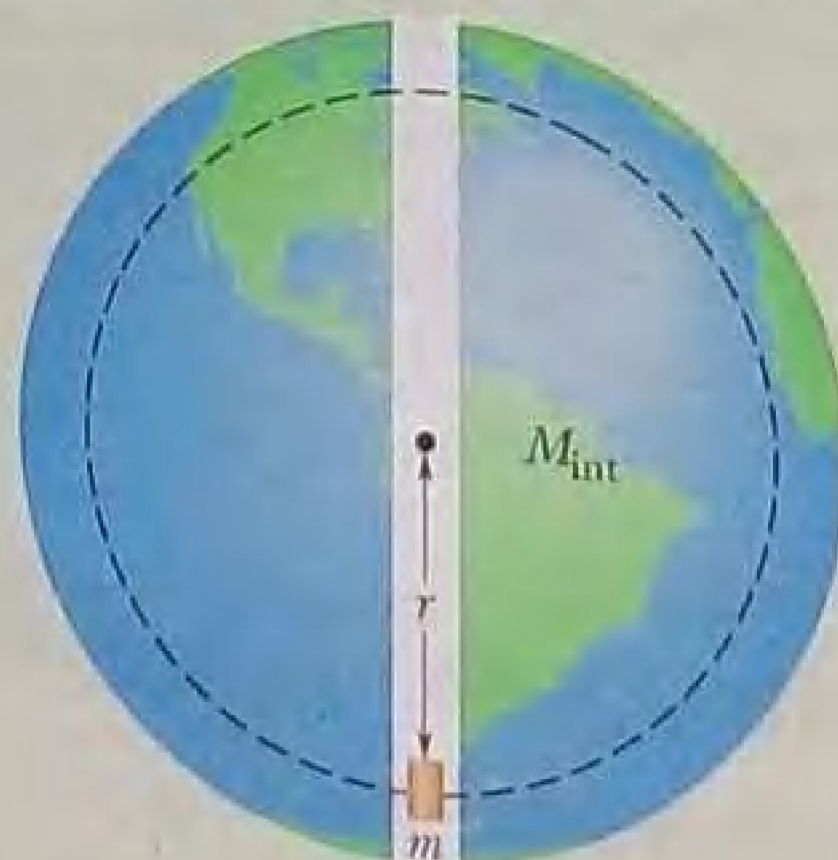


Figura 13-7 Uma cápsula de massa m cai a partir do repouso através de um túnel que liga os Polos Norte e Sul da Terra. Quando a cápsula está a uma distância r do centro da Terra, a parte da massa da Terra que está contida numa esfera com esse raio é M_{int}.

UNIVERSIDADE ... DO PARÁ
BIBLIOTECA CENTRAL

Terra. Assim, quando r diminui, F também diminui (ao contrário da descrição de Griffith), até se anular no centro da Terra. Pelo menos, Griffith acertou ao afirmar que a força era nula no centro da Terra.

A Eq. 13-19 também pode ser escrita em termos do vetor força $\vec{F}$ e do vetor posição $\vec{r}$ da cápsula em relação ao centro da Terra. Chamando de K a constante $4\pi Gmp/3$, a Eq. 13-19 se torna

$$\vec{F} = -K\vec{r}, \qquad (13\text{-}20)$$

onde usamos um sinal negativo para indicar que $\vec{F}$ e $\vec{r}$ têm sentidos opostos. A Eq. 13-20 tem a forma da lei de Hooke (Eq. 7-20, $\vec{F} = -k\vec{d}$). Assim, nas condições idealizadas da história, a cápsula oscilaria como um bloco preso a uma mola, com o centro das oscilações no centro da Terra. Após a cápsula ter caído do polo Sul até o centro da Terra, viajaria do centro até o polo Norte (como Griffith afirmou) e depois voltaria ao polo Norte, repetindo o ciclo para sempre.

13-6 Energia Potencial Gravitacional

Na Seção 8-4, discutimos a energia potencial gravitacional de um sistema partícula–Terra. Tomamos o cuidado de manter a partícula perto da superfície da Terra para que a força gravitacional fosse aproximadamente constante e escolhemos uma configuração de referência do sistema para a qual a energia potencial gravitacional fosse nula. Na maioria dos casos, nesta configuração de referência, a partícula estava na superfície da Terra. Para partículas fora da superfície da Terra, a energia potencial gravitacional aumentava quando a distância entre a partícula e a Terra aumentava.

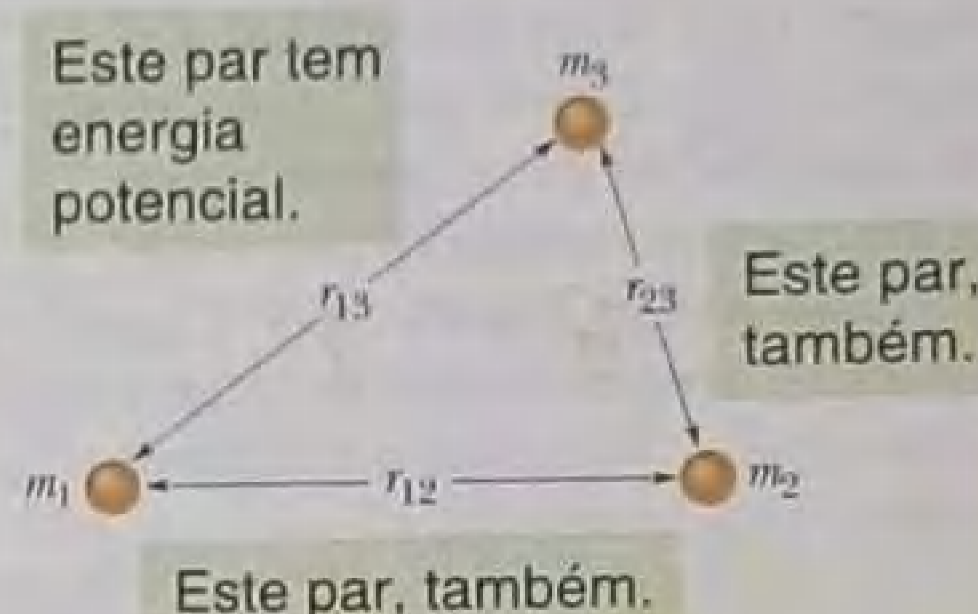


Figura 13-8 Um sistema formado por três partículas. A energia potencial gravitacional *do sistema* é a soma das energias potenciais gravitacionais dos três pares de partículas.

Vamos agora alargar nossa visão e considerar a energia potencial gravitacional U de duas partículas, de massas m e M, separadas por uma distância r. Mais uma vez, vamos escolher uma configuração de referência com U igual a zero. Entretanto, para simplificar as equações, a distância r na configuração de referência agora é tão grande que podemos considerá-la *infinita*. Como antes, a energia potencial gravitacional diminui quando a distância diminui. Como $U = 0$ para $r = \infty$, a energia potencial é negativa para qualquer distância finita e se torna progressivamente mais negativa à medida que as partículas se aproximam.

Com esses fatos em mente, tomamos, como justificaremos a seguir, a energia potencial gravitacional do sistema de duas partículas como

$$U = -\frac{GMm}{r} \quad \text{(energia potencial gravitacional).} \qquad (13\text{-}21)$$

Note que $U(r)$ tende a zero quando r tende a infinito e que, para qualquer valor finito de r, o valor de $U(r)$ é negativo.

A energia potencial dada pela Eq. 13-21 é uma propriedade do sistema de duas partículas e não de cada partícula isoladamente. Não é possível dividir essa energia e afirmar que uma parte pertence a uma das partículas e o restante pertence à outra. Entretanto, se $M \gg m$, como acontece no caso do sistema formado pela Terra (de massa M) e uma bola de tênis (de massa m), frequentemente falamos da "energia potencial da bola de tênis". Podemos falar assim porque, quando uma bola de tênis se move nas proximidades da superfície da Terra, as variações de energia potencial do sistema bola–Terra aparecem quase inteiramente como variações da energia cinética da bola de tênis, já que as variações da energia cinética da Terra são pequenas demais para serem medidas. Analogamente, na Seção 13-8, falaremos da "energia potencial de um satélite artificial" em órbita da Terra porque a massa do satélite é muito menor que a massa da Terra. Por outro lado, quando falamos da energia potencial de corpos de massas comparáveis, devemos ter o cuidado de tratá-los como um sistema.

Se nosso sistema contém mais de duas partículas, consideramos cada par de partículas separadamente, calculamos a energia potencial gravitacional desse par usando a Eq. 13-21 como se as outras partículas não estivessem presentes e somamos algebricamente os resultados. Aplicando a Eq. 13-21 a cada um dos três pares de partículas

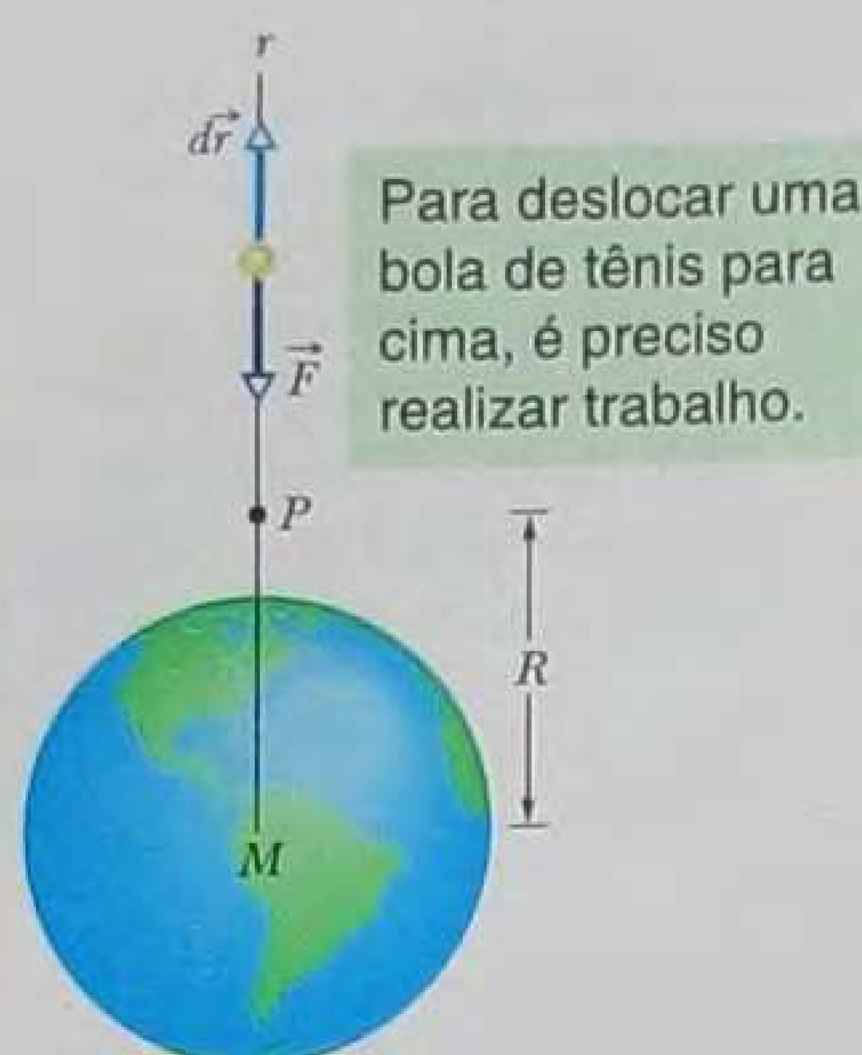


Figura 13-9 Uma bola de tênis é lançada verticalmente para cima a partir da superfície da Terra, passando pelo ponto P a uma distância R do centro da Terra. A força gravitacional $\vec{F}$ que age sobre a bola e o vetor deslocamento diferencial $d\vec{r}$ estão representados ao longo de um eixo radial r.

da Fig. 13-8, por exemplo, obtemos a energia potencial do sistema como

$$U = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right). \tag{13-22}$$

Demonstração da Equação 13-21

Suponha que uma bola de tênis seja lançada verticalmente para cima a partir da superfície da Terra, como na Fig. 13-9. Estamos interessados em obter uma expressão para a energia potencial gravitacional U da bola no ponto P da trajetória, a uma distância radial R do centro da Terra. Para isso, calculamos o trabalho W realizado sobre a bola pela força gravitacional enquanto a bola se move do ponto P até uma distância muito grande (infinita) da Terra. Como a força gravitacional $\vec{F}(r)$ é uma força variável (o módulo depende de r), devemos usar as técnicas da Seção 7-8 para calcular o trabalho. Em notação vetorial, podemos escrever

$$W = \int_R^\infty \vec{F}(r) \cdot d\vec{r}. \tag{13-23}$$

A integral contém o produto escalar da força $\vec{F}(r)$ pelo vetor deslocamento diferencial $d\vec{r}$ ao longo da trajetória da bola. Podemos expandir esse produto como

$$\vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = F(r)\, dr \cos\phi, \tag{13-24}$$

onde ϕ é o ângulo entre $\vec{F}(r)$ e $d\vec{r}$. Quando substituímos ϕ por 180° e $F(r)$ pelo seu valor, dado pela Eq. 13-1, a Eq. 13-24 se torna

$$\vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r^2}\, dr,$$

onde M é a massa da Terra e m é massa da bola.

Substituindo na Eq. 13-23 e integrando, obtemos

$$W = -GMm \int_R^\infty \frac{1}{r^2}\, dr = \left[\frac{GMm}{r}\right]_R^\infty$$

$$= 0 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R}, \tag{13-25}$$

onde W é o trabalho necessário para deslocar a bola do ponto P (a uma distância R) até o infinito. A Eq. 8-1 ($\Delta U = -W$) nos diz que também podemos escrever esse trabalho em termos de energias potenciais como

$$U_\infty - U = -W.$$

Como a energia potencial no infinito U_∞ é nula, U é a energia potencial em P e W é dado pela Eq. 13-25, esta equação se torna

$$U = W = -\frac{GMm}{R}.$$

Substituindo R por r, obtemos a Eq. 13-21, que queríamos demonstrar.

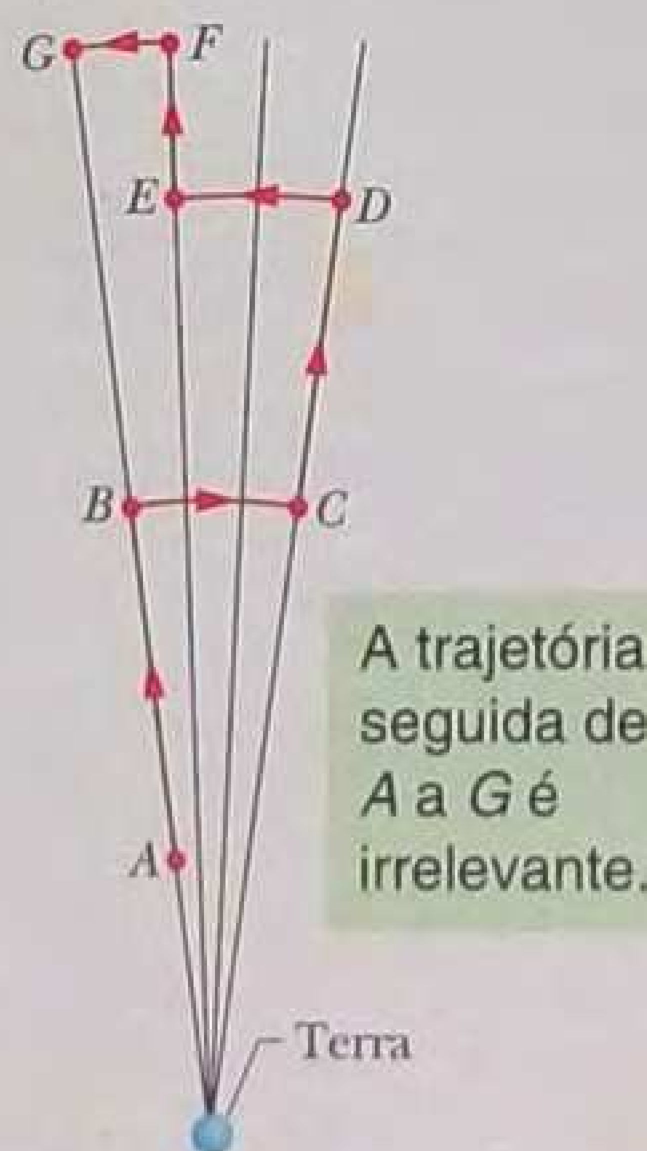


Figura 13-10 Perto da superfície da Terra, uma bola de tênis é deslocada do ponto A para o ponto G ao longo de uma trajetória formada por segmentos radiais e arcos de circunferência.

Independência da Trajetória

Na Fig. 13-10, deslocamos uma bola de tênis do ponto A para o ponto G ao longo de uma trajetória composta por três segmentos radiais e três arcos de circunferência (com o centro no centro da Terra). Estamos interessados no trabalho total W realizado pela força gravitacional $\vec{F}$ que a Terra exerce sobre a bola quando a bola se desloca do ponto A até o ponto G. O trabalho realizado ao longo dos arcos de circunferência é nulo, já que $\vec{F}$ é perpendicular aos arcos em todos os pontos. Assim, W é a soma apenas dos trabalhos realizados pela força $\vec{F}$ ao longo dos três segmentos radiais.

Suponha agora que reduzimos mentalmente o comprimento dos arcos para zero. Nesse caso, estamos deslocando a bola de A para G ao longo de um único segmento radial. O valor de W é diferente? Não. Como nenhum trabalho é realizado ao longo dos arcos, sua eliminação não muda o valor do trabalho. A trajetória seguida de A até G é diferente, mas o trabalho realizado por $\vec{F}$ é o mesmo.

Este tipo de resultado foi discutido, de forma geral, na Seção 8-3. O fato é que a força gravitacional é uma força conservativa. Assim, o trabalho realizado pela força gravitacional sobre uma partícula que se move de um ponto inicial i para um ponto final f não depende da trajetória seguida entre os pontos. De acordo com a Eq. 8-1, a variação ΔU da energia potencial gravitacional do ponto i para o ponto f é dada por

$$\Delta U = U_f - U_i = -W. \tag{13-26}$$

Como o trabalho realizado W por uma força conservativa é independente da trajetória seguida pela partícula, a variação ΔU da energia potencial gravitacional também é *independente* da trajetória.

Energia Potencial e Força

Na demonstração da Eq. 13-21, deduzimos a função energia potencial $U(r)$ a partir da função força $\vec{F}(r)$. Poderíamos ter seguido o caminho inverso, ou seja, deduzido a função força a partir da função energia potencial. Guiados pela Eq. 8-22 [$F(x) = -dU(x)/dx$], podemos escrever

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right)$$
$$= -\frac{GMm}{r^2}. \tag{13-27}$$

Esta é a lei da gravitação de Newton (Eq. 13-1). O sinal negativo significa que a força exercida sobre a massa m aponta no sentido de valores menores de r, em direção à massa M.

Velocidade de Escape

Quando lançamos um projétil para cima, normalmente ele diminui de velocidade, pára momentaneamente e cai de volta em direção à Terra. Para velocidades maiores que um certo valor, porém, o projétil continua a subir indefinidamente e sua velocidade somente se anula (pelo menos na teoria) a uma distância infinita da Terra. O menor valor da velocidade para que isso ocorra é chamado de **velocidade de escape** (da Terra).

Considere um projétil de massa m deixando a superfície de um planeta (ou outro astro qualquer) com a velocidade de escape v. O projétil possui uma energia cinética K dada por $\frac{1}{2}mv^2$ e uma energia potencial U dada pela Eq. 13-21:

$$U = -\frac{GMm}{R},$$

onde M e R são, respectivamente, a massa e o raio do planeta.

Quando o projétil atinge o infinito, ele para e, portanto, não possui mais energia cinética. Também não possui energia potencial gravitacional, pois uma distância infinita entre dois corpos corresponde à configuração que escolhemos como referência de energia potencial nula. A energia total do projétil no infinito é, portanto, zero. De acordo com a lei de conservação da energia, a energia total do projétil na superfície do planeta também deve ter sido nula, de modo que

$$K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = 0.$$

Explicitando v, temos:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \tag{13-28}$$

Note que v não depende da direção em que o projétil é lançado. Entretanto, é mais fácil atingir essa velocidade se o projétil for lançado na direção para a qual o local de lançamento está se movendo por causa da rotação do planeta. Assim, por exemplo, os foguetes norte-americanos são lançados na direção leste em Cabo Canaveral para aproveitar a velocidade local para o leste, de cerca de 1500 km/h, em consequência da rotação da Terra.

A Eq. 13-28 pode ser usada para calcular a velocidade de escape de um projétil a partir da superfície de qualquer astro, tomando M como a massa do astro e R como o raio. A Tabela 13-2 mostra algumas velocidades de escape.

Tabela 13-2

Algumas Velocidades de Escape

Astro	Massa (kg)	Raio (m)	Velocidade de escape (km/s)
Ceres[a]	$1{,}17 \times 10^{21}$	$3{,}8 \times 10^{5}$	0,64
Lua[a]	$7{,}36 \times 10^{22}$	$1{,}74 \times 10^{6}$	2,38
Terra	$5{,}98 \times 10^{24}$	$6{,}37 \times 10^{6}$	11,2
Júpiter	$1{,}90 \times 10^{27}$	$7{,}15 \times 10^{7}$	59,5
Sol	$1{,}99 \times 10^{30}$	$6{,}96 \times 10^{8}$	618
Sirius B[b]	2×10^{30}	1×10^{7}	5200
Estrela de nêutrons[c]	2×10^{30}	1×10^{4}	2×10^{5}

[a]O maior asteroide.
[b]Uma *anã branca* (estrela em um estágio final de evolução) que é companheira da estrela Sirius.
[c]O núcleo denso de uma estrela que se transforma em *supernova*.



TESTE 3

Você afasta uma bola de massa m de uma esfera de massa M. (a) A energia potencial gravitacional do sistema bola-esfera aumenta ou diminui? (b) O trabalho realizado pela força gravitacional com a qual a bola e a esfera se atraem é positivo ou negativo?

Exemplo

Asteroide vindo do espaço: energia mecânica

Um asteroide, em rota de colisão com a Terra, tem uma velocidade de 12 km/s em relação ao planeta quando está a uma distância de 10 raios terrestre do centro da Terra. Desprezando os efeitos da atmosfera sobre o asteroide, determine a velocidade do asteroide, v_f, ao atingir a superfície.

IDEIA-CHAVE

Como estamos desprezando os efeitos da atmosfera sobre o asteroide, a energia mecânica do sistema asteroide–Terra é conservada durante a queda. Assim, a energia mecânica final (quando o asteroide atinge a superfície da Terra) é igual à energia mecânica inicial. Chamando a energia cinética de K e a energia potencial gravitacional de U, essa relação pode ser escrita na forma

$$K_f + U_f = K_i + U_i. \tag{13-29}$$

Supondo que o sistema é isolado, o momento linear do sistema também é conservado durante a queda. Assim, as variações do momento linear do asteroide e da Terra devem ter o mesmo módulo e sinais opostos. Entretanto, como a massa da Terra é muito maior que a massa do asteroide, a variação da velocidade da Terra é desprezível em relação à variação da velocidade do asteroide, ou seja, a variação da energia cinética da Terra pode ser desprezada. Assim, podemos supor que as energias cinéticas na Eq. 13-29 são apenas as do asteroide.

Cálculos Seja m a massa do asteroide e M a massa da Terra ($5{,}98 \times 10^{24}$ kg). O asteroide está inicialmente a uma dis-

tância $10R_T$ do centro da Terra e no final a uma distância R_T, onde R_T é o raio da Terra ($6{,}37 \times 10^6$ m). Substituindo U pelo seu valor, dado pela Eq. 13-21, e K por $\frac{1}{2}mv^2$, a Eq. 13-29 se torna

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{R_T} = \tfrac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GMm}{10R_T}.$$

Reagrupando os termos e substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$\begin{aligned} v_f^2 &= v_i^2 + \frac{2GM}{R_T}\left(1 - \frac{1}{10}\right) \\ &= (12 \times 10^3 \text{ m/s})^2 \\ &\quad + \frac{2(6{,}67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2)(5{,}98 \times 10^{24} \text{ kg})}{6{,}37 \times 10^6 \text{ m}}\,0{,}9 \\ &= 2{,}567 \times 10^8 \text{ m}^2/\text{s}^2, \end{aligned}$$

e

$$v_f = 1{,}60 \times 10^4 \text{ m/s} = 16 \text{ km/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Com esta velocidade, o asteroide não precisaria ser muito grande para causar danos consideráveis. Se tivesse 5 m de diâmetro, o choque liberaria aproximadamente tanta energia quanto a explosão nuclear de Hiroxima. Na verdade, existem cerca de 500 milhões de asteroide desse tamanho nas proximidades da órbita da Terra, e em 1994 um deles aparentemente penetrou na atmosfera da Terra e explodiu 20 km acima do Pacífico Sul (acionando alarmes de explosão nuclear em seis satélites militares). O impacto de um asteroide de 500 m de diâmetro (deve existir cerca de um milhão desses asteroide nas proximidades da órbita da de nosso planeta) poderia extinguir a civilização moderna e eliminar a maior parte dos habitantes da Terra.

13-7 Planetas e Satélites: As Leis de Kepler

Desde tempos remotos, os movimentos aparentemente aleatórios dos planetas em relação às estrelas intrigaram os observadores do céu. O movimento retrógrado de Marte, mostrado na Fig. 13-11, era particularmente enigmático. Johannes Kepler (1571–1630), após uma vida de estudos, descobriu as leis empíricas que governam esses movimentos. Tycho Brahe (1546–1601), o último dos grandes astrônomos a fazer observações sem o auxílio de um telescópio, compilou uma grande quantidade de dados a partir dos quais Kepler foi capaz de deduzir as três leis do movimento planetário que hoje levam o seu nome. Mais tarde, Newton (1642–1727) mostrou que as leis de Kepler são uma consequência da sua lei da gravitação.

Nesta seção, vamos discutir as três leis de Kepler e aplicá-las ao movimento dos planetas em torno do Sol. As mesmas leis podem ser usadas para estudar o movimento de satélites, naturais ou artificiais, em volta da Terra ou de qualquer outro corpo cuja massa seja muito maior que a do satélite.

1. LEI DAS ÓRBITAS Todos os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol em um dos focos.



Figura 13-11 Trajetória de Marte em relação às estrelas da constelação de Capricórnio durante o ano de 1971. A posição do planeta está assinalada em quatro dias específicos. Como tanto Marte como a Terra estão se movendo em torno do Sol, o que vemos é a posição de Marte em relação a nós; esse movimento relativo faz com que Marte às vezes pareça se mover para trás.

A Fig. 13-12 mostra um planeta de massa m que se move em órbita em torno do Sol, cuja massa é M. Supomos que $M \gg m$, de modo que o centro de massa do sistema planeta–Sol está aproximadamente no centro do Sol.

A órbita da Fig. 13-12 é especificada através do **semieixo maior** a e da **excentricidade** e, a última definida de tal forma que ea é a distância do centro da elipse a um dos focos, F ou F'. *Uma excentricidade nula corresponde a uma circunferência*, na qual os dois focos se reduzem a um único ponto central. As excentricidades das órbitas dos planetas são tão pequenas que as órbitas parecem circulares se forem desenhadas em escala. A excentricidade da elipse da Fig. 13-12, por exemplo, é 0,74, enquanto a excentricidade da órbita da Terra é apenas 0,0167.

2. LEI DAS ÁREAS A reta que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais no plano da órbita do planeta em intervalos de tempo iguais, ou seja, a taxa de variação dA/dt da área A com o tempo é constante.

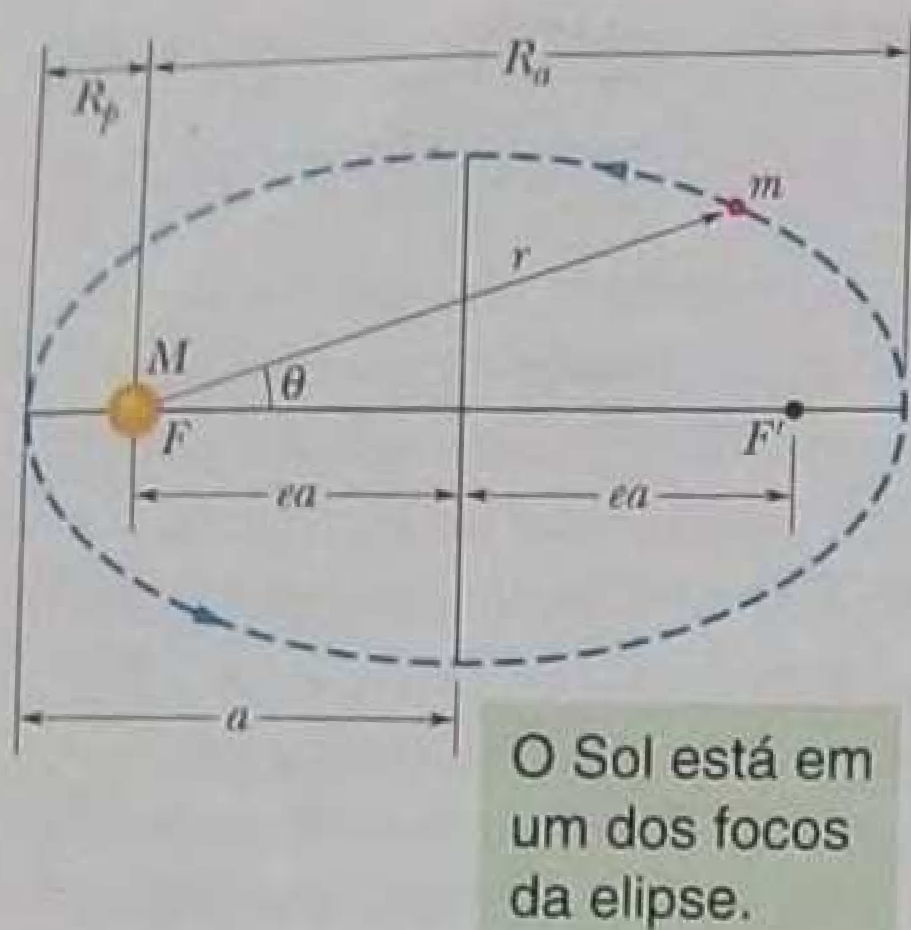


Figura 13-12 Um planeta de massa m em órbita elíptica em torno do Sol. O Sol, de massa M, ocupa um foco, F, da elipse. O outro foco, F', está localizado no espaço vazio. Os dois focos ficam a uma distância ea do centro, onde e é a excentricidade e a é o semieixo maior da elipse. A distância do periélio R_p (ponto mais próximo do Sol) e a distância do afélio R_a (ponto mais afastado do Sol) também são mostradas na figura.

Qualitativamente, a segunda lei nos diz que o planeta se move mais devagar quando está mais distante do Sol e mais depressa quando está mais próximo do Sol. Na realidade, a segunda lei de Kepler é uma consequência direta da lei de conservação do momento angular. Vamos provar esse fato.

A área da cunha sombreada na Fig. 13-13*a* é praticamente igual à área varrida no intervalo de tempo Δt pelo segmento de reta entre o Sol e o planeta, cujo comprimento é r. A área ΔA da cunha é aproximadamente igual à área de um triângulo de base $r\Delta\theta$ e altura r. Como a área de um triângulo é igual à metade da base vezes a altura, $\Delta A \approx \frac{1}{2}r^2\Delta\theta$. Essa expressão para ΔA se torna mais exata quando Δt (e, portanto, $\Delta\theta$) tende a zero. A taxa de variação instantânea é

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \tfrac{1}{2}r^2\omega, \tag{13-30}$$

onde ω é a velocidade angular do segmento de reta que liga o Sol ao planeta.

A Fig. 13-13*b* mostra o momento linear $\vec{p}$ do planeta, juntamente com suas componentes radial e perpendicular. De acordo com a Eq. 11-20 ($L = rp_\perp$), o módulo do momento angular $\vec{L}$ do planeta em relação ao Sol é dado pelo produto de r e $p_\perp$, a componente de $\vec{p}$ perpendicular a r. Para um planeta de massa m,

$$\begin{aligned} L = rp_\perp &= (r)(mv_\perp) = (r)(m\omega r) \\ &= mr^2\omega, \end{aligned} \tag{13-31}$$

onde substituímos $v_\perp$ por ωr (Eq. 10-18). Combinando as Eqs. 13-30 e 13-31, obtemos

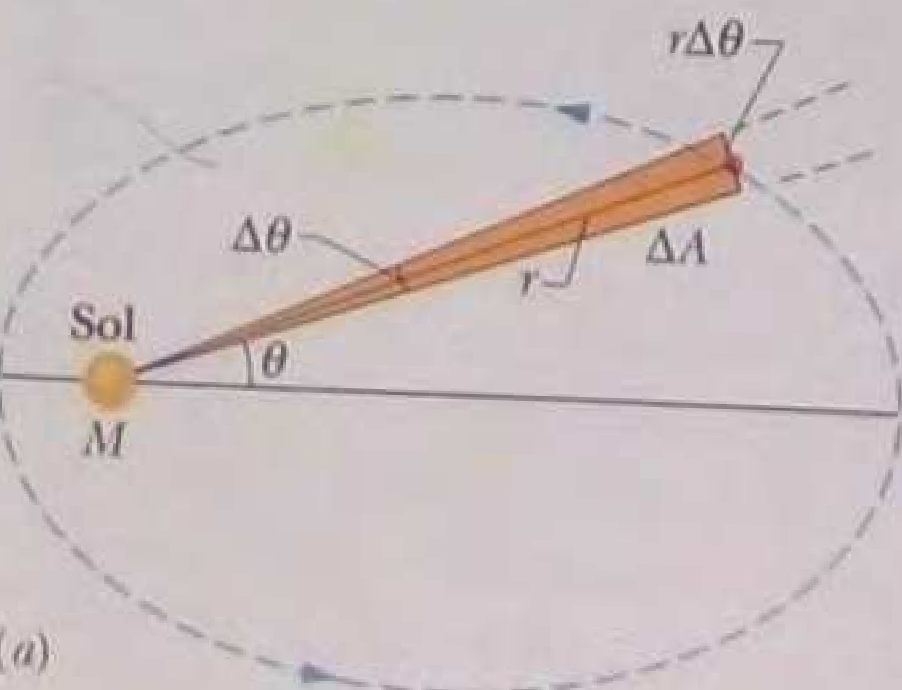
$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}. \tag{13-32}$$

De acordo com a Eq. 13-32, a afirmação de Kepler de que dA/dt é constante equivale a dizer que L é constante, ou seja, que o momento angular é conservado. A segunda lei de Kepler é, portanto, equivalente à lei de conservação do momento angular.

3. LEI DOS PERÍODOS O quadrado do período de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semieixo maior da órbita.

Para compreender por que isso é verdade, considere a órbita circular da Fig. 13-14, de raio r (o raio de uma circunferência é equivalente ao semieixo maior de uma elipse). Aplicando a segunda lei de Newton ($F = ma$) ao planeta em órbita da Fig. 13-14, temos:

$$\frac{GMm}{r^2} = (m)(\omega^2 r). \tag{13-33}$$



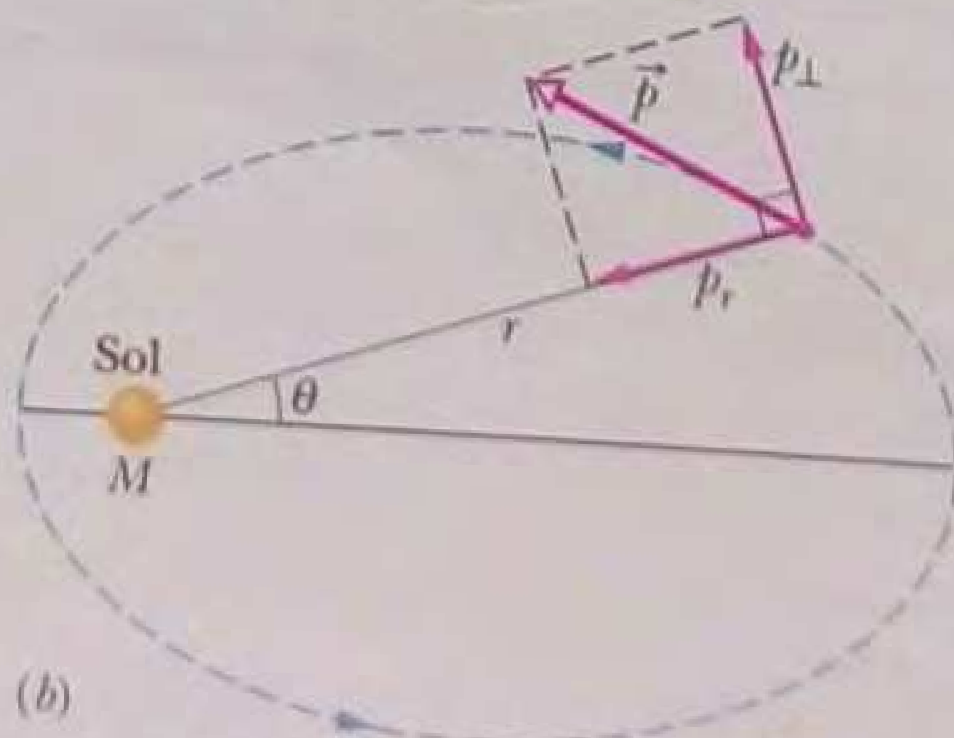


Figura 13-13 (*a*) No instante Δt, o segmento de reta r que liga o planeta ao Sol se desloca de um ângulo $\Delta\theta$, varrendo uma área ΔA (sombreada). (*b*) O momento linear $\vec{p}$ do planeta e suas componentes.

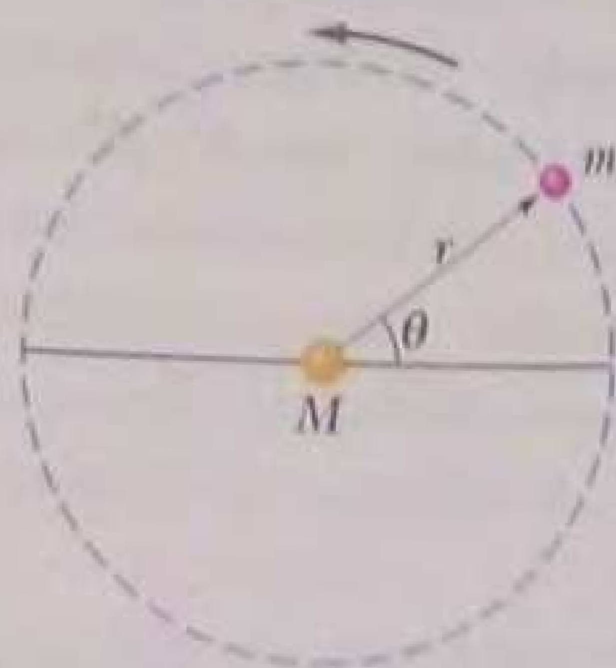


Figura 13-14 Um planeta de massa m girando em torno do Sol em uma órbita circular de raio r.

UNIVERSIDADE ... DO PARÁ
BIBLIOTECA CENTRAL

onde substituímos o módulo da força F pelo seu valor, dado pela Eq. 13-1, e usamos a Eq. 10-23 para substituir a aceleração centrípeta por $\omega^2 r$. Usando a Eq. 10-20 para substituir ω por $2\pi/T$, onde T é o período do movimento, obtemos a terceira lei de Kepler:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3 \quad \text{(lei dos períodos).} \qquad (13\text{-}34)$$

A grandeza entre parênteses é uma constante que depende apenas da massa M do corpo central em torno do qual o planeta gira.

A Eq. 13-34 também é válida para órbitas elípticas, desde que r seja substituído por a, o semieixo maior da elipse. Essa lei prevê que a razão T^2/a^3 tem praticamente o mesmo valor para todas as órbitas planetárias em torno de um mesmo corpo de grande massa. A Tabela 13-3 mostra que ela é válida para as órbitas de todos os planetas do sistema solar.

Tabela 13-3

Lei de Kepler para os Períodos do Sistema Solar

Planeta	Semieixo maior a(10^{10} m)	Período T(anos)	T^2/a^3 (10^{-34} anos^2/m^3)
Mercúrio	5,79	0,241	2,99
Vênus	10,8	0,615	3,00
Terra	15,0	1,00	2,96
Marte	22,8	1,88	2,98
Júpiter	77,8	11,9	3,01
Saturno	143	29,5	2,98
Urano	287	84,0	2,98
Netuno	450	165	2,99
Plutão	590	248	2,99

TESTE 4

O satélite 1 está em uma órbita circular em torno de um planeta, enquanto o satélite 2 está em uma órbita circular de raio maior. Qual dos satélites possui (a) o maior período e (b) a maior velocidade?

Exemplo

Lei dos períodos de Kepler: o cometa de Halley

O cometa de Halley gira em órbita em torno do Sol com um período de 76 anos; em 1986, chegou à menor distância do Sol, a *distância do periélio* R_p, que é $8{,}9 \times 10^{10}$ m. A Tabela 13-3 mostra que esta distância está entre as órbitas de Mercúrio e Vênus.

(a) Qual é a maior distância do cometa ao Sol, que é chamada de *distância do afélio* R_a?

IDEIA-CHAVE

De acordo com a Fig. 13-12, $R_a + R_p = 2a$, onde a é o semieixo maior da órbita. Assim, podemos calcular R_a se conhecermos a. Podemos relacionar a ao período dado através da lei dos períodos (Eq. 13-34) simplesmente substituindo r pelo semieixo maior a.

Cálculos Fazendo essa substituição e explicitando a, obtemos

$$a = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}. \qquad (13\text{-}35)$$

Substituindo na Eq. 13-35 a massa M do Sol, $1{,}99 \times 10^{30}$ kg, e o período T do cometa, 76 anos ou $2{,}4 \times 10^9$ s, obtemos $a = 2{,}7 \times 10^{12}$ m. Isso nos dá

$$\begin{aligned} R_a &= 2a - R_p \\ &= (2)(2{,}7 \times 10^{12}\text{ m}) - 8{,}9 \times 10^{10}\text{ m} \\ &= 5{,}3 \times 10^{12}\text{ m.} \end{aligned} \qquad \text{(Resposta)}$$

A Tabela 13-3 mostra que esse valor é um pouco menor que o semieixo maior da órbita de Plutão. Assim, o cometa não se afasta mais do Sol que Plutão.

(b) Qual é a excentricidade e da órbita do cometa de Halley?

IDEIA-CHAVE

Podemos relacionar e, a e R_p através da Fig. 13-12, na qual vemos que $ea = a - R_p$.

Cálculo Temos:

$$e = \frac{a - R_p}{a} = 1 - \frac{R_p}{a} \qquad (13\text{-}36)$$

$$= 1 - \frac{8{,}9 \times 10^{10}\text{ m}}{2{,}7 \times 10^{12}\text{ m}} = 0{,}97. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como a excentricidade é quase 1, a órbita do cometa de Halley é uma elipse muito alongada.

13-8 Satélites: Órbitas e Energias

Quando um satélite gira em torno da Terra em uma órbita elíptica, tanto a velocidade, que determina a energia cinética K, como a distância ao centro da Terra, que determina

a energia potencial gravitacional U, variam com o tempo. Entretanto, a energia mecânica E do satélite permanece constante. (Como a massa do satélite é muito menor que a massa da Terra, atribuímos U e E do sistema satélite – Terra apenas ao satélite.)

A energia potencial do sistema é dada pela Eq. 13-21:

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

(com $U = 0$ para uma distância infinita). A variável r é o raio da órbita do satélite, que supomos por enquanto que é circular, e M e m são as massas da Terra e do satélite, respectivamente.

Para determinar a energia cinética de um satélite em órbita circular, escrevemos a segunda lei de Newton ($F = ma$) como

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}, \tag{13-37}$$

onde v^2/r é a aceleração centrípeta do satélite. Nesse caso, de acordo com a Eq. 13-37, a energia cinética é

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}, \tag{13-38}$$

o que mostra que, para um satélite em uma órbita circular,

$$K = -\frac{U}{2} \quad \text{(órbita circular)}. \tag{13-39}$$

A energia mecânica total do satélite em órbita é

$$E = K + U = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r}$$

ou

$$E = -\frac{GMm}{2r} \quad \text{(órbita circular)}. \tag{13-40}$$

Esse resultado mostra que, para um satélite em uma órbita circular, a energia total E é o negativo da energia cinética K:

$$E = -K \quad \text{(órbita circular)}. \tag{13-41}$$

Para um satélite em uma órbita elíptica com semieixo maior a, podemos substituir r por a na Eq. 13-40 para obter a energia mecânica:

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad \text{(órbita elíptica)}. \tag{13-42}$$

De acordo com a Eq. 13-42, a energia total de um satélite em órbita depende apenas do semieixo maior da órbita e não da excentricidade e. Assim, por exemplo, quatro órbitas com o mesmo semieixo maior aparecem na Fig. 13-15; um satélite teria a mesma energia mecânica total E nas quatro órbitas. A Fig. 13-16 mostra a variação de K, U e E com r para um satélite em órbita circular em torno de um corpo central de grande massa.

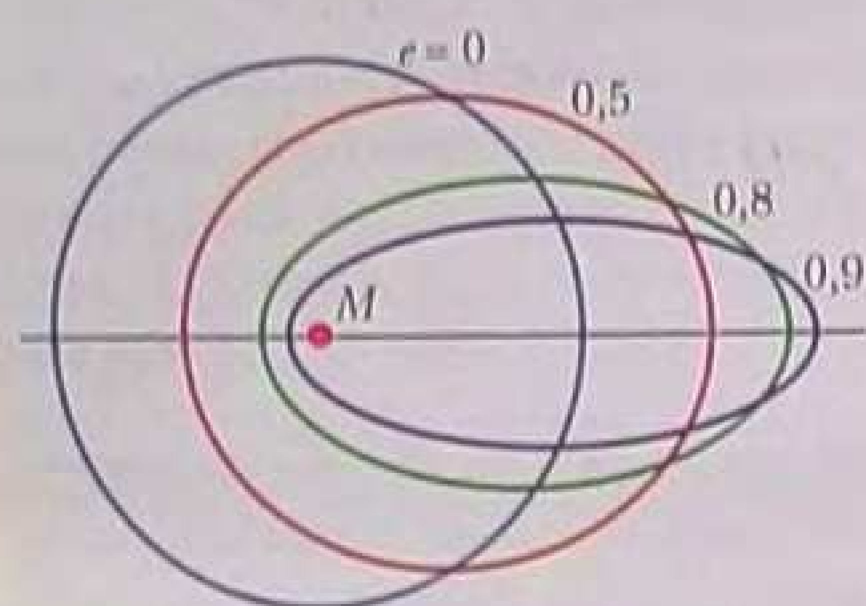


Figura 13-15 Quatro órbitas com diferentes excentricidades e em torno de um corpo de massa M. As quatro órbitas têm o mesmo semieixo maior a e, portanto, a mesma energia mecânica total E.

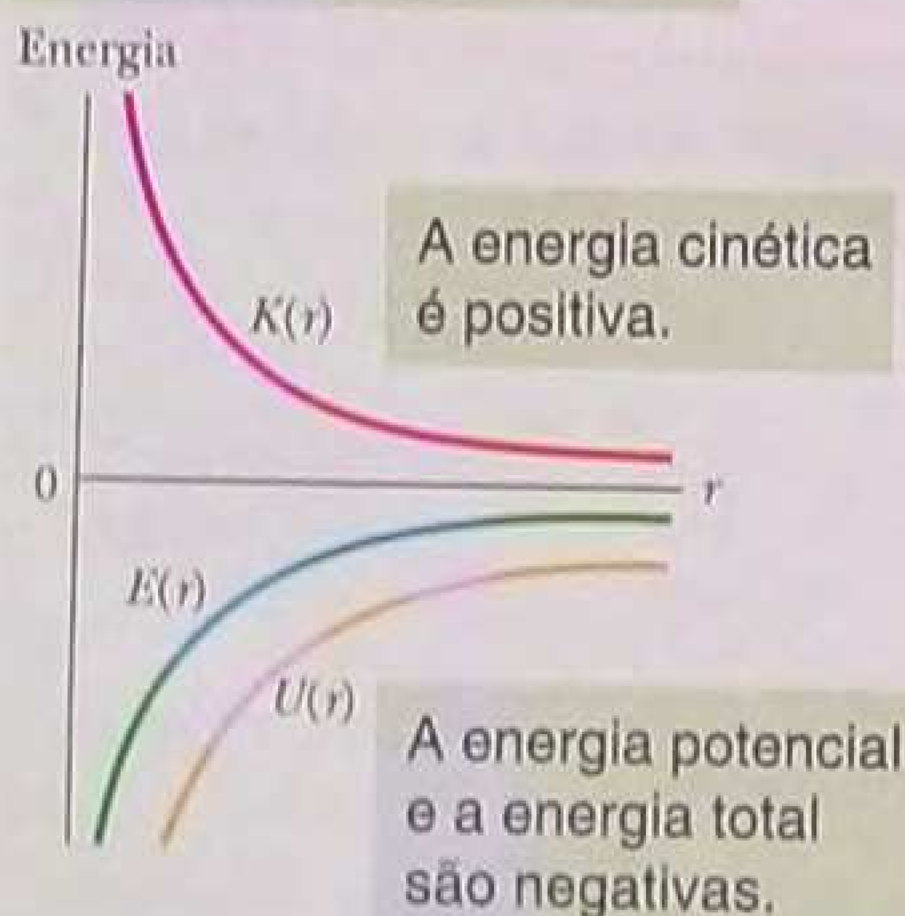
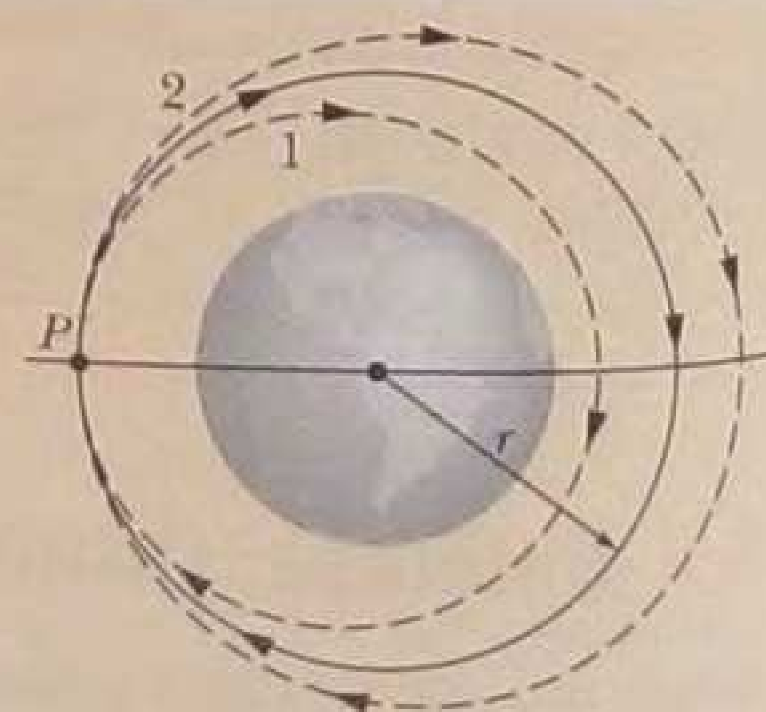


Figura 13-16 Variação da energia cinética K, da energia potencial U e da energia total E com o raio r para um satélite em órbita circular. Para qualquer valor de r, os valores de U e E são negativos, o valor de K é positivo e $E = -K$. Para $r \to \infty$, as três curvas tendem a zero.

TESTE 5

Na figura, um ônibus espacial está inicialmente em uma órbita circular de raio r em torno da Terra. No ponto P, o piloto aciona por alguns instantes um retrofoguete para reduzir a energia cinética K e a energia mecânica E do ônibus espacial. (a) Qual das órbitas elípticas tracejadas mostradas na figura o ônibus espacial passa a seguir? (b) O novo período orbital T do ônibus espacial (o tempo para retornar ao ponto P) é maior, menor ou igual ao da órbita circular?



Exemplo

Energia mecânica de uma bola de boliche em órbita

Um astronauta brincalhão lança uma bola de boliche, de massa $m = 7{,}20$ kg, em uma órbita circular em torno da Terra a uma altura h de 350 km.

(a) Qual é a energia mecânica E da bola?

IDEIA-CHAVE

Podemos calcular E usando a Eq. 13-40 ($E = -GMm/2r$) se conhecermos o raio r da órbita.

Cálculos O raio da órbita é dado por

$$r = R + h = 6370 \text{ km} + 350 \text{ km} = 6{,}72 \times 10^6 \text{ m},$$

onde R é o raio da Terra. Assim, de acordo com a Eq. 13-40, a energia mecânica é

$$E = -\frac{GMm}{2r}$$
$$= -\frac{(6{,}67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}98 \times 10^{24} \text{ kg})(7{,}20 \text{ kg})}{(2)(6{,}72 \times 10^6 \text{ m})}$$
$$= -2{,}14 \times 10^8 \text{ J} = -214 \text{ MJ}. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a energia mecânica E_0 da bola na plataforma de lançamento de Cabo Canaveral? De lá até a órbita, qual é a variação ΔE da energia mecânica da bola?

IDEIA-CHAVE

Na plataforma de lançamento, a bola *não está* em órbita e, portanto, a Eq. 13-40 *não se aplica*. Em vez disso, devemos calcular o valor de $E_0 = K_0 + U_0$, onde K_0 *é a* energia cinética da bola e U_0 é a energia potencial gravitacional do sistema bola–Terra.

Cálculos Para obter U_0, usamos a Eq. 13-21:

$$U_0 = -\frac{GMm}{R}$$
$$= -\frac{(6{,}67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}98 \times 10^{24} \text{ kg})(7{,}20 \text{ kg})}{6{,}37 \times 10^6 \text{ m}}$$
$$= -4{,}51 \times 10^8 \text{ J} = -451 \text{ MJ}.$$

A energia cinética K_0 da bola se deve ao movimento da bola com a rotação da Terra. É fácil mostrar que K_0 é menor que 1 MJ, um valor desprezível em comparação com U_0. Assim, a energia mecânica da bola na plataforma de lançamento é

$$E_0 = K_0 + U_0 \approx 0 - 451 \text{ MJ} = -451 \text{ MJ}. \qquad \text{(Resposta)}$$

O *aumento* da energia mecânica da bola da plataforma de lançamento até a órbita é

$$\Delta E = E - E_0 = (-214 \text{ MJ}) - (-451 \text{ MJ})$$
$$= 237 \text{ MJ}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Isso equivale a alguns reais de eletricidade. Obviamente, o alto custo para colocar objetos em órbita não se deve à energia mecânica necessária.

13-9 Einstein e a Gravitação

O Princípio de Equivalência

Albert Einstein disse uma vez: "Eu estava ... no escritório de patentes, em Berna, quando de repente me ocorreu um pensamento: 'Se uma pessoa cair livremente, não sentirá o próprio peso.' Fiquei surpreso. Essa ideia simples me causou uma profunda impressão. Ela me levou à teoria da gravitação."

Foi assim, segundo Einstein, que ele começou a formular a **teoria da relatividade geral**. O postulado fundamental dessa teoria da gravitação (ou seja, da atração gravitacional entre objetos) é o chamado **princípio de equivalência**, segundo o qual a gravitação e a aceleração são equivalentes. Se um físico fosse trancado em uma cabine como na Fig. 13-17, não seria capaz de dizer se a cabine estava em repouso na Terra (e sujeita apenas à força gravitacional da Terra), como na Fig. 13-17*a*, ou acelerada no espaço interestelar a 9,8 m/s² (e sujeita apenas à força responsável por essa aceleração), como na Fig. 13-17*b*. Nos dois casos, teria as mesmas sensações e leria os mesmo valores para o seu peso em uma balança. Além disso, se observasse um objeto em queda, o objeto teria a mesma aceleração em relação a ele nas duas situações.

A Curvatura do Espaço

Até agora, explicamos a gravitação como o resultado de uma força entre massas. Einstein mostrou que, na verdade, a gravitação se deve a uma curvatura do espaço

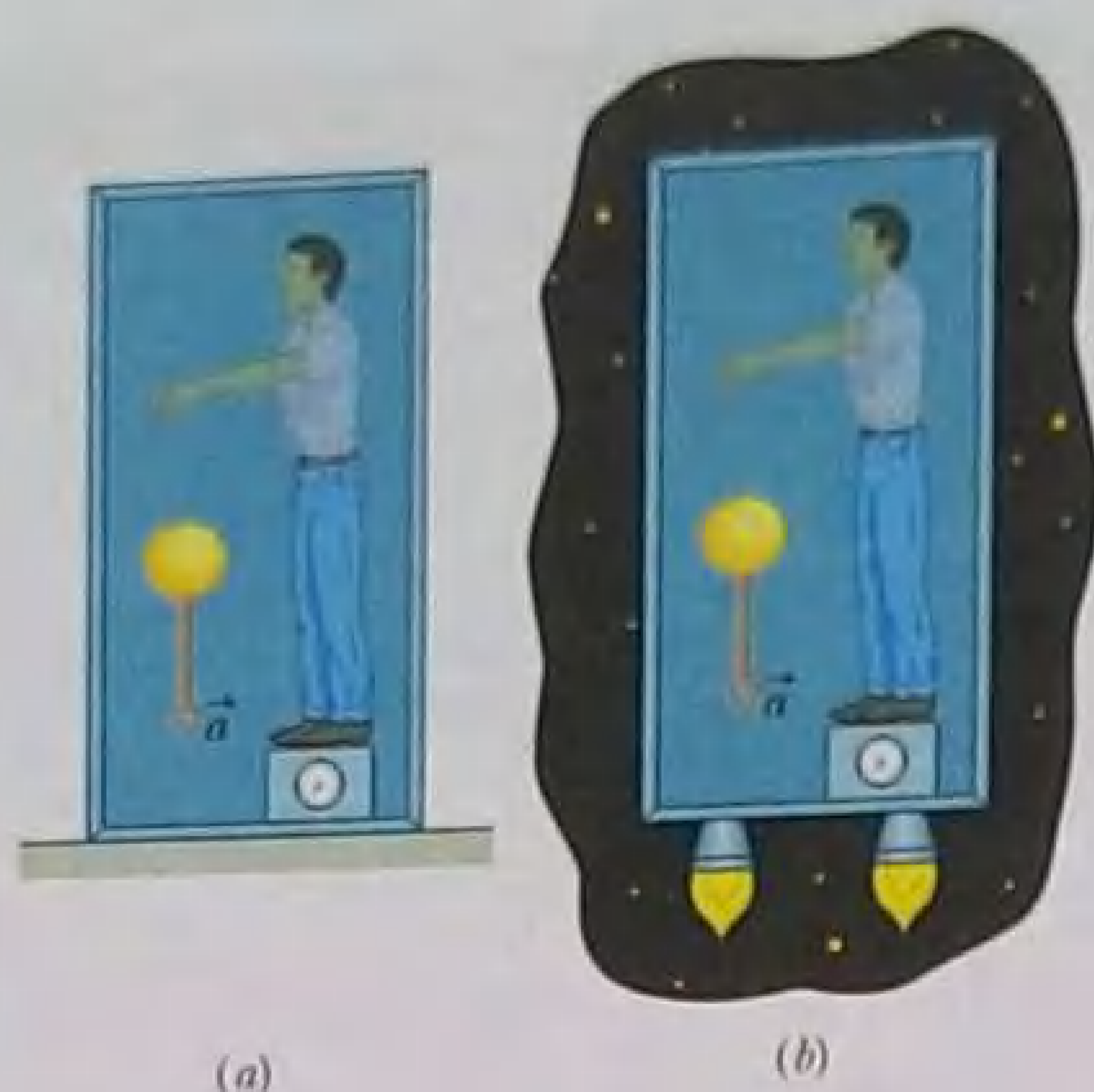


Figura 13-17 (*a*) Um físico no interior de uma cabine em repouso em relação à Terra observa um melão cair com uma aceleração $a = 9{,}8$ m/s^2. (*b*) Se a cabine estivesse no espaço sideral com uma aceleração de 9,8 m/s^2, o melão teria a mesma aceleração em relação ao físico. Não é possível para ele, através de experimentos realizados no interior da cabine, dizer qual das duas situações corresponde à realidade. Assim, por exemplo, a balança sobre a qual se encontra mostraria o mesmo peso nos dois casos.

causada pelas massas. (Como será discutido em outro capítulo deste livro, espaço e tempo são interdependentes, de modo que a curvatura a que Einstein se refere é na verdade uma curvatura do *espaço-tempo*, o conjunto das quatro dimensões do nosso universo.)

É difícil imaginar de que forma o espaço (mesmo vazio) pode uma ter uma curvatura. Uma analogia pode ajudar: suponha que estamos em órbita observando uma corrida na qual dois barcos partem do equador da Terra, separados por uma distância de 20 km, e rumam para o sul (Fig. 13-18*a*). Para os tripulantes, os barcos seguem trajetórias planas e paralelas. Entretanto, com o passar do tempo, os barcos vão se aproximando até que, ao chegarem ao Polo Sul, acabam por se chocar. Os tripulantes dos barcos podem imaginar que essa aproximação foi causada por uma força de atração entre os barcos. Observando-os do espaço, entretanto, podemos ver que os barcos se aproximaram simplesmente por causa da curvatura da superfície da Terra. Podemos constatar este fato porque estamos observando a corrida "do lado de fora" da superfície.

A Fig. 13-18*b* mostra uma corrida semelhante: duas maçãs separadas horizontalmente são liberadas da mesma altura acima da superfície da Terra. Embora as maçãs pareçam descrever trajetórias paralelas, na verdade se aproximam uma da outra porque ambas caem em direção ao centro da Terra. Podemos interpretar o movimento das maçãs em termos da força gravitacional exercida pela Terra sobre as maçãs. Podemos também interpretar o movimento em termos da curvatura do espaço nas vizinhanças da Terra, uma curvatura que se deve à massa da Terra. Desta vez, não podemos observar a curvatura porque não podemos nos colocar "do lado de fora" do espaço curvo, como fizemos no exemplo dos barcos. Entretanto, podemos representar a curvatura

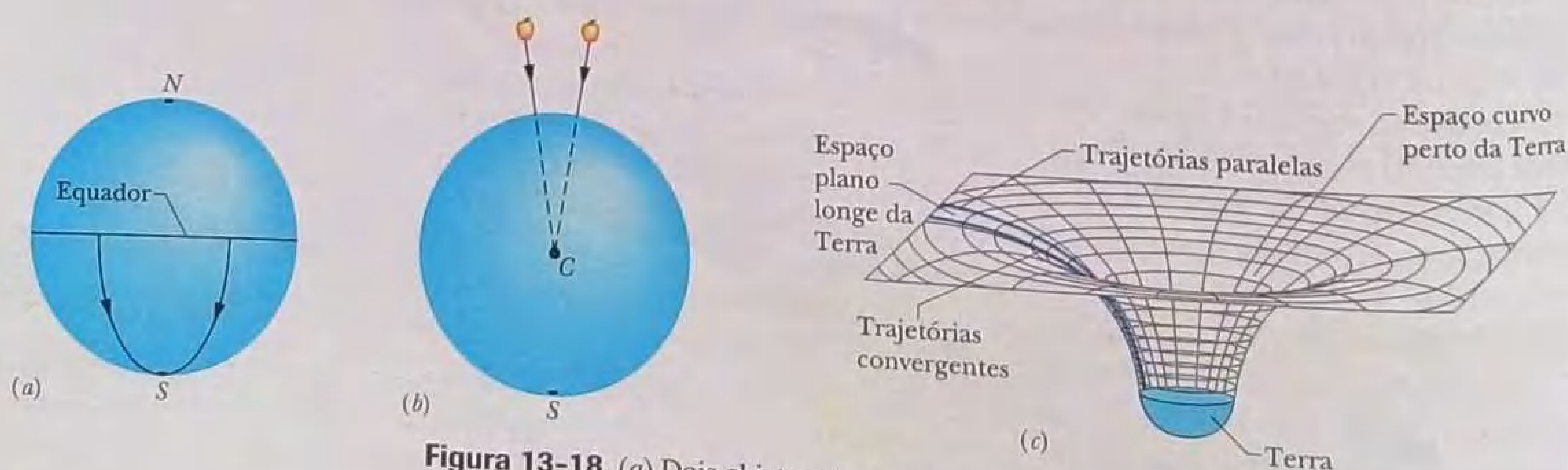
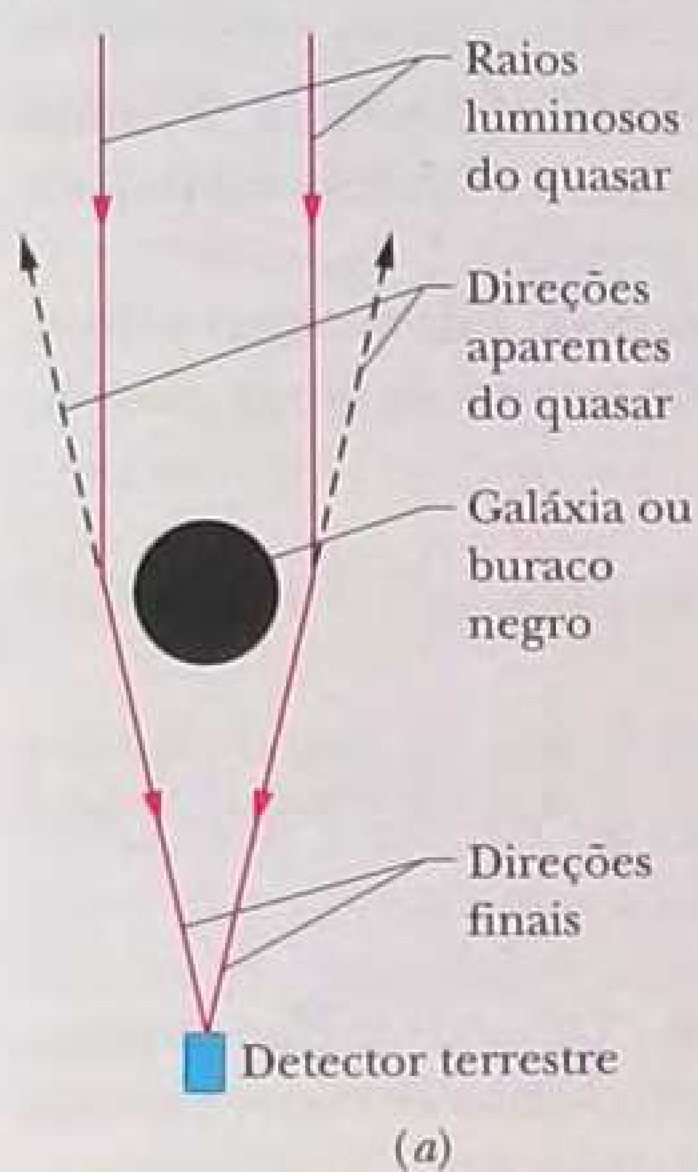


Figura 13-18 (*a*) Dois objetos que se movem ao longo de meridianos em direção ao polo Sul convergem por causa da curvatura da superfície da Terra. (*b*) Dois objetos em queda livre perto da superfície da Terra se movem ao longo de linhas que convergem para o centro da Terra por causa da curvatura do espaço nas proximidades da Terra. (*c*) Longe da Terra (e de outras massas), o espaço é plano e trajetórias paralelas permanecem paralelas. Perto da Terra, trajetórias paralelas convergem porque o espaço é encurvado pela massa da Terra.

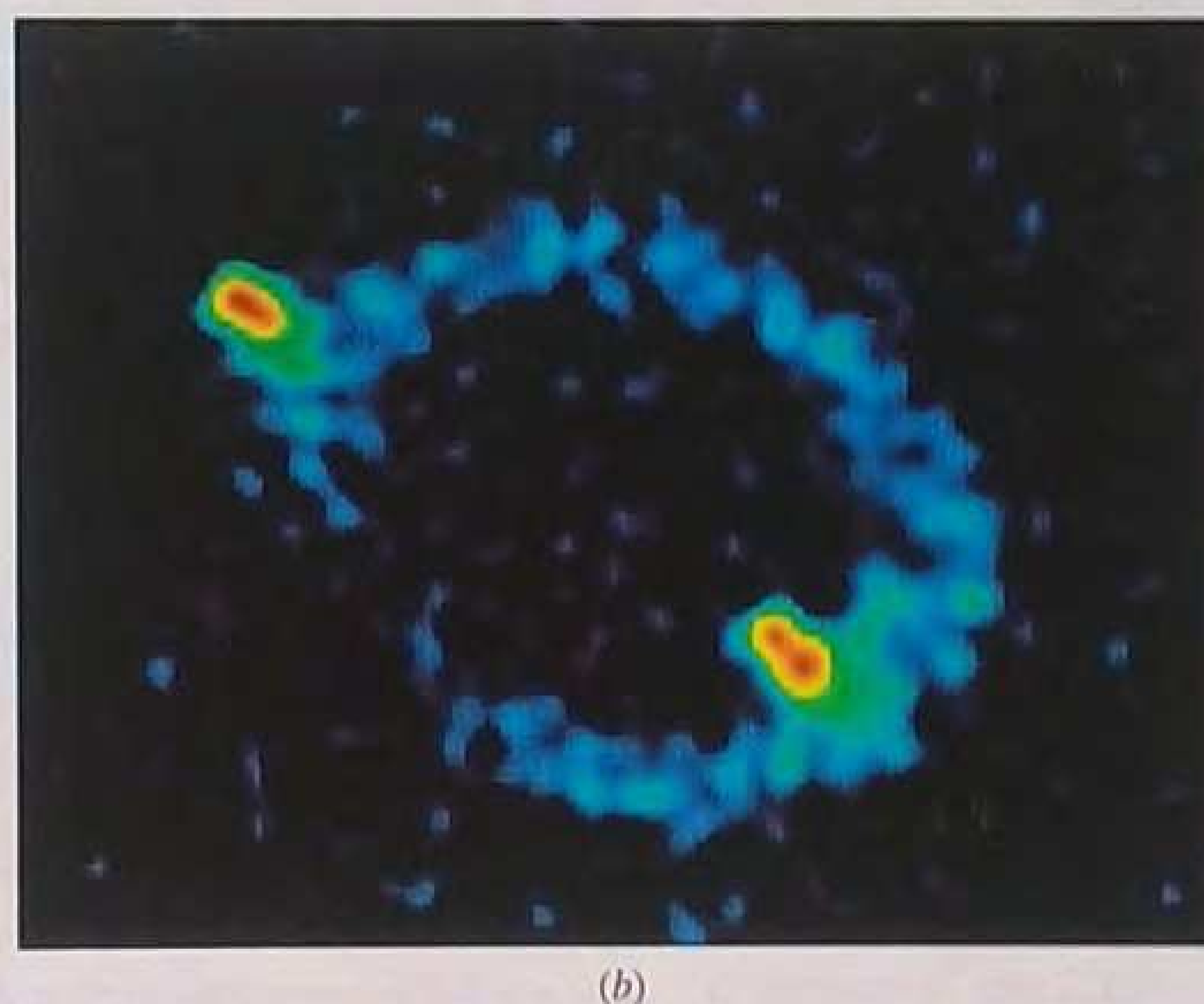
através de um desenho como o da Fig. 13-18*c*, no qual as maçãs se movem em uma superfície que se encurva em direção à Terra por causa da massa da Terra.

Quando a luz passa nas vizinhanças da Terra, a trajetória da luz se encurva ligeiramente por causa da curvatura do espaço, um efeito conhecido como *lente gravitacional*. Quando a luz passa nas proximidades de uma estrutura maior, como uma galáxia ou um buraco negro de massa elevada, a trajetória pode se encurvar ainda mais. Se existe uma estrutura desse tipo entre nós e um quasar (uma fonte de luz extremamente brilhante e extremamente distante), a luz do quasar pode se encurvar em torno da estrutura e convergir para a Terra (Fig. 13-19*a*). Assim, como a luz parece vir de direções ligeiramente diferentes no céu, vemos o mesmo quasar em todas essas direções. Em algumas situações, os quasares que enxergamos se juntam para formar um gigantesco arco luminoso, que recebe o nome de *anel de Einstein* (Fig. 13-19*b*).

Devemos atribuir a gravitação à curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massas, a uma força entre as massas, ou será que ela se deve à ação de um tipo de partícula elementar chamado de *gráviton*, como propõem algumas teorias da física moderna? Embora as teorias de Newton e Einstein tenham sido capazes de descrever com grande precisão a atração de corpos de todos os tamanhos, desde maçãs até planetas e estrelas, ainda não compreendemos perfeitamente a gravidade nem na escala cosmológica nem na escala da física quântica.



(*a*)



(*b*)

Figura 13-19 (*a*) A trajetória da luz de um quasar distante se encurva ao passar por uma galáxia ou buraco negro porque a massa da galáxia ou do buraco negro encurva o espaço próximo. Quando a luz é detectada, parece ter sido produzida em um ponto situado no prolongamento da trajetória final (retas tracejadas). (*b*) Imagem do anel de Einstein conhecido como MG1131 + 0456 na tela do computador de um telescópio. A fonte de luz (na verdade, ondas de rádio, que são uma forma invisível de luz) está muito atrás da grande galáxia invisível responsável pela formação do anel; uma parte da fonte aparece como dois pontos luminosos no anel. *(Cortesia do National Radio Astronomy Observatory)*

REVISÃO E RESUMO

A Lei da Gravitação Toda partícula do universo atrai as outras partículas com uma **força gravitacional** cujo módulo é dado por

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{(lei da gravitação de Newton)}, \qquad (13\text{-}1)$$

onde m_1 e m_2 são as massas das partículas, r é a distância entre elas e G ($= 6{,}67 \times 10^{-11}$ N · m²/kg²) é a *constante gravitacional*.

Comportamento Gravitacional de Cascas Esféricas Homogêneas A força gravitacional entre corpos de dimensões finitas pode ser calculada somando (integrando) as forças a que estão submetidas as partículas que compõem os corpos. Entretanto, se um dos corpos é uma casca esférica homogênea ou um sólido com simetria esférica, a força gravitacional resultante que o corpo exerce sobre um objeto *externo* pode ser calculada como se toda a massa da casca ou do corpo estivesse localizada no seu centro.

Superposição As forças gravitacionais obedecem ao **princípio da superposição**: se n partículas interagem, a força resultante $\vec{F}_{1,res}$ que age sobre uma partícula denominada partícula 1 é a soma das forças exercidas individualmente sobre ela pelas outras partículas:

$$\vec{F}_{1,res} = \sum_{i=2}^{n} \vec{F}_{1i}, \tag{13-5}$$

onde o somatório é uma soma vetorial das forças $\vec{F}_{1i}$ exercidas sobre a partícula 1 pelas partículas 2, 3,..., n. A força gravitacional $\vec{F}_1$ exercida por um corpo de dimensões finitas sobre uma partícula é calculada dividindo o corpo em partículas de massa infinitesimal dm, cada uma das quais produzindo uma força infinitesimal $d\vec{F}$ sobre a partícula, e integrando para obter a soma dessas forças:

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F}. \tag{13-6}$$

Aceleração Gravitacional A *aceleração gravitacional* a_g de uma partícula (de massa m) se deve unicamente à força gravitacional que age sobre ela. Quando uma partícula está a uma distância r do centro de um corpo esférico homogêneo de massa M, o módulo F da força gravitacional sobre a partícula é dado pela Eq. 13-1. Assim, de acordo com a segunda lei de Newton,

$$F = ma_g, \tag{13-10}$$

o que nos dá

$$a_g = \frac{GM}{r^2}. \tag{13-11}$$

Aceleração de Queda Livre e Peso Como a Terra não é perfeitamente esférica, está girando e sua massa não está distribuída uniformemente, a aceleração de queda livre $\vec{g}$ de uma partícula nas proximidades da Terra difere ligeiramente da aceleração gravitacional $\vec{a}_g$ e o peso da partícula (igual a mg) difere do módulo da força gravitacional que age sobre a partícula, dada pela Eq. 13-1.

Gravitação no Interior de uma Casca Esférica Uma casca homogênea de matéria não exerce força gravitacional sobre uma partícula localizada no seu interior. Isso significa que, se uma partícula estiver localizada no interior de uma esfera maciça homogênea a uma distância r do centro, a força gravitacional exercida sobre a partícula se deve apenas à massa M_{int} que se encontra no interior de uma esfera de raio r. Essa massa é dada por

$$M_{int} = \rho \frac{4\pi r^3}{3}, \tag{13-18}$$

onde ρ é a massa específica da esfera.

Energia Potencial Gravitacional A energia potencial gravitacional $U(r)$ de um sistema de duas partículas de massas M e m, separadas por uma distância r, é igual ao negativo do trabalho que seria realizado pela força gravitacional de uma partícula agindo sobre a outra se a distância entre elas mudasse de infinita (muito grande) até r. Essa energia é dada por

$$U = -\frac{GMm}{r} \quad \text{(energia potencial gravitacional)}. \tag{13-21}$$

Energia Potencial de um Sistema Se um sistema contém mais de duas partículas, a energia potencial gravitacional U é a soma de termos que representam as energias potenciais de todos os pares de partículas. Por exemplo: para três partículas de massas m_1, m_2 e m_3,

$$U = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right). \tag{13-22}$$

Velocidade de Escape Um objeto escapará da atração gravitacional de um astro de massa M e raio R (isto é, atingirá uma distância infinita) se a velocidade do objeto nas proximidades da superfície do astro for igual ou maior que a **velocidade de escape**, dada por

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \tag{13-28}$$

Leis de Kepler O movimento dos planetas obedece às três leis de Kepler, que são uma consequência direta das leis do movimento e da gravitação de Newton e também se aplicam aos satélites, tanto naturais como artificiais:

1. ***Lei das órbitas.*** Todos os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol em um dos focos.
2. ***Lei das áreas.*** A reta que liga qualquer planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais. (Esta lei é equivalente à lei de conservação do momento angular.)
3. ***Lei dos períodos.*** O quadrado do período T de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semieixo maior a da órbita. Para órbitas circulares de raio r,

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)r^3 \quad \text{(lei dos períodos)}, \tag{13-34}$$

onde M é a massa do corpo atrator (o Sol, no caso do sistema solar). No caso de órbitas elípticas, o raio r é substituído pelo semieixo maior a.

Energia no Movimento Planetário Quando um planeta ou satélite de massa m se move em uma órbita circular de raio r, a energia potencial U e a energia cinética K são dadas por

$$U = -\frac{GMm}{r} \quad \text{e} \quad K = \frac{GMm}{2r}. \tag{13-21, 13-38}$$

A energia mecânica $E = K + U$ é, portanto,

$$E = -\frac{GMm}{2r}. \tag{13-40}$$

No caso de uma órbita elíptica de semieixo maior a,

$$E = -\frac{GMm}{2a}. \tag{13-42}$$

Teoria da Gravitação de Einstein Einstein mostrou que gravitação e aceleração são equivalentes. Esse **princípio de equivalência** é a base de uma teoria da gravitação (a **teoria da relatividade geral**) que explica os efeitos gravitacionais em termos de uma curvatura do espaço.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PA
BIBLIOTECA CENTRAL

PERGUNTAS

1 Na Fig. 13-20, uma partícula de massa M está no centro de um arranjo quadrado de outras partículas, separadas por uma distância d ou $d/2$ ao longo do perímetro do quadrado. Quais são o módulo e a orientação da força gravitacional resultante a que está sujeita a partícula central?

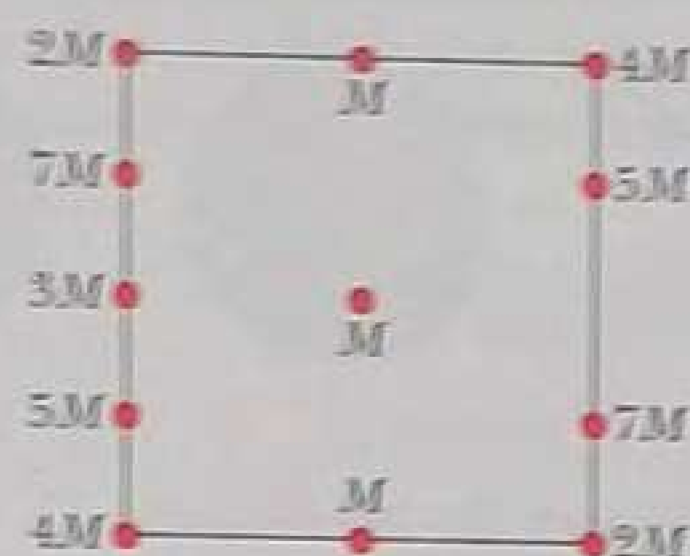


Figura 13-20 Pergunta 1.

2 A Fig. 13-21 mostra três arranjos de quatro partículas iguais, com três delas sobre uma circunferência com 0,20 m de raio e a quarta no centro do círculo. (a) Ordene os arranjos de acordo com o módulo da força gravitacional resultante a que a partícula central está submetida, em ordem decrescente. (b) Ordene os arranjos de acordo com a energia potencial gravitacional do sistema de quatro partículas, começando pela menos negativa.

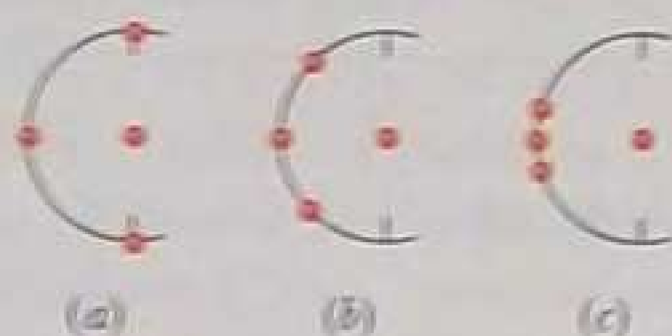


Figura 13-21 Pergunta 2.

3 Na Fig. 13-22, uma partícula central está cercada por dois anéis circulares de partículas, de raios r e R, com $R > r$. Todas as partículas têm a mesma massa m. Quais são o módulo e a orientação da força gravitacional resultante a que está submetida a partícula central?

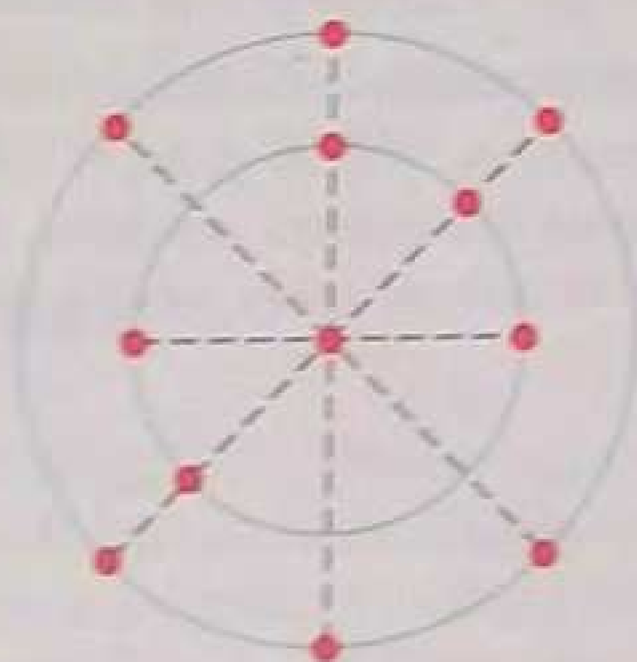


Figura 13-22 Pergunta 3.

4 Na Fig. 13-23, duas partículas, de massas m e $2m$, estão fixas em um eixo. (a) Em que lugar do eixo uma terceira partícula, de massa $3m$, pode ser colocada (excluindo o infinito) para que a força gravitacional resultante exercida sobre ela pelas duas primeiras partículas seja nula: à esquerda das duas primeiras partículas, à direita, entre elas, porém mais perto da partícula de massa maior, ou entre elas, porém mais perto da partícula de massa menor? (b) A resposta muda se a terceira partícula possui uma massa de $16m$? (c) Existe algum ponto fora do eixo (excluindo o infinito) no qual a força resultante exercida sobre a terceira partícula é nula?

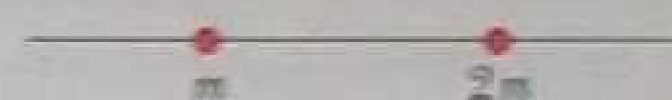


Figura 13-23 Pergunta 4.

5 A Fig. 13-24 mostra três situações que envolvem uma partícula pontual P de massa m e uma casca esférica com uma massa M uniformemente distribuída. Os raios das cascas são dados. Ordene as situações de acordo com o módulo da força gravitacional exercida pela casca sobre a partícula P, em ordem decrescente.

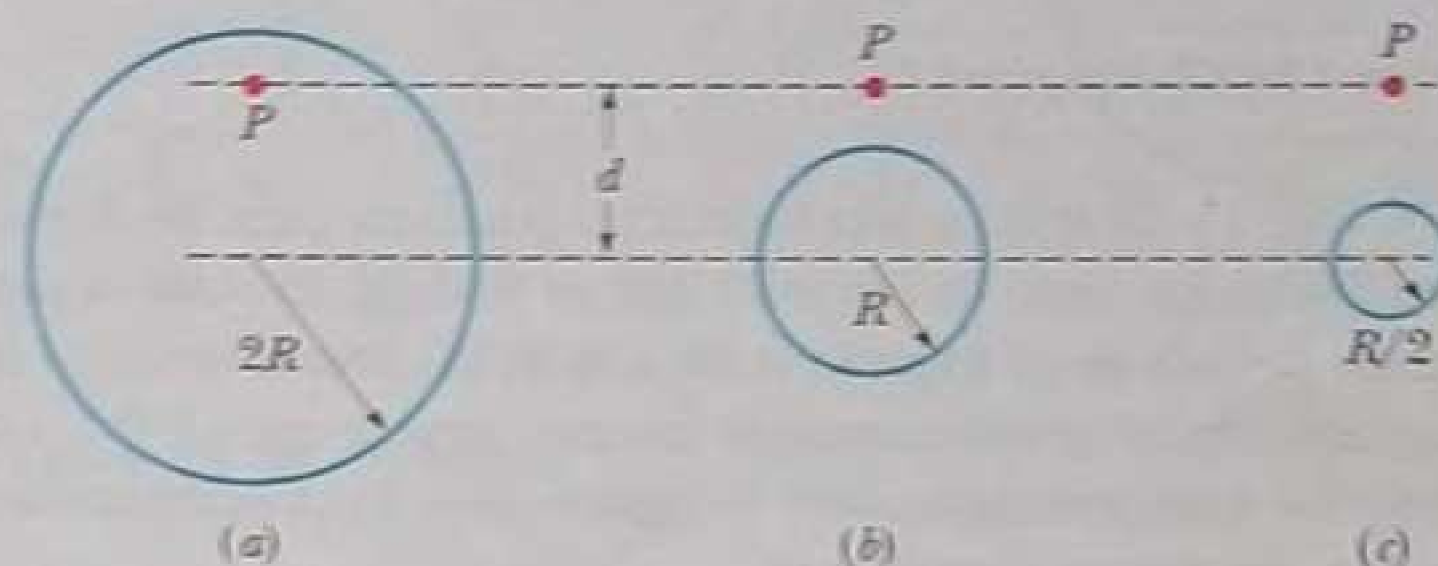


Figura 13-24 Pergunta 5.

6 Na Fig. 13-25, três partículas são mantidas fixas. A massa de B é maior que a massa de C. Uma quarta partícula (partícula D) pode ser colocada em algum lugar de tal forma que a força gravitacional resultante exercida sobre a partícula A pelas partículas B, C e D seja nula? Caso a resposta seja afirmativa, em que quadrante deve ser colocada e nas proximidades de que eixo?

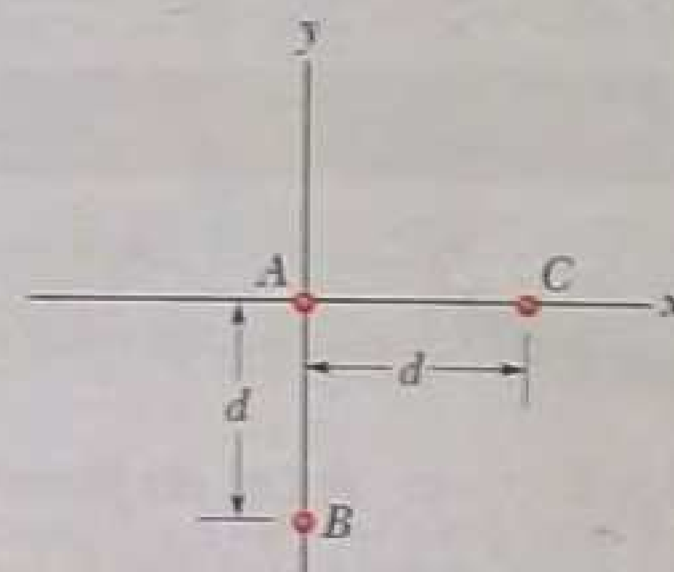


Figura 13-25 Pergunta 6.

7 Ordene os quatro sistemas de partículas de mesma massa do Teste 2 de acordo com o valor absoluto da energia potencial gravitacional do sistema, começando pelo maior.

8 A Fig. 13-26 mostra a aceleração gravitacional a_g de quatro planetas em função da distância r do centro do planeta, começando na superfície do planeta (ou seja, na distância R_1, R_2, R_3 ou R_4). Os gráficos 1 e 2 coincidem para $r \geq R_2$; os gráficos 3 e 4 coincidem para $r \geq R_4$. Ordene os quatro planetas de acordo (a) com a massa e (b) com a massa específica, em ordem decrescente.

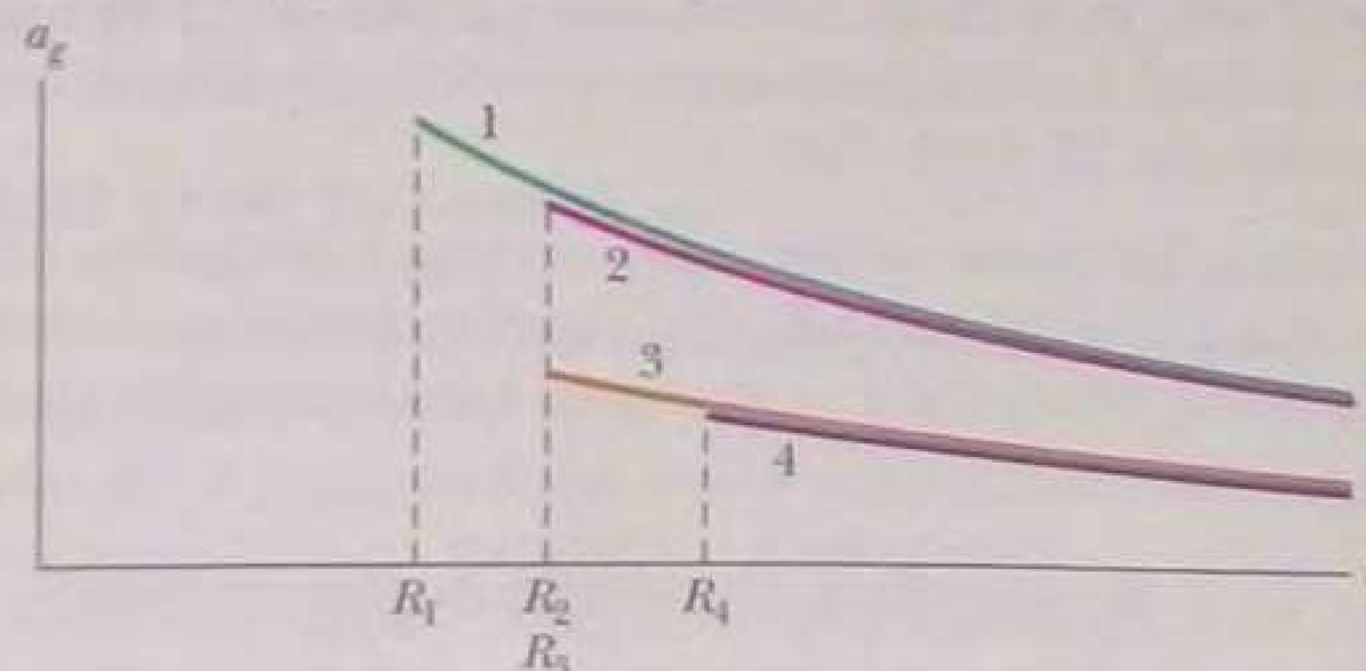


Figura 13-26 Pergunta 8.

9 A Fig. 13-27 mostra três partículas inicialmente mantidas fixas, com *B* e *C* iguais e posicionadas simetricamente em relação ao eixo *y*, a uma distância *d* de *A*. (a) Qual é a orientação da força gravitacional resultante $\vec{F}_{res}$ que age sobre *A*? (b) Se a partícula *C* é deslocada radialmente para longe da origem, a orientação de $\vec{F}_{res}$ varia? Caso a resposta seja afirmativa, como varia e qual é o limite da variação?

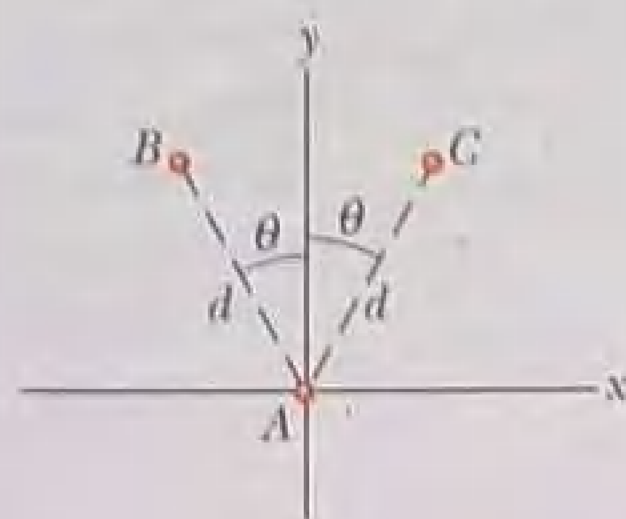


Figura 13-27 Pergunta 9.

10 A Fig. 13-28 mostra seis trajetórias possíveis para um foguete em órbita em torno de um astro que se desloca do ponto *a* para o ponto *b*. Ordene as trajetórias de acordo (a) com a variação da energia potencial gravitacional do sistema foguete–astro e (b) com o trabalho total realizado sobre o foguete pela força gravitacional do astro, em ordem decrescente.

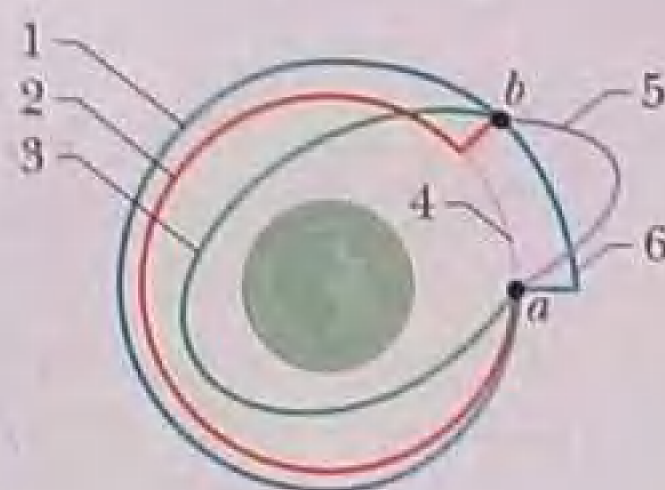


Figura 13-28 Pergunta 10.

11 A Fig. 13-29 mostra três planetas esféricos homogêneos que têm a mesma massa e o mesmo volume. Os períodos de rotação *T* dos planetas são dados e dois pontos da superfície são identificados por letras em cada planeta, um no equador e outro no Polo Norte. Ordene os pontos de acordo com o valor local da aceleração de queda livre *g*, começando pelo maior.

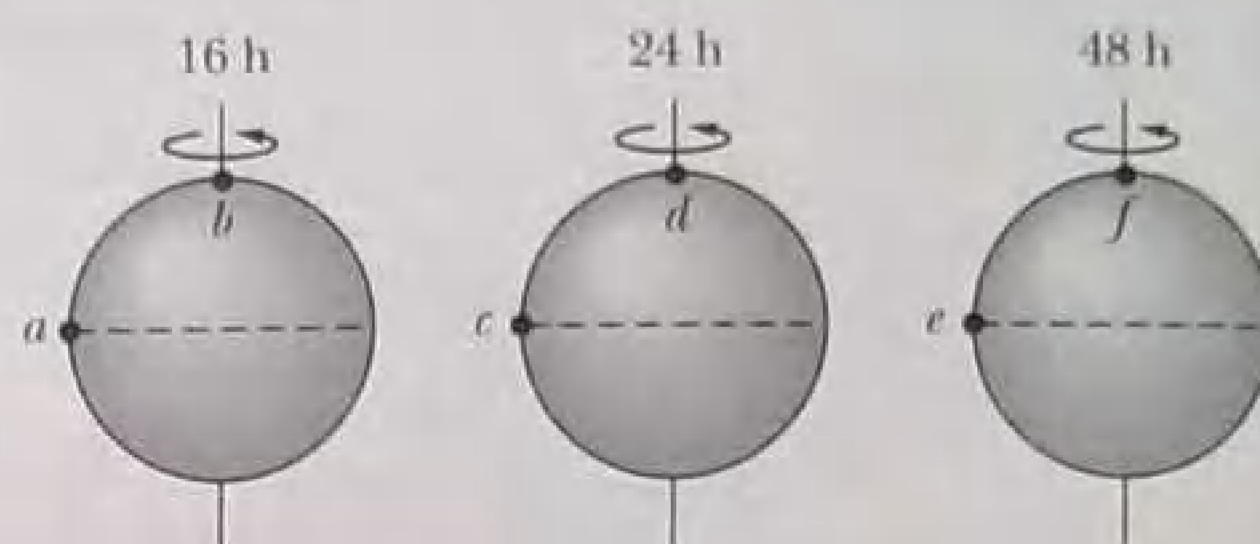


Figura 13-29 Pergunta 11.

12 Na Fig. 13-30, uma partícula de massa *m* (não mostrada) pode ser deslocada desde uma distância infinita até uma de três posições possíveis, *a*, *b* e *c*. Duas outras partículas, de massas *m* e 2*m*, são mantidas fixas. Ordene as três posições possíveis de acordo com trabalho realizado pela força gravitacional resultante sobre a partícula móvel durante o deslocamento, em ordem decrescente.

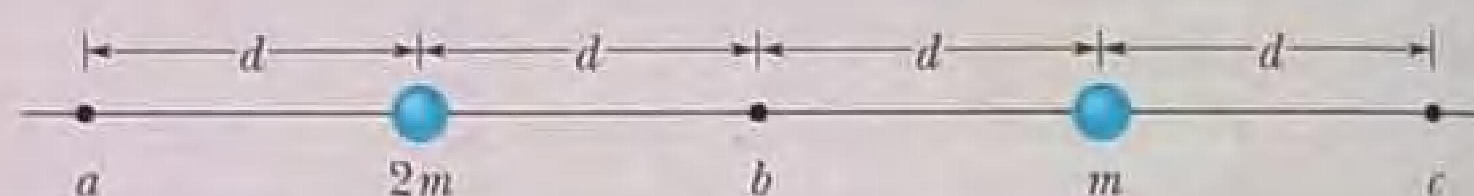


Figura 13-30 Pergunta 12.

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Seção 13-2 A Lei da Gravitação de Newton

•1 Uma massa *M* é dividida em duas partes, *m* e *M* – *m*, que são em seguida separadas por uma certa distância. Qual é a razão *m*/*M* que maximiza o módulo da força gravitacional entre as partes?

•2 *Influência da Lua.* Algumas pessoas acreditam que suas atividades são controladas pela Lua. Se a Lua estava do outro lado da Terra, ao longo de uma reta que passava por você e pelo centro da Terra, e passa para uma posição diametralmente oposta, verticalmente acima da sua cabeça, qual é a variação percentual (a) da atração gravitacional que a Lua exerce sobre você e (b) do seu peso? Suponha que a distância Terra – Lua (de centro a centro) é $3{,}82 \times 10^8$ m e que o raio da Terra é $6{,}37 \times 10^6$ m.

•3 Qual deve ser a distância entre uma partícula de 5,2 kg e uma partícula de 2,4 kg para que a atração gravitacional entre elas tenha um módulo de $2{,}3 \times 10^{-12}$ N?

•4 Tanto o Sol quanto a Terra exercem uma força gravitacional sobre a Lua. Qual é a razão F_{Sol}/F_{Terra} entre as duas forças? (A distância média entre o Sol e a Lua é igual à distância média entre o Sol e a Terra.)

Seção 13-3 Gravitação e o Princípio da Superposição

•5 *Miniburacos negros.* Talvez existam miniburacos negros no universo, produzidos logo após o big bang. Se um desses objetos, com uma massa de 1×10^{11} kg (e um raio de apenas 1×10^{-16} m) se aproximasse da Terra, a que distância da sua cabeça a força gravitacional do miniburaco seria igual à da Terra?

•6 Na Fig. 13-31, um quadrado com 20,0 cm de lado é formado por quatro esferas de massas m_1 = 5,00 g, m_2 = 3,00 g, m_3 = 1,00 g e m_4 = 5,00 g. Em termos dos vetores unitários, qual é a força gravitacional exercida pelas esferas sobre uma esfera central de massa m_5 = 2,50 g?

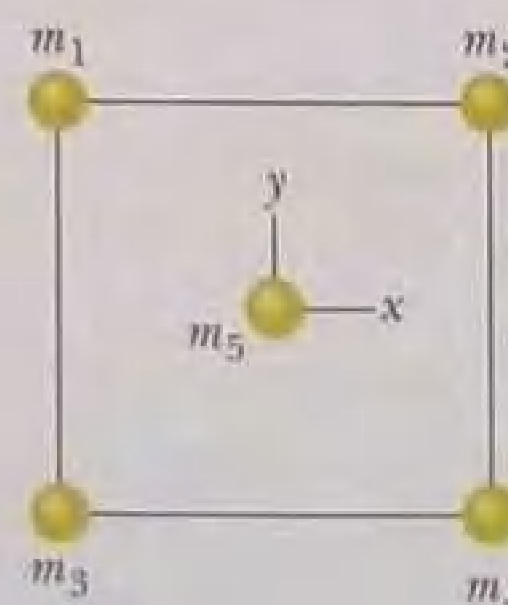


Figura 13-31 Problema 6.

•7 *Uma dimensão.* Na Fig. 13-32, duas partículas pontuais são mantidas fixas em um eixo *x*, separadas por uma distância *d*. A partícula *A* tem massa m_A e a partícula B tem massa $3{,}00m_A$. Uma terceira partícula *C*, de massa $75{,}0m_A$, deve ser colocada sobre o eixo *x*, nas proximidades das partículas *A* e *B*. Em termos da distância *d*, qual

deve ser a coordenada x da partícula C para que a força gravitacional a que está submetida a partícula A seja nula?



Figura 13-32 Problema 7.

•8 Na Fig. 13-33, três esferas de 5,00 kg estão localizadas a distâncias $d_1 = 0{,}300$ m e $d_2 = 0{,}400$ m. Qual é (a) o módulo e (b) a orientação (em relação ao semieixo x positivo) da força gravitacional a que está sujeita a esfera B?

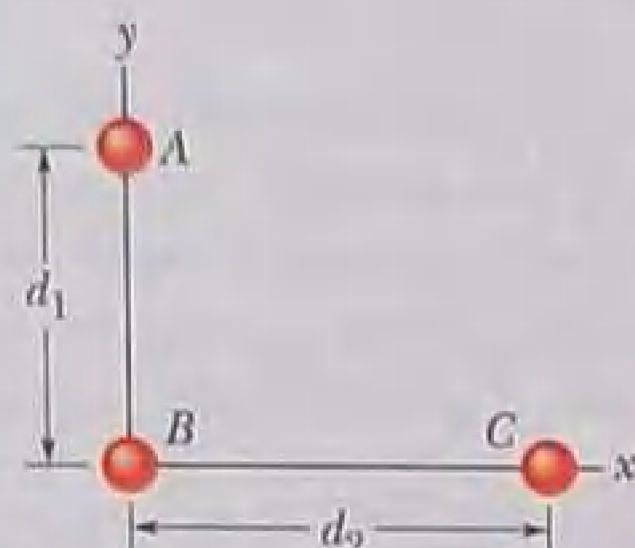


Figura 13-33 Problema 8.

•9 A que distância da Terra deve estar uma sonda espacial ao longo da reta que liga nosso planeta ao Sol para que a atração gravitacional do Sol seja igual à atração da Terra?

••10 *Duas dimensões.* Na Fig. 13-34, três partículas pontuais são mantidas fixas em um plano xy. A partícula A tem massa m_A, a partícula B tem massa $2{,}00m_A$ e a partícula C tem massa $3{,}00m_A$. Uma quarta partícula, de massa $4{,}00m_A$, pode ser colocada nas proximidades das outras três partículas. Em termos da distância d, em que valor da coordenada (a) x e (b) y a partícula D deve ser colocada para que a força gravitacional exercida pelas partículas B, C e D sobre a partícula A seja nula?

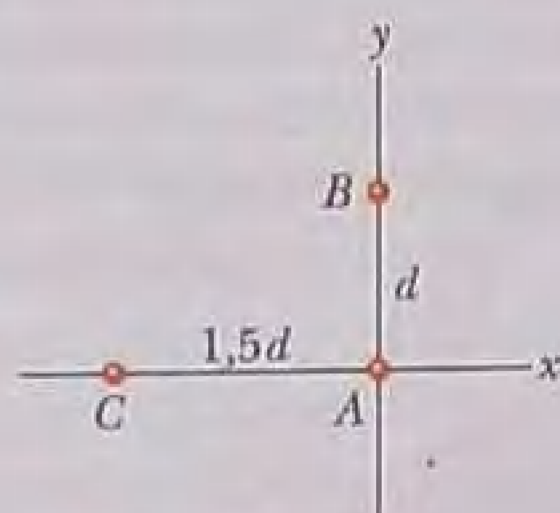


Figura 13-34 Problema 10.

••11 Como mostra a Fig. 13-35, duas esferas de massa m e uma terceira esfera de massa M formam um triângulo equilátero e uma quarta esfera de massa m_4 ocupa o centro do triângulo. A força gravitacional sobre essa esfera central é nula. (a) Qual é o valor de M em termos de m? (b) Se dobrarmos o valor de m_4, qual será o novo módulo da força gravitacional a que está submetida a esfera central?

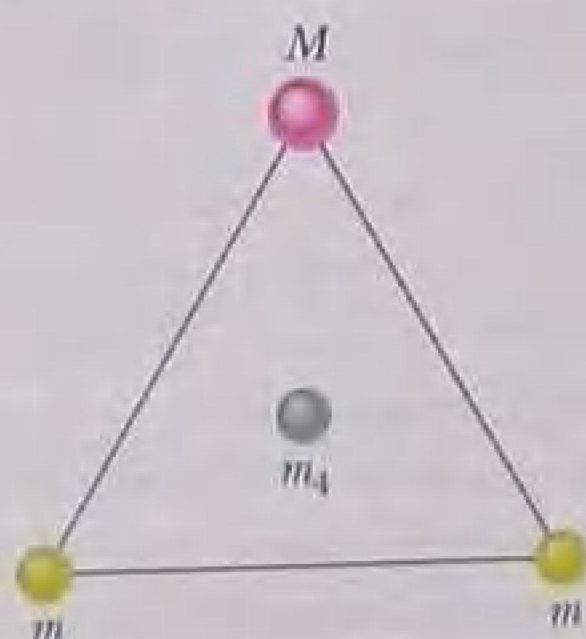


Figura 13-35 Problema 11.

••12 Na Fig. 13-36a, a partícula A é mantida fixa em $x = -0{,}20$ m no eixo x e a partícula B, com uma massa de 1,0 kg, é mantida fixa na origem. Uma partícula C (não mostrada) pode ser deslocada ao longo do eixo x, entre a partícula B e $x = \infty$. A Fig. 13-36b mostra a componente x, $F_{res,x}$, da força gravitacional exercida pelas partículas A e C sobre a partícula B em função da posição x da partícula C. O gráfico, na verdade, se estende indefinidamente para a direita, tendendo assintoticamente para $-4{,}17 \times 10^{-10}$ N para $x \to \infty$. Qual é a massa (a) da partícula A e (b) da partícula C?

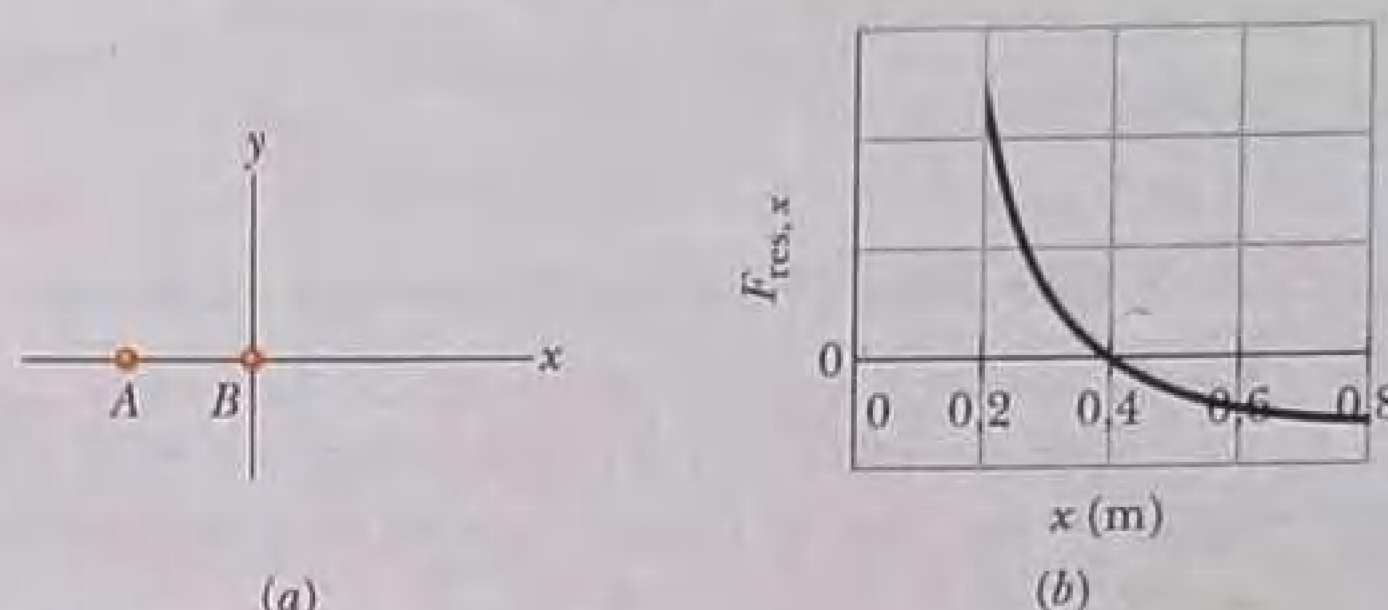


Figura 13-36 Problema 12.

••13 A Fig. 13-37 mostra uma cavidade esférica no interior de uma esfera de chumbo de raio $R = 4{,}00$ cm; a superfície da cavidade passa pelo centro da esfera e "toca" o lado direito da esfera. A massa da esfera antes de ser criada a cavidade era $M = 2{,}95$ kg. Com que força gravitacional a esfera de chumbo com a cavidade atrai uma pequena esfera de massa $m = 0{,}431$ kg que se encontra a uma distância $d = 9{,}00$ cm do centro da esfera de chumbo, sobre a reta que liga os centros das esferas e o centro da cavidade?

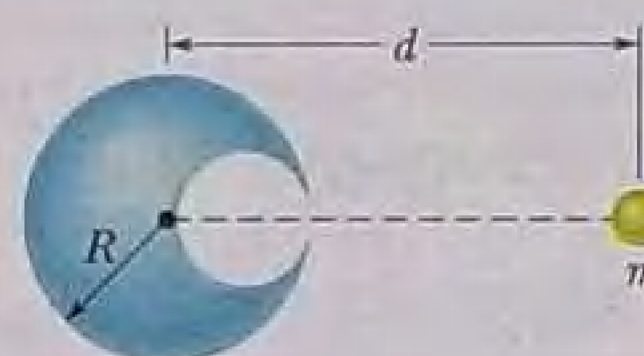


Figura 13-37 Problema 13.

••14 Três partículas pontuais são mantidas fixas em um plano xy. Duas delas, a partícula A de massa 6,00 g e a partícula B de massa 12,0 g, são mostradas na Fig. 13-38, separadas por uma distância $d_{AB} = 0{,}500$ m; $\theta = 30°$. A partícula C, cuja massa é 8,00 g, não é mostrada. A força gravitacional que as partículas B e C exercem sobre a partícula A tem um módulo de $2{,}77 \times 10^{-14}$ N e faz um ângulo de $-163{,}8°$ com o semieixo x positivo. Qual é (a) a coordenada x e (b) a coordenada y da partícula C?

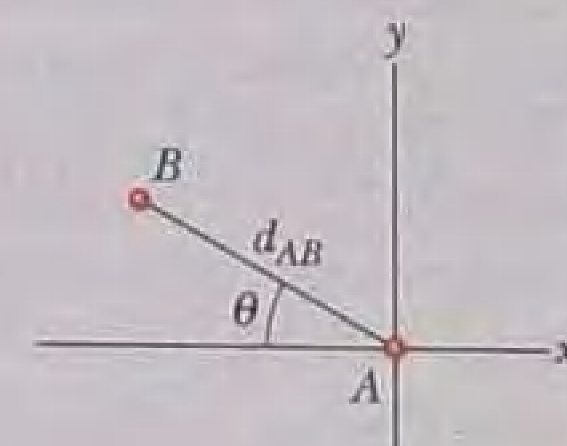


Figura 13-38 Problema 14.

•••15 *Três dimensões.* Três partículas pontuais são mantidas fixas em um sistema de coordenadas xyz. A partícula A, na origem, tem massa m_A. A partícula B, nas coordenadas $(2{,}00d; 1{,}00d; 2{,}00d)$, tem massa $2{,}00m_A$ e a partícula C, nas coordenadas $(-1{,}00d; 2{,}00d; -3{,}00d)$ tem massa $3{,}00m_A$. Uma quarta partícula D, de massa $4{,}00m_A$, pode ser colocada nas proximidades das outras partículas. Em termos da distância d, em que coordenada (a) x, (b) y e (c) z a

partícula D deve ser colocada para que a força gravitacional exercida pelas partículas B, C e D sobre a partícula A seja nula?

•••16 Na Fig. 13-39, uma partícula de massa $m_1 = 0,67$ kg está a uma distância $d = 23$ cm de uma das extremidades de uma barra homogênea de comprimento $L = 3,0$ m e massa $M = 5,0$ kg. Qual é o módulo da força gravitacional $\vec{F}$ que a barra exerce sobre a partícula?

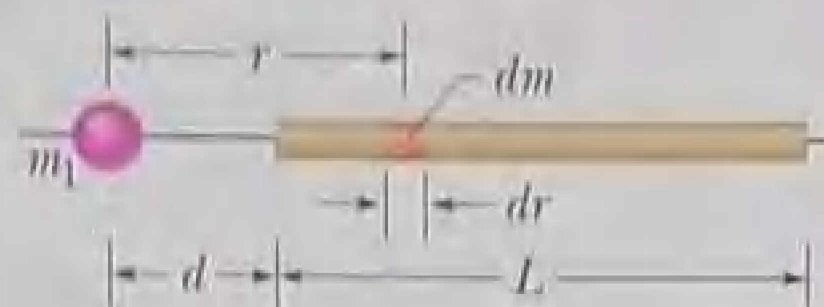


Figura 13-39 Problema 16.

Seção 13-4 A Gravitação Perto da Superfície da Terra

•17 (a) Quanto pesaria um objeto na superfície da Lua se pesa 100 N na superfície da Terra? (b) A quantos raios terrestres este mesmo objeto deveria estar do centro da Terra para ter o mesmo peso que na superfície da Lua?

•18 *Atração de uma montanha.* Uma grande montanha praticamente não afeta a direção "vertical" indicada por uma linha de prumo. Suponha que a montanha possa ser modelada por uma esfera de raio $R = 2,00$ km e massa específica $2,6 \times 10^3$ kg/m³. Suponha também que uma linha de prumo de 0,50 m de comprimento seja pendurada a uma distância $3R$ do centro da esfera e que a esfera atraia horizontalmente o peso da linha de prumo. Qual será o deslocamento do peso da linha de prumo em direção à esfera?

•19 A que altitude acima da superfície da Terra a aceleração gravitacional é 4,9 m/s²?

•20 *Edifício de uma milha.* Em 1956, Frank Lloyd Wright propôs a construção de um edifício com uma milha de altura em Chicago. Suponha que o edifício tivesse sido construído. Desprezando a rotação da Terra, determine a variação do seu peso se você subisse de elevador do andar térreo, onde você pesa 600 N, até o alto do edifício.

••21 Acredita-se que algumas estrelas de nêutrons (estrelas extremamente densas) estão girando a cerca de 1 rev/s. Se uma dessas estrelas tem um raio de 20 km, qual deve ser, no mínimo, a sua massa para que uma partícula na superfície da estrela permaneça no lugar apesar da rotação?

••22 O raio R_h e a massa M_h de um buraco negro estão relacionados através da equação $R_h = 2GM_h/c^2$, onde c é a velocidade da luz. Suponha que a aceleração gravitacional a_g de um objeto a uma distância $r_o = 1,001R_h$ do centro do buraco negro seja dada pela Eq. 13-11 (o que é verdade para buracos negros grandes). (a) Determine o valor de a_g a uma distância r_o em termos de M_h. (b) O valor de a_g à distância r_o aumenta ou diminui quando M_h aumenta? (c) Quanto vale a_g à distância r_o para um buraco negro muito grande cuja massa é $1,55 \times 10^{12}$ vezes a massa solar de $1,99 \times 10^{30}$ kg? (d) Se uma astronauta com 1,70 m de altura está à distância r_o com os pés voltados para o buraco negro, qual é a diferença entre a aceleração gravitacional da cabeça e dos pés? (e) A astronauta sente algum desconforto?

••23 Um certo planeta é modelado por um núcleo de raio R e massa M cercado por uma casca de raio interno R, raio externo $2R$ e massa $4M$. Se $M = 4,1 \times 10^{24}$ kg e $R = 6,0 \times 10^6$ m, qual é a aceleração gravitacional de uma partícula em pontos situados a uma distância (a) R e (b) $3R$ do centro do planeta?

Seção 13-5 A Gravitação no Interior da Terra

••24 A Fig. 13-40 mostra duas cascas esféricas concêntricas homogêneas de massas M_1 e M_2. Determine o módulo da força gravitacional a que está sujeita uma partícula de massa m situada a uma distância (a) a, (b) b e (c) c do centro comum das cascas.

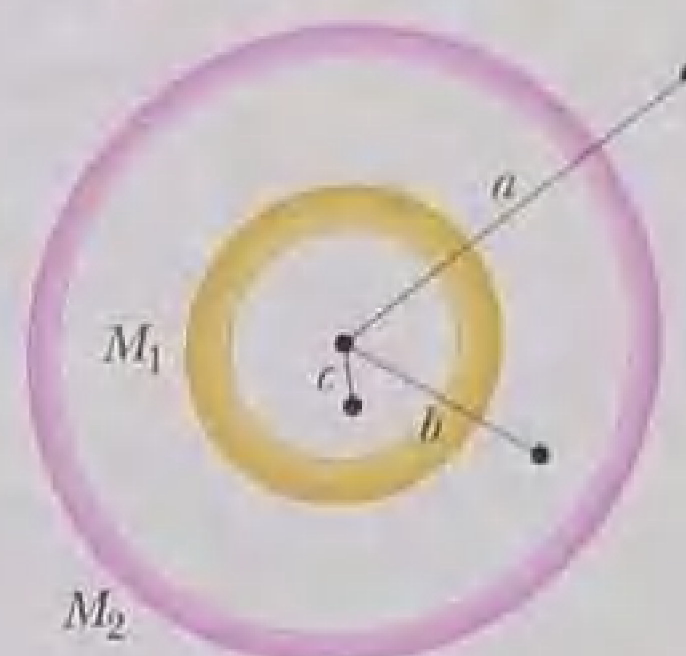


Figura 13-40 Problema 24.

••25 Uma esfera maciça homogênea tem uma massa de $1,0 \times 10^4$ kg e um raio de 1,0 m. Qual é o módulo da força gravitacional exercida pela esfera sobre uma partícula de massa m localizada a uma distância de (a) 1,5 m e (b) 0,50 m do centro da esfera? (c) Escreva uma expressão geral para o módulo da força gravitacional sobre a partícula a uma distância $r \le 1,0$ m do centro da esfera.

••26 Considere um pulsar, uma estrela de densidade extremamente elevada, com uma massa M igual à do Sol ($1,98 \times 10^{30}$ kg), um raio R de apenas 12 km e um período de rotação T de 0,041 s. Qual é a diferença percentual entre a aceleração de queda livre g e a aceleração gravitacional a_g no equador desta estrela esférica?

••27 A Fig. 13-41 mostra, fora de escala, um corte transversal da Terra. O interior da Terra pode ser dividido em três regiões: a *crosta*, o *manto* e o *núcleo*. A figura mostra as dimensões das três regiões e as respectivas massas. A Terra tem uma massa total de $5,98 \times 10^{24}$ kg e um raio de 6370 km. Despreze a rotação da Terra e suponha que ela é esférica. (a) Calcule a_g na superfície. (b) Suponha que seja feita uma perfuração até a interface da crosta com o manto, a uma profundidade de 25,0 km; qual é o valor de a_g no fundo da perfuração? (c) Suponha que a Terra fosse uma esfera homogênea com a mesma massa total e o mesmo volume. Qual seria o valor de a_g a uma profundidade de 25,0 km? (Medidas precisas de a_g ajudam a revelar a estrutura interna da Terra, embora os resultados possam ser mascarados por variações locais da distribuição de massa.)



Figura 13-41 Problema 27.

••28 Suponha que um planeta é uma esfera homogênea de raio R que (de alguma forma) possui um túnel radial estreito que passa pelo centro do planeta (Figura. 13-7). Suponha também que é possível posicionar uma maçã em qualquer lugar do túnel ou do lado de fora do planeta. Seja F_R o módulo da força gravitacional experimentada pela maçã quando está na superfície do planeta. A que distância da superfície está o ponto no qual o módulo da força gravitacional que

o planeta exerce sobre a maçã é $F_R/2$ se a maçã for deslocada (a) para longe do planeta e (b) para dentro do túnel?

Seção 13-6 Energia Potencial Gravitacional

•**29** A Fig. 13-42 mostra a função energia potencial $U(r)$ de um projétil em função da distância da superfície de um planeta de raio R_s. Qual é a menor energia cinética necessária para que um projétil lançado da superfície "escape" do planeta?

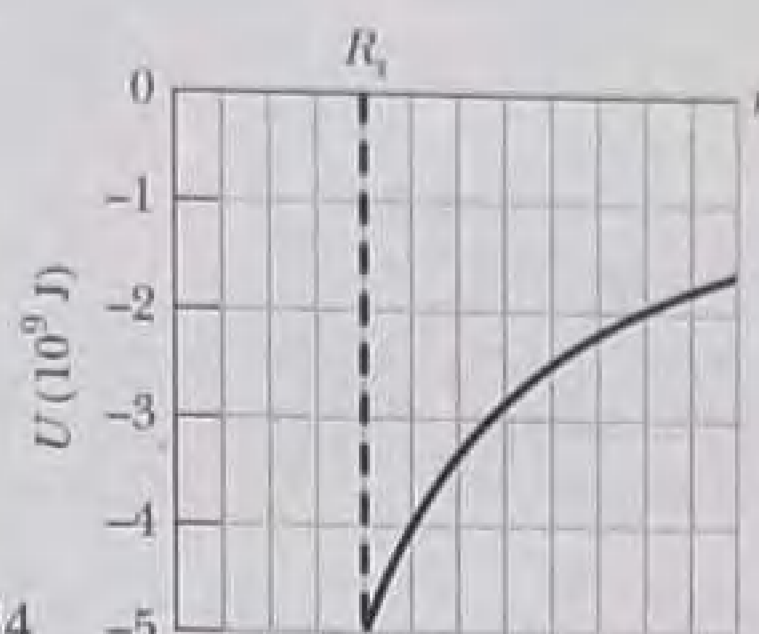


Figura 13-42 Problemas 29 e 34.

•**30** Para que razão m/M a energia potencial gravitacional do sistema do Problema 1 é a menor possível?

•**31** Marte e a Terra têm um diâmetro médio de $6{,}9 \times 10^3$ km e $1{,}3 \times 10^4$ km, respectivamente. A massa de Marte é 0,11 vez a massa da Terra. (a) Qual é a razão entre a massa específica média de Marte e a da Terra? (b) Qual é o valor da aceleração gravitacional em Marte? (c) Qual é a velocidade de escape em Marte?

•**32** (a) Qual é a energia potencial gravitacional do sistema de duas partículas do Problema 3? Se você triplica a distância entre as partículas, qual é o trabalho realizado (b) pela força gravitacional entre as partículas e (c) por você?

•**33** Por que fator deve ser multiplicada a energia necessária para escapar da Terra para obter a energia necessária para escapar (a) da Lua e (b) de Júpiter?

•**34** A Fig. 13-42 mostra a energia potencial $U(r)$ de um projétil em função da distância da superfície de um planeta de raio R_s. Se o projétil é lançado verticalmente para cima com uma energia mecânica de $-2{,}0 \times 10^9$ J, determine (a) a energia cinética a uma distância $r = 1{,}25R_s$ e (b) o *ponto de retorno* (veja a Seção 8-6) em função de R_s.

••**35** A Fig. 13-43 mostra quatro partículas, todas de massa 20,0 g, que formam um quadrado de lado $d = 0{,}600$ m. Se d é reduzido para 0,200 m, qual é a variação da energia potencial gravitacional do sistema?

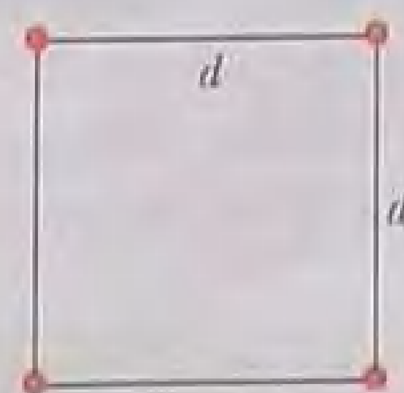


Figura 13-43 Problema 35.

••**36** Zero, um planeta hipotético, tem uma massa de $5{,}0 \times 10^{23}$ kg, um raio de $3{,}0 \times 10^6$ m e nenhuma atmosfera. Uma sonda espacial de 10 kg deve ser lançada verticalmente a partir da superfície. (a) Se a sonda for lançada com uma energia inicial de $5{,}0 \times 10^7$ J, qual será sua energia cinética quando estiver a $4{,}0 \times 10^6$ m do centro de Zero? (b) Com que energia cinética a sonda deve ser lançada para atingir uma distância máxima de $8{,}0 \times 10^6$ m do centro de Zero?

••**37** As três esferas da Fig. 13-44, de massas $m_A = 80$ g, $m_B = 10$ g e $m_C = 20$ g, têm os centros sobre uma mesma reta, com $L = 12$ cm e $d = 4{,}0$ cm. Você desloca a esfera B ao longo da reta até que a distância entre os centros da esfera B e da esfera C seja $d = 4{,}0$ cm. Qual é o trabalho realizado sobre a esfera B (a) por você e (b) pela força gravitacional das esferas A e C?

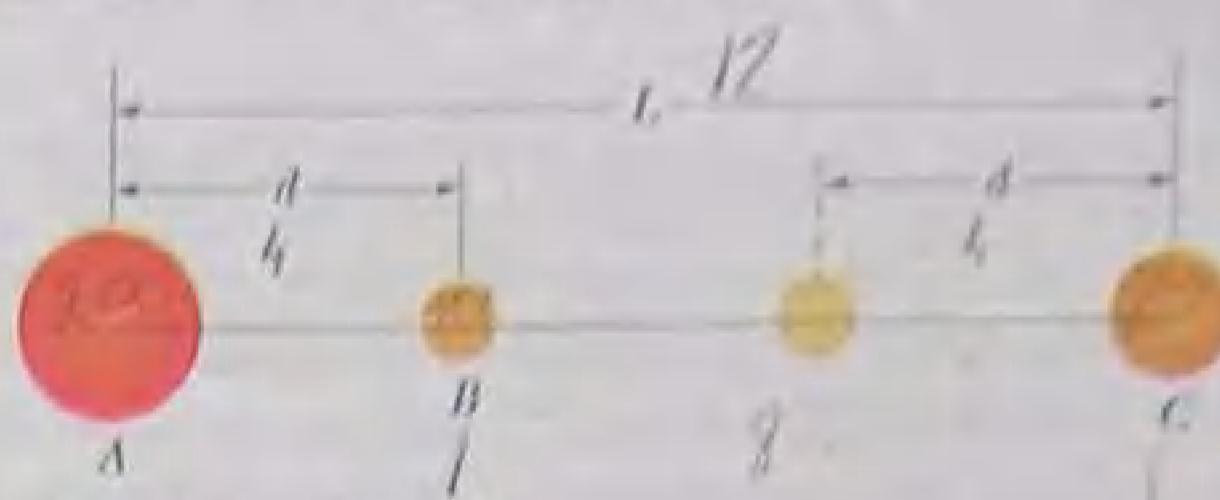


Figura 13-44 Problema 37.

••**38** No espaço sideral, a esfera A, com 20 kg de massa, está na origem de um eixo x e a esfera B, com 10 kg de massa, está no mesmo eixo em $x = 0{,}80$ m. A esfera B é liberada a partir do repouso enquanto a esfera A é mantida fixa na origem. (a) Qual é a energia potencial gravitacional do sistema das duas esferas no momento em que a esfera B é liberada? (b) Qual é a energia cinética da esfera B após ter se deslocado 0,20 m em direção à esfera A?

••**39** (a) Qual é a velocidade de escape de um asteroide esférico cujo raio é 500 km e cuja aceleração gravitacional na superfície é $3{,}0$ m/s²? (b) Que distância da superfície uma partícula atinge se deixar a superfície do asteroide com uma velocidade vertical de 1000 m/s? (c) Com que velocidade um objeto se chocaria com o asteroide se fosse liberado sem velocidade inicial 1000 km acima da superfície?

••**40** Um projétil é lançado verticalmente para cima a partir da superfície da Terra. Despreze a rotação da Terra. Em múltiplos do raio da Terra R_T, que distância o projétil atinge se (a) sua velocidade inicial é 0,500 da velocidade de escape da Terra e (b) sua energia cinética inicial é 0,500 da energia cinética necessária para escapar da Terra? (c) Qual é a menor energia mecânica inicial necessária para que o projétil escape da Terra?

••**41** Duas estrelas de nêutrons estão separadas por uma distância de $1{,}0 \times 10^{10}$ m. Ambas têm uma massa de $1{,}0 \times 10^{30}$ kg e um raio de $1{,}0 \times 10^5$ m. As estrelas se encontram inicialmente em repouso relativo. Com que velocidade estarão se movendo, em relação a este referencial de repouso, (a) quando a distância for metade do valor inicial e (b) quando estiverem na iminência de colidir?

••**42** A Fig. 13-45*a* mostra uma partícula A que pode ser deslocada ao longo de um eixo y desde uma distância infinita até a origem. A origem está localizada no ponto médio entre as partículas B e C, que têm massas iguais, e o eixo y é perpendicular à reta que liga as duas partículas. A distância D é 0,3057 m. A Fig. 13-45*b* mostra a energia potencial U do sistema de três partículas em função da

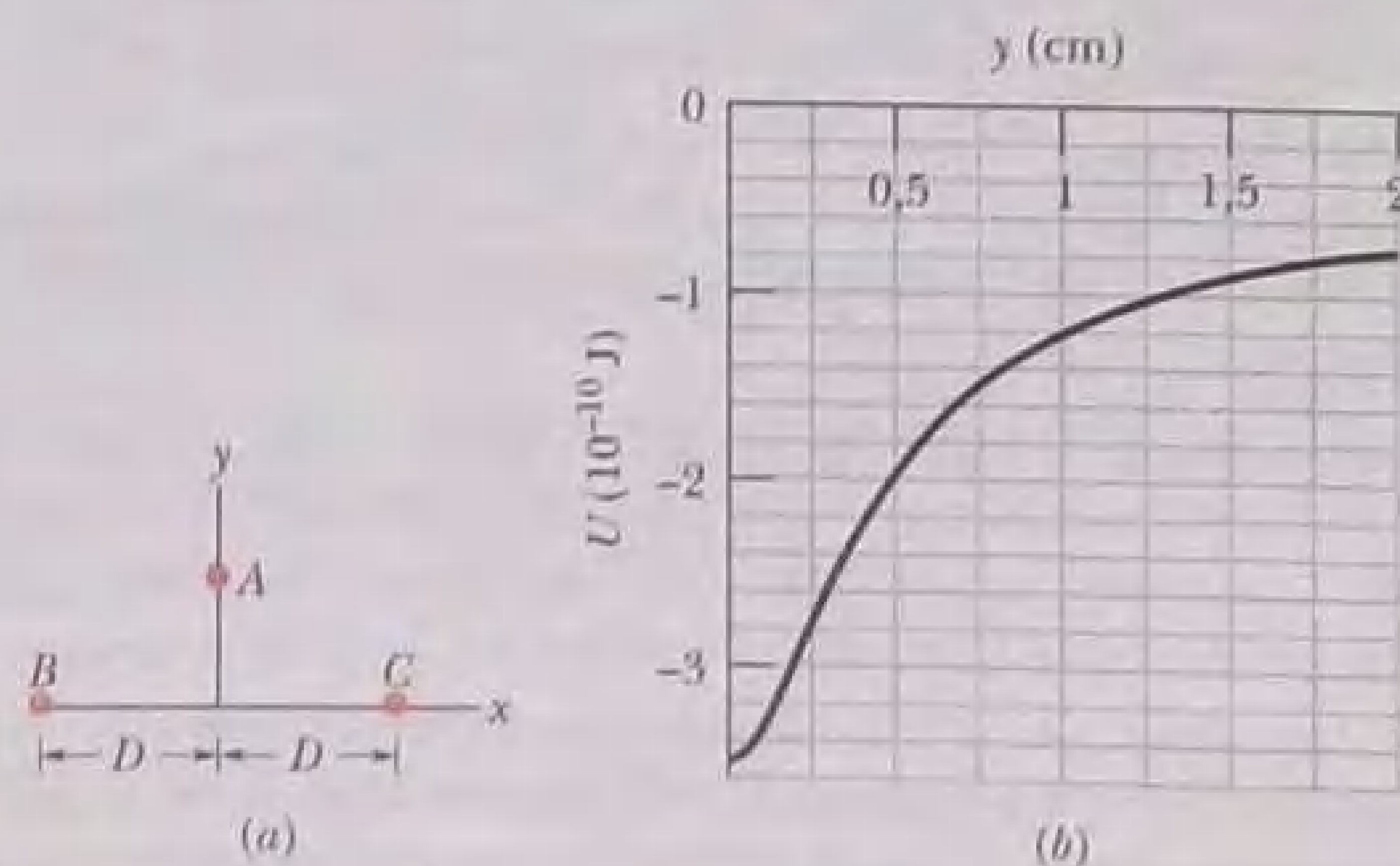


Figura 13-45 Problema 42.

posição da partícula A no eixo y. A curva na verdade se estende indefinidamente para a direita e tende assintoticamente para um valor de $-2,7 \times 10^{-11}$ J para $y \to \infty$. Qual é a massa (a) das partículas B e C e (b) da partícula A?

Seção 13-7 Planetas e Satélites: As Leis de Kepler

•43 (a) Que velocidade linear um satélite da Terra deve ter para estar em órbita circular 160 km acima da superfície da Terra? (b) Qual é o período de revolução?

•44 Um satélite é colocado em órbita em torno da Terra com um raio igual a metade do raio da órbita da Lua. Qual é o período de revolução do satélite em meses lunares? (Um mês lunar é o período de revolução da Lua.)

•45 Fobos, um satélite de Marte, se move em uma órbita aproximadamente circular com $9,4 \times 10^6$ m de raio e um período de 7h 39min. Calcule a massa de Marte a partir dessas informações.

•46 A primeira colisão conhecida entre um fragmento espacial e um satélite artificial em operação ocorreu em 1996: a uma altitude de 700 km, um satélite espião francês com um ano de uso foi atingido por um pedaço de um foguete Ariane. Um estabilizador do satélite foi danificado e o satélite passou a girar sem controle. Imediatamente antes da colisão e em quilômetros por hora, qual era a velocidade do pedaço de foguete em relação ao satélite se ambos estavam em órbita circular e (a) a colisão foi frontal e (b) as trajetórias eram mutuamente perpendiculares?

•47 O Sol, que está a $2,2 \times 10^{20}$ m do centro da Via Láctea, completa uma revolução em torno do centro a cada $2,5 \times 10^8$ anos. Supondo que todas as estrelas da galáxia possuem uma massa igual à massa do Sol, $2,0 \times 10^{30}$ kg, que as estrelas estão distribuídas uniformemente em uma esfera em torno do centro da galáxia e que o Sol se encontra na borda dessa esfera, estime o número de estrelas da galáxia.

•48 A distância média de Marte ao Sol é 1,52 vez maior que a distância da Terra ao Sol. Use a lei dos períodos de Kepler para calcular o número de anos necessário para que Marte complete uma revolução em torno do Sol e compare a resposta com o valor que aparece no Apêndice C.

•49 Um cometa que foi visto em abril de 574 por astrônomos chineses, em um dia conhecido como Woo Woo, e foi avistado novamente em maio de 1994. Suponha que o intervalo de tempo entre as observações seja o período do cometa e tome a sua excentricidade como 0,11. Quais são (a) o semieixo maior da órbita do cometa e (b) a sua maior distância ao Sol em termos do raio médio da órbita de Plutão, R_P?

•50 Um satélite em órbita circular permanece acima do mesmo ponto do equador da Terra ao longo de toda a órbita. Qual é a altitude da órbita (que recebe o nome de *órbita geoestacionária*)?

•51 Um satélite é colocado em uma órbita elíptica cujo ponto mais distante está a 360 km da superfície da Terra e cujo ponto mais próximo está a 180 km da superfície. Calcule (a) o semieixo maior e (b) a excentricidade da órbita.

•52 O centro do Sol está em um dos focos da órbita da Terra. A que distância desse foco se encontra o outro foco (a) em metros e (b) em termos do raio solar, $6,96 \times 10^8$ m? A excentricidade da órbita da Terra é 0,0167 e o semieixo maior é $1,50 \times 10^{11}$ m.

••53 Um satélite de 20 kg está em uma órbita circular com um período de 2,4 h e um raio de $8,0 \times 10^6$ m em torno de um planeta de massa desconhecida. Se o módulo da aceleração gravitacional na superfície do planeta é 8,0 m/s², qual é o raio do planeta?

••54 *Procurando um buraco negro.* As observações da luz de uma estrela indicam que a estrela faz parte de um sistema binário (sistema de duas estrelas). A estrela visível do par tem uma velocidade orbital $v = 270$ km/s, um período orbital $T = 1,70$ dia e uma massa aproximada $m_1 = 6M_S$, onde M_S é a massa do Sol, $1,99 \times 10^{30}$ kg. Suponha que as órbitas da estrela e da companheira, que é escura e invisível, são circulares (Fig. 13-46). Qual é a massa m_2 da estrela escura, em unidades de M_S?

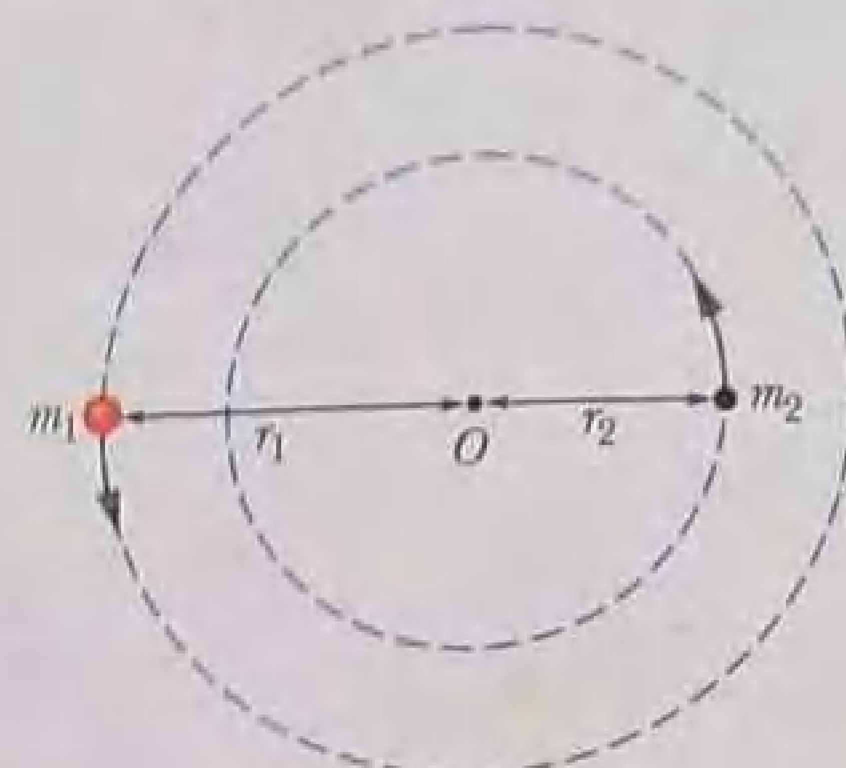


Figura 13-46 Problema 54.

••55 Em 1610, Galileu usou um telescópio que ele próprio havia construído para descobrir quatro satélites de Júpiter, cujos raios orbitais médios a e períodos T aparecem na tabela a seguir.

Nome	$a(10^8$ m)	T (dias)
Io	4,22	1,77
Europa	6,71	3,55
Ganimedes	10,7	7,16
Calisto	18,8	16,7

(a) Plote log a (eixo y) em função de T (eixo x) e mostre que o resultado é uma linha reta. (b) Meça a inclinação da reta e compare-a com o valor previsto pela terceira lei de Kepler. (c) Determine a massa de Júpiter a partir da interseção da reta com o eixo y.

•••56 Em 1993, a sonda *Galileu* enviou à Terra uma imagem (Fig. 13-47) do asteroide 243 Ida e um minúsculo satélite (hoje conhecido como Dactyl), o primeiro exemplo confirmado de um sistema asteroide–satélite. Na imagem, o satélite, que tem 1,5 km de largura, está a 100 km do centro do asteroide, que possui 55 km de comprimento. A forma da órbita do satélite não é conhecida com precisão; suponha que seja circular, com um período de 27 h. (a) Qual é a massa do asteroide? (b) O volume do asteroide, medido a partir das imagens da sonda *Galileu*, é 14.100 km³. Qual é a massa específica do asteroide?



Figura 13.47 Problema 56. Um minúsculo satélite (à direita) orbita o asteroide 243 Ida. *(Cortesia da NASA.)*

••57 Em um certo sistema estelar binário, as duas estrelas têm uma massa igual à do Sol e giram em torno do centro de massa. A distância entre as estrelas é igual à distância entre a Terra e o Sol. Qual é, em anos, o período de revolução das estrelas?

•••58 Às vezes, a presença de um planeta invisível associado à estrela distante pode ser deduzida a partir da observação do movimento da estrela. Enquanto a estrela e o planeta giram em torno do centro de massa do sistema estrela – planeta, a estrela se aproxima e se afasta de nós com a chamada *velocidade ao longo da linha de visada*, um movimento que pode ser detectado. A Fig. 13-48 mostra o gráfico da velocidade ao longo da linha de visada em função do tempo para a estrela 14 Herculis. Estima-se que a massa da estrela seja 0,90 da massa do Sol. Supondo que apenas um planeta gira em torno da estrela e que a Terra está plano da órbita do planeta, determine (a) a massa do planeta em unidades de m_J, a massa de Júpiter, e (b) o raio da órbita do planeta em unidades de r_T, o raio da órbita da Terra.

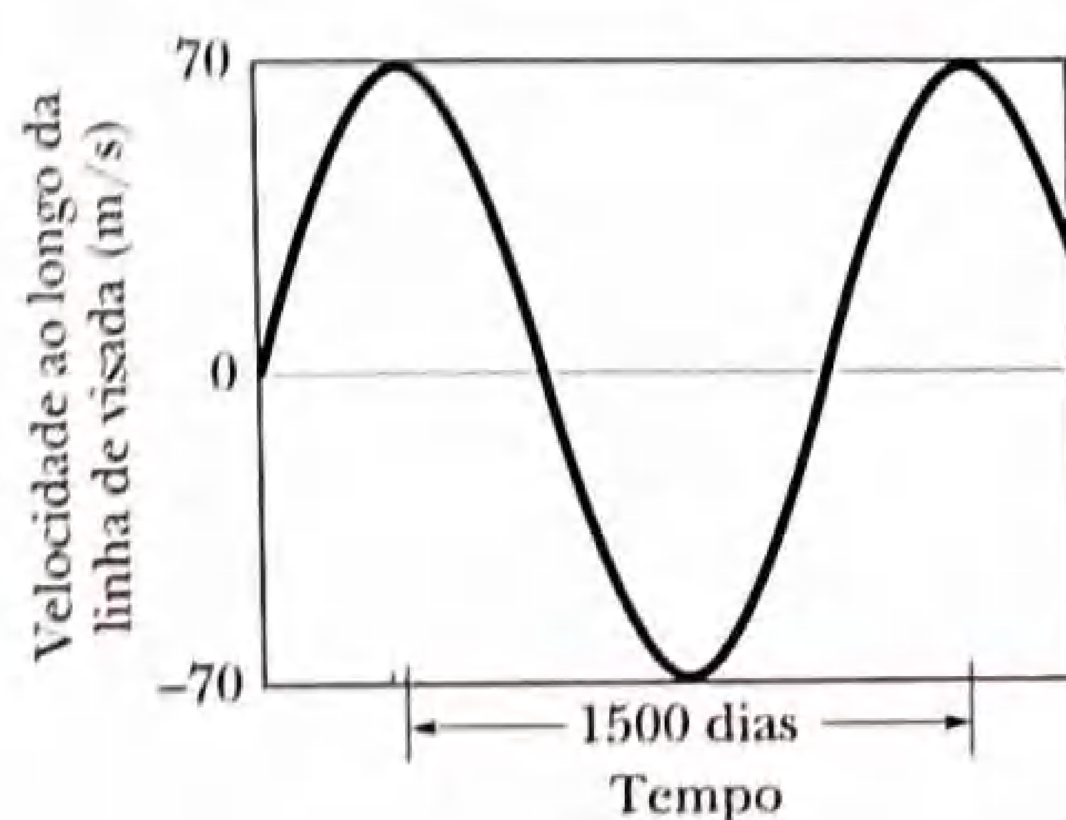


Figura 13-48 Problema 58.

•••59 Três estrelas iguais de massa M formam um triângulo equilátero que gira em torno do centro do triângulo enquanto as estrelas se movem ao longo de uma mesma circunferência. O lado do triângulo possui um comprimento L. Qual é a velocidade das estrelas?

Seção 13-8 Satélites: Órbitas e Energias

•60 Na Fig. 13-49, dois satélites, A e B, ambos de massa m = 125 kg, ocupam a mesma órbita circular de raio $r = 7{,}87 \times 10^6$ m em torno da Terra e se movem em sentidos opostos, estando, portanto, em rota de colisão. (a) Determine a energia mecânica total $E_A + E_B$ do sistema dos *dois satélites e a Terra* antes da colisão. (b) Se a colisão é perfeitamente inelástica, de modo que os destroços aglomeram em um só bloco (de massa = $2m$), determine a energia mecânica total imediatamente após a colisão. (c) Logo depois da colisão, os destroços caem em direção ao centro da Terra ou continuam em órbita da Terra?

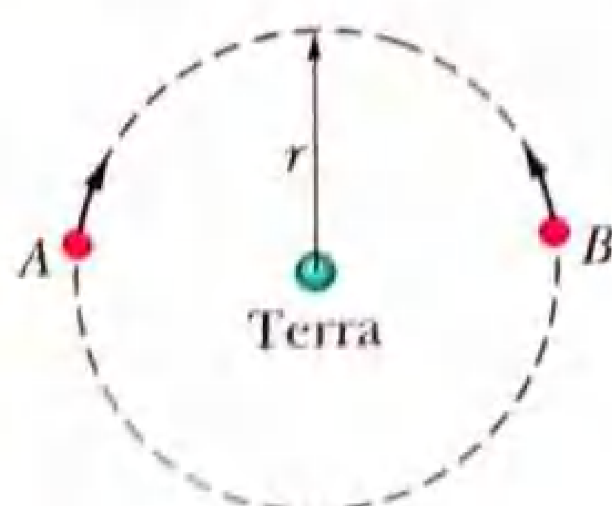


Figura 13-49 Problema 60.

•61 (a) A que distância da superfície da Terra a energia necessária para fazer um satélite subir até essa altitude é igual à energia cinética necessária para que o satélite se mantenha em órbita circular na mesma altitude? (b) Em altitudes maiores, qual é maior, a energia para fazer o satélite subir ou a energia cinética para que se mantenha em órbita circular?

•62 Dois satélites, A e B, ambos de massa m, estão em órbita circular em torno da Terra. O satélite A orbita a uma altitude de 6370 km e o satélite B a uma altitude de 19.110 km. O raio da Terra é 6370 km. (a) Qual é a razão entre a energia potencial do satélite B e a do satélite A? (b) Qual é a razão entre a energia cinética do satélite B e a do satélite A? (c) Qual dos dois satélites possui maior energia total se ambos têm uma massa de 14,6 kg? (d) Qual é a diferença entre as energias totais dos dois satélites?

•63 Um asteroide, cuja massa é $2{,}0 \times 10^{-4}$ vezes a massa da Terra, gira em uma órbita circular em torno do Sol a uma distância que é o dobro da distância da Terra ao Sol. (a) Calcule o período de revolução do asteroide em anos. (b) Qual é a razão entre a energia cinética do asteroide e a energia cinética da Terra?

•64 Um satélite gira em torno de um planeta de massa desconhecida em uma circunferência com $2{,}0 \times 10^7$ m de raio. O módulo da força gravitacional exercida pelo planeta sobre o satélite é F = 80 N. (a) Qual é a energia cinética do satélite? (b) Qual seria o módulo F se o raio da órbita aumentasse para $3{,}0 \times 10^7$ m?

••65 Um satélite está em uma órbita circular de raio r em torno da Terra. A área A delimitada pela órbita é proporcional a r^2, já que $A = \pi r^2$. Determine a forma de variação com r das seguintes propriedades do satélite: (a) o período, (b) a energia cinética, (c) o momento angular e (d) a velocidade escalar.

••66 Uma forma de atacar um satélite em órbita da Terra é disparar uma saraivada de projéteis na mesma órbita do satélite, no sentido oposto. Suponha que um satélite em órbita circular, 500 km acima da superfície da Terra, colida com um projétil de massa 4,0 g. (a) Qual é a energia cinética do projétil no referencial do satélite imediatamente antes da colisão? (b) Qual é a razão entre a energia cinética calculada no item (a) e a energia cinética de uma bala de 4,0 g disparada por um rifle moderno das forças armadas, ao deixar o cano com uma velocidade de 950 m/s?

•••67 Quais são (a) a velocidade e (b) o período de um satélite de 220 kg em uma órbita aproximadamente circular 640 km acima da superfície da Terra? Suponha que o satélite perde energia mecânica a uma taxa média de $1{,}4 \times 10^5$ J por revolução orbital. Usando a aproximação razoável de que a órbita do satélite se torna uma "circunferência cujo raio diminui lentamente", determine (c) a altitude, (d) a velocidade e (e) o período do satélite ao final da revolução número 1500. (f) Qual é o módulo da força retardadora média que atua sobre o satélite? O momento angular em relação à Terra é conservado (g) para o satélite e (h) para o sistema satélite – Terra (supondo que o sistema é isolado)?

•••68 Duas pequenas espaçonaves, ambas de massa m = 2000 kg, estão na órbita circular em torno da Terra da Fig. 13-50, a uma altitude h de 400 km. Kirk, o comandante de uma das naves, chega a qualquer ponto fixo da órbita 90 s antes de Picard, o comandante da segunda nave. Determine (a) o período T_0 e (b) a velocidade v_0 das naves. No ponto P da Fig. 13-50, Picard dispara um retrofoguete instantâneo na direção tangencial à órbita, *reduzindo* a velocidade da nave em 1,00%. Depois do disparo, a nave assume a órbita elíptica representada na figura por uma linha tracejada. Determine (c) a energia cinética e (d) a energia potencial da nave imediatamente após o disparo. Na nova órbita elíptica de Picard, quais são (e) a energia total E, (f) o semieixo maior a e (g) o período orbital T? (h) Quanto tempo Picard chega ao ponto P antes de Kirk?

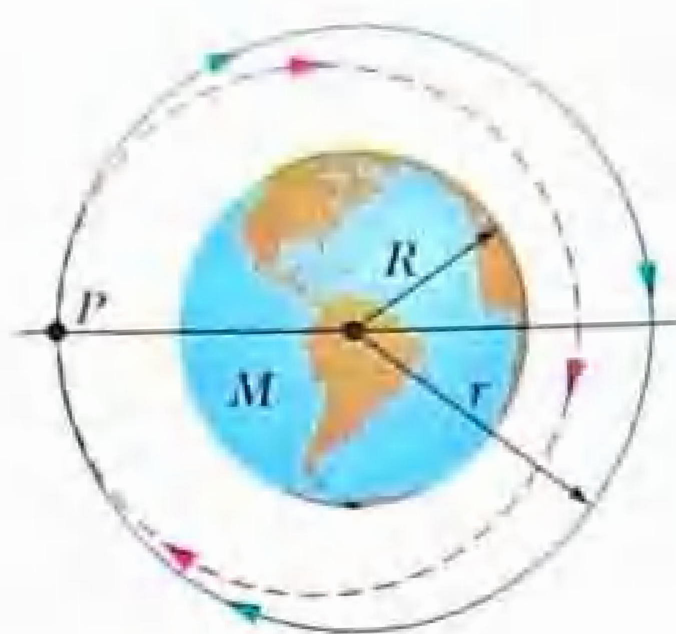


Figura 13.50 Problema 68.

Seção 13-9 Einstein e a Gravitação

•**69** Na Fig. 13-17*b*, a leitura da balança usada pelo físico de 60 kg é 220 N. Quanto tempo o melão leva para chegar ao chão se o físico o deixa cair (sem velocidade inicial em relação ao físico) de um ponto 2,1 m acima do piso?

Problemas Adicionais

70 O raio R_b de um buraco negro é o raio de uma superfície esférica chamada de horizonte de eventos. Nenhuma informação a respeito da região situada no interior do horizonte de eventos pode chegar ao mundo exterior. De acordo com a teoria da relatividade geral de Einstein, $R_b = 2GM/c^2$, onde M é a massa do buraco negro e c é a velocidade da luz.

Suponha que você deseje estudar um buraco negro a uma distância de $50R_b$. Para evitar efeitos desagradáveis, você não quer que a diferença entre a aceleração gravitacional dos seus pés e a da sua cabeça exceda 10 m/s² quando você está com os pés (ou a cabeça) na direção do buraco negro. (a) Qual é o limite tolerável da massa do buraco negro, em unidades da massa M_S do Sol? (Você precisa conhecer o seu peso.) (b) O limite calculado no item (a) é um limite superior (você pode tolerar massas menores) ou um limite inferior (você pode tolerar massas maiores)?

71 Vários planetas (Júpiter, Saturno, Urano) possuem anéis, talvez formados por fragmentos que não chegaram a formar um satélite. Muitas galáxias também contêm estruturas em forma de anel. Considere um anel fino homogêneo de massa M e raio externo R (Fig. 13-51). (a) Qual é a atração gravitacional que o anel exerce sobre uma partícula de massa m localizada no eixo central, a uma distância x do centro? (b) Suponha que a partícula do item (a) seja liberada a partir do repouso. Com que velocidade a partícula passa pelo centro do anel?

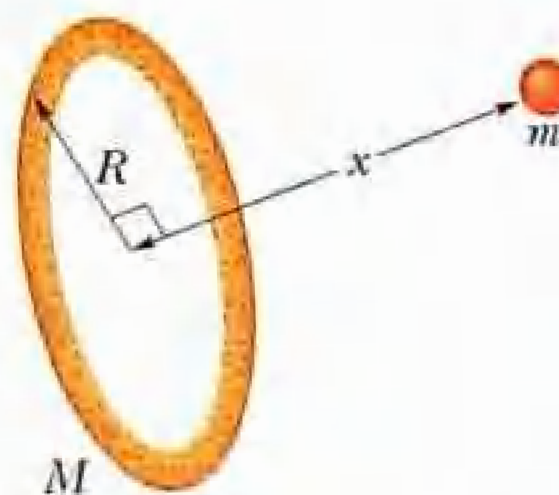


Figura 13-51 Problema 71.

72 Uma certa estrela de nêutrons tem uma massa igual à do Sol e um raio de 10 km. (a) Qual é a aceleração da gravidade na superfície da estrela? (b) Com que velocidade um objeto estaria se movendo se caísse a partir do repouso por uma distância 1,0 m em direção à estrela? (Suponha que o movimento de rotação da estrela é desprezível.)

73 A Fig. 13-52 é um gráfico da energia cinética K de um asteroide que cai em linha reta em direção ao centro da Terra, em função da distância r entre o asteroide e o centro da Terra. (a) Qual é a massa (aproximada) do asteroide (b) Qual é a velocidade do asteroide para $r = 1{,}945 \times 10^7$ m?

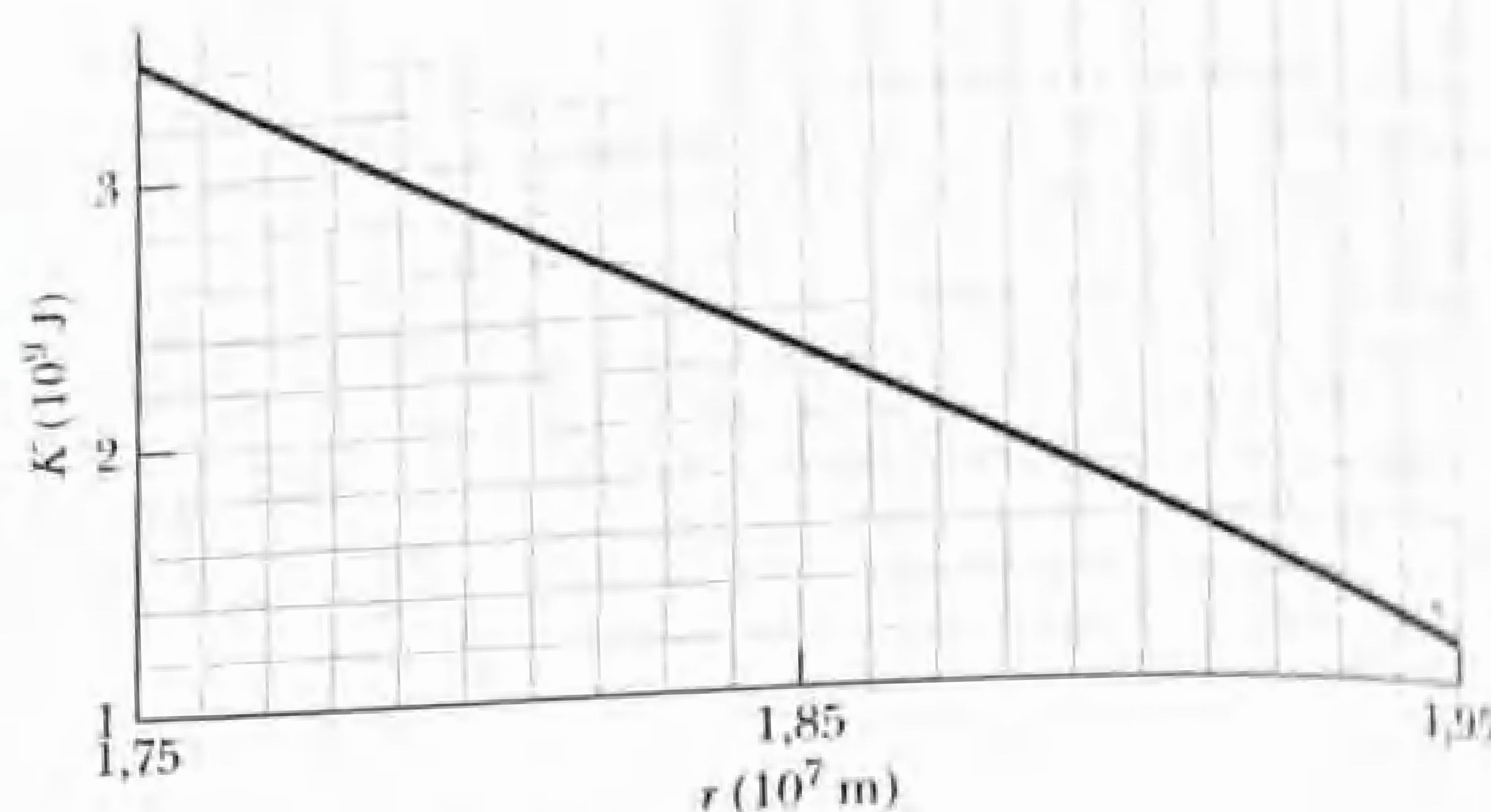


Figura 13-52 Problema 73.

74 O visitante misterioso que aparece na encantadora história *O Pequeno Príncipe* teria vindo de um planeta que "era pouco maior do que uma casa!". Suponha que a massa específica do planeta seja aproximadamente igual à da Terra e que a rotação seja desprezível. Determine os valores aproximados (a) da aceleração de queda livre na superfície do planeta e (b) da velocidade de escape do planeta.

75 As massas e coordenadas de três esferas são as seguintes: 20 kg, $x = 0{,}50$ m, $y = 1{,}0$ m; 40 kg, $x = -1{,}0$ m, $y = -1{,}0$ m; 60 kg, $x = 0$ m, $y = -0{,}50$ m. Qual é o módulo da força gravitacional que as três esferas exercem sobre uma esfera de 20 kg localizada na origem?

76 Um dos primeiros satélites artificiais era apenas um balão esférico de folha de alumínio com 30 m de diâmetro e uma massa de 20 kg. Suponha que um meteoro com uma massa de 7,0 kg passe a 3,0 m da superfície do satélite. Qual é o módulo da força gravitacional que o satélite exerce sobre o meteoro no ponto de maior aproximação?

77 Quatro esferas homogêneas, de massas $m_A = 40$ kg, $m_B = 35$ kg, $m_C = 200$ kg e $m_D = 50$ kg, têm coordenadas (0,50 cm), (0, 0), (−80 cm, 0) e (40 cm, 0), respectivamente. Em termos dos vetores unitários, qual é a força gravitacional total que as outras esferas exercem sobre a esfera B?

78 (a) No Problema 77, remova a esfera A e calcule a energia potencial gravitacional do sistema formado pelas outras três partículas. (b) Se a esfera A é introduzida novamente no sistema, a energia potencial do sistema de quatro partículas é maior ou menor que a calculada no item (a)? (c) O trabalho para remover a partícula A do sistema, como no item (a), é positivo ou negativo? (d) O trabalho para recolocar a partícula A no sistema, como no item (b), é positivo ou negativo?

79 Um sistema de três estrelas é formado por duas estrelas de massa m girando na mesma órbita circular de raio r em torno de uma estrela central de massa M (Fig. 13-53). As duas estrelas em órbita estão sempre em extremidades opostas de um diâmetro da órbita. Escreva uma expressão para o período de revolução das estrelas.

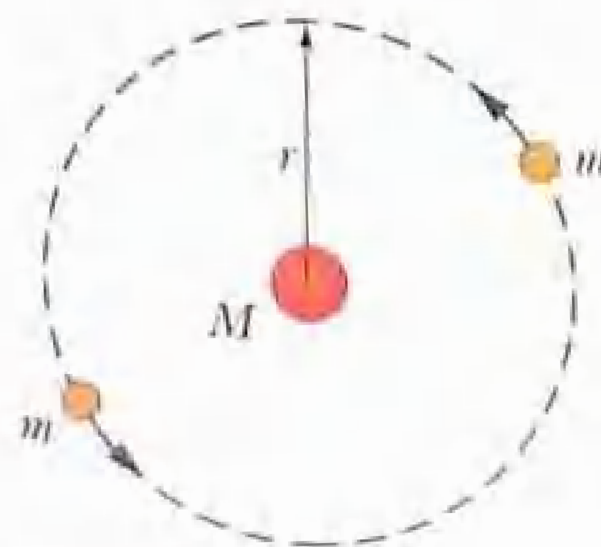


Figura 13-53 Problema 79.

80 A maior velocidade de rotação possível de um planeta é aquela para a qual a força gravitacional no equador é igual à força centrípeta. (Por quê)? (a) Mostre que o período de rotação correspondente é dado por

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}},$$

onde ρ é a massa específica homogênea do planeta esférico. (b) Calcule o período de rotação supondo uma massa específica de 3,0 g/cm^3, típica de muitos planetas, satélites e asteroides. Nunca foi observado um astro com um período de rotação menor que o determinado por esta análise.

81 Em um sistema estelar binário, duas estrelas de massa $3{,}0 \times 10^{30}$ kg giram em torno do centro de massa do sistema a uma distância de $1{,}0 \times 10^{11}$ m. (a) Qual é a velocidade angular da estrelas em relação ao centro de massa? (b) Se um meteorito passa pelo centro de massa do sistema perpendicularmente ao plano da órbita, qual a menor velocidade que o meteorito deve ter ao passar pelo centro de massa para poder escapar para o "infinito" depois de passar pelo sistema binário?

82 Um satélite está em uma órbita elíptica com um período de $8{,}0 \times 10^4$ s em torno de um planeta de massa $7{,}00 \times 10^{24}$ kg. No afélio, a uma distância de $4{,}5 \times 10^7$ m do centro do planeta, a velocidade angular do satélite é $7{,}158 \times 10^{-5}$ rad/s. Qual é a velocidade angular do satélite no periélio?

83 A capitão Janeway está em um ônibus espacial de massa $m = 3000$ kg que descreve uma órbita circular de raio $r = 4{,}20 \times 10^7$ m em torno de um planeta de massa $M = 9{,}50 \times 10^{25}$ kg. Quais são (a) o período da órbita e (b) a velocidade do ônibus espacial? Janeway aciona por alguns instantes um retrofoguete, reduzindo em 2,00% a velocidade do ônibus espacial. Nesse momento, quais são (c) a velocidade, (d) a energia cinética, (e) a energia potencial gravitacional e (f) a energia mecânica do ônibus espacial? (g) Qual é o semieixo maior da órbita elíptica agora seguida pelo ônibus espacial? (h) Qual é a diferença entre o período da órbita circular original e o da órbita elíptica? (i) Qual das duas órbitas tem o menor período?

84 Uma esfera maciça homogênea de raio R produz uma aceleração gravitacional a_g na superfície. A que distância do centro da esfera está o ponto (a) do lado de dentro e (b) do lado de fora da esfera no qual a aceleração gravitacional é $a_g/3$?

85 Um projétil é disparado verticalmente para cima, a partir da superfície da Terra, com uma velocidade inicial de 10 km/s. Desprezando a resistência do ar, qual é a distância máxima acima da superfície da Terra atingida pelo projétil?

86 Um objeto no equador da Terra é acelerado (a) em direção ao centro da Terra porque a Terra gira em torno de si mesma, (b) em direção ao Sol porque a Terra gira em torno do Sol em uma órbita quase circular e (c) em direção ao centro da galáxia porque o Sol gira em torno do centro da galáxia. No último caso, o período é $2{,}5 \times 10^8$ anos e o raio é $2{,}2 \times 10^{20}$ m. Calcule as três acelerações em unidades de $g = 9{,}8$ m/s^2.

87 (a) Se a lendária maçã de Newton fosse liberada, a partir do repouso, 2 m acima da superfície de uma estrela de nêutrons com uma massa igual a 1,5 vez a massa do Sol e um raio de 20 km, qual seria a velocidade da maçã ao atingir a superfície da estrela? (b) Se a maçã ficasse em repouso sobre a superfície da estrela, qual seria a diferença aproximada entre a aceleração gravitacional no alto e na base da maçã? (Suponha um tamanho razoável para a maçã; a resposta indica que uma maçã não permaneceria intacta nas vizinhanças de uma estrela de nêutrons.)

88 Se uma carta caísse em um túnel que atravessasse toda a Terra, passando pelo centro, qual seria a velocidade da carta ao passar pelo centro?

89 A órbita da Terra em torno do Sol é *quase* circular: as distâncias de maior aproximação e maior afastamento são $1{,}47 \times 10^8$ km e $1{,}52 \times 10^8$ km, respectivamente. Determine as variações correspondentes (a) da energia total, (b) da energia potencial gravitacional, (c) da energia cinética e (d) da velocidade orbital. (*Sugestão:* use as leis de conservação da energia e do momento angular.)

90 Um satélite de 50 kg completa uma volta em torno do planeta Cruton a cada 6,0 h. O módulo da força gravitacional que Cruton exerce sobre o satélite é 80 N. (a) Qual é o raio da órbita? (b) Qual é a energia cinética do satélite? (c) Qual é a massa do planeta Cruton?

91 Dois astros iguais de massa m, A e B, são acelerados um em direção ao outro, a partir do repouso, pela força gravitacional mútua. A distância inicial entre os centros dos dois astros é R_i. Suponha que um observador se encontra em um referencial inercial estacionário em relação ao centro de massa deste sistema de dois corpos. Use a lei de conservação da energia mecânica ($K_f + U_f = K_i + U_i$) para determinar as seguintes grandezas quando a distância entre os centros é $0{,}5R_i$: (a) a energia cinética total do sistema, (b) a energia cinética de cada astro, (c) a velocidade escalar de cada astro em relação ao observador e (d) a velocidade do astro B em relação ao astro A.

Em seguida, suponha que o referencial do observador está ligado ao astro A (ou seja, o observador se encontra no astro A). Nesse caso, o observador vê o corpo B acelerar em sua direção a partir do repouso. Neste referencial, use novamente a relação $K_f + U_f = K_i + U_i$ para determinar as seguintes grandezas quando a distância entre os centros é $0{,}5R_i$: (e) a energia cinética do astro B e (f) a velocidade escalar do astro B em relação ao astro A. (g) Por que as respostas dos itens (d) e (f) são diferentes? Qual das duas respostas está correta?

92 Um foguete de 150,0 kg que se afasta da Terra em linha reta está a uma velocidade de 3,70 km/s quando o motor é desligado, 200 km acima da superfície da Terra. (a) Desprezando a resistência do ar, determine a energia cinética do foguete quando está 1000 km acima da superfície da Terra. (b) Qual é a altura máxima acima da superfície da Terra atingida pelo foguete?

93 O planeta Roton, com uma massa de $7{,}0 \times 10^{24}$ kg e um raio de 1600 km, atrai gravitacionalmente um meteorito que está inicialmente em repouso em relação ao planeta, a uma distância suficientemente grande para ser considerada infinita. O meteorito cai em direção ao planeta. Supondo que o planeta não possui atmosfera, determine a velocidade do meteorito ao atingir a superfície do planeta.

94 Duas esferas de 20 kg são mantidas fixas em um eixo y, uma em $y = 0{,}40$ m e a outra em $y = -0{,}40$ m. Uma bola de 10 kg é liberada a partir do repouso em um ponto do eixo x que está a uma grande distância (praticamente infinita) das esferas. Se as únicas forças que agem sobre a bola são as forças gravitacionais exercidas pelas esferas, então, quando a bola chega ao ponto (0,30 m, 0), quais são (a) a energia cinética da bola e (b) a força resultante exercida pelas esferas sobre a bola, em termos dos vetores unitários?

95 A esfera A, com uma massa de 80 kg, está situada na origem de um sistema de coordenadas xy; a esfera B, com uma massa de 60 kg, está situada nas coordenadas (0,25 m, 0); a esfera C, com uma massa de 0,20 kg, está situada no primeiro quadrante, a 0,20 m de A e 0,15 m de B. Em termos dos vetores unitários, qual é a força gravitacional total que A e B exercem sobre C?

96 No romance de ficção científica *Da Terra à Lua*, escrito em 1865, Júlio Verne conta a história de três astronautas que são lançados em direção à Lua por um gigantesco canhão. Segundo Verne, a cápsula de alumínio com os astronautas é acelerada por uma carga de algodão-pólvora até uma velocidade de 11 km/s ao longo dos 220 m do cano do canhão. (a) Qual seria a aceleração média da cápsula e dos astronautas no cano do canhão em unidades de g? (b) Os astronautas poderiam resistir a essa aceleração?

Uma versão moderna do lançamento de uma espaçonave por um canhão (embora sem passageiros) foi proposta na década de 1990. Nessa versão moderna, chamada de canhão SHARP (do inglês Super High Altitude Research Project), a combustão de metano empurra um pistão ao longo do tubo do canhão, comprimindo o gás hidrogênio, que, por sua vez, impulsiona o foguete. O foguete percorre uma distância de 3,5 km dentro do tubo de lançamento, atingindo uma velocidade de 7,0 km/s. Uma vez lançado, o foguete pode usar motores para ganhar mais velocidade. (c) Qual é a aceleração média do foguete dentro do tubo de lançamento em unidades de g? (d) Que velocidade adicional seria necessária (usando motores) para que o foguete entrasse em órbita da Terra a uma altitude de 700 km?

97 Um objeto de massa m é mantido inicialmente no lugar a uma distância $r = 3R_T$ do centro da Terra, onde R_T é o raio da Terra. Seja M_T a massa da Terra. Uma força é aplicada ao objeto para deslocá-lo para uma distância $r = 4R_T$, na qual é novamente mantido no lugar. Calcule o trabalho realizado pela força aplicada durante o deslocamento integrando o módulo da força.

CAPÍTULO 14

FLUIDOS

14-1 O QUE É FÍSICA?

A física dos fluidos é a base da engenharia hidráulica, um ramo da engenharia com muitas aplicações práticas. Um engenheiro nuclear pode estudar o escoamento da água nas tubulações de um reator nuclear após alguns anos de uso, enquanto um bioengenheiro pode estudar o fluxo de sangue nas artérias de um paciente idoso. Um engenheiro ambiental pode estar preocupado com a contaminação nas vizinhanças de um depósito de lixo ou com a eficiência de um sistema de irrigação. Um engenheiro naval pode estar interessado em investigar os riscos de operação de um batiscafo ou a possibilidade de salvar a tripulação de um submarino danificado. Um engenheiro aeronáutico pode projetar o sistema de controle dos flaps que ajudam um avião a pousar. A engenharia hidráulica é usada também em muitos espetáculos da Broadway e de Las Vegas, nos quais enormes cenários são rapidamente montados e desmontados por sistemas hidráulicos.

Antes de estudar essas aplicações da física dos fluidos, precisamos responder à seguinte pergunta: "O que é um fluido?"

14-2 O que É um Fluido?

Um **fluido**, ao contrário de um sólido, é uma substância que pode escoar. Os fluidos assumem a forma do recipiente em que são colocados. Eles se comportam dessa forma porque não resistem a forças paralelas à sua superfície. (Na linguagem mais formal da Seção 12-7, um fluido é uma substância que escoa porque não resiste a tensões de cisalhamento, embora muitos fluidos, como é o caso dos líquidos, resistam a tensões compressivas.) Algumas substâncias aparentemente sólidas, como o piche, levam um longo tempo para se amoldar aos contornos de um recipiente, mas acabam por fazê-lo; assim, essas substâncias também são classificadas como fluidos.

O leitor talvez se pergunte por que os líquidos e gases são agrupados na mesma categoria e chamados de fluidos. Afinal (pode pensar), a água é tão diferente do vapor quanto do gelo. Isso, porém, não é verdade. O gelo, como outros sólidos cristalinos, tem seus átomos organizados em um arranjo tridimensional bastante rígido chamado de rede cristalina. Nem no vapor nem na água existe um arranjo com ordem de longo alcance como o do gelo.

14-3 Massa Específica e Pressão

Quando estudamos os corpos rígidos, estamos interessados em concentrações de matéria como blocos de madeira, bolas de tênis e barras de metal. As grandezas físicas que utilizamos nesse caso e em termos das quais expressamos as leis de Newton são a *massa* e a *força*. Podemos falar, por exemplo, de um bloco de 3,6 kg submetido a uma força de 25 N.

No caso dos fluidos, estamos mais interessados em substâncias sem uma forma definida e em propriedades que podem variar de um ponto a outro da substância. Nesse caso, é mais útil falar em **massa específica** e **pressão** do que em massa e força.

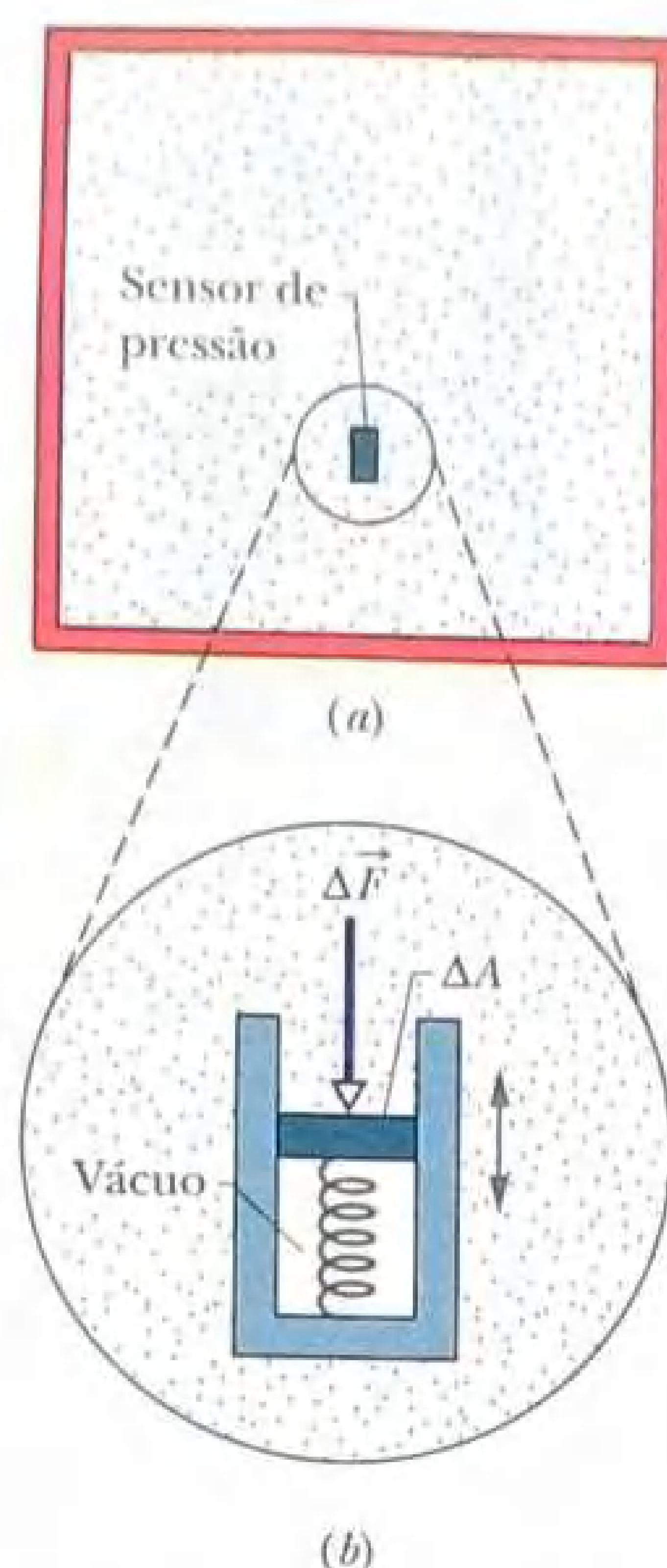


Figura 14-1 (*a*) Um recipiente cheio de fluido com um pequeno sensor de pressão, mostrado em (*b*). A pressão é medida pela posição relativa do êmbolo móvel.

Massa Específica

Para determinar a massa específica ρ de um fluido em um ponto do espaço, isolamos um pequeno elemento de volume ΔV em torno do ponto e medimos a massa Δm do fluido contido nesse elemento de volume. A **massa específica** é dada por

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (14\text{-}1)$$

Teoricamente, a massa específica em um ponto qualquer de um fluido é o limite dessa razão quando o elemento de volume ΔV em torno do ponto tende a zero. Na prática, supomos que o volume de fluido usado para calcular a massa específica, embora pequeno, é muito maior que um átomo e, portanto, "contínuo" (com a mesma massa específica em todos os pontos) e não "granulado" por causa da presença de átomos. Além disso, em muitos casos, supomos que a massa específica do fluido é a mesma em todos os elementos de volume do corpo considerado. Essas duas hipóteses permitem escrever a massa específica na forma

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{(massa específica uniforme)}, \quad (14\text{-}2)$$

onde m e V são a massa e o volume do corpo.

A massa específica é uma grandeza escalar; a unidade no SI é o quilograma por metro cúbico. A Tabela 14-1 mostra a massa específica de algumas substâncias e a massa específica média de alguns objetos. Observe que a massa específica de um gás (veja Ar na tabela) varia consideravelmente com a pressão, mas a massa específica de um líquido (veja Água) praticamente não varia; isso mostra que os gases são *compressíveis*, mas o mesmo não acontece com os líquidos.

Pressão

Considere um pequeno sensor de pressão suspenso em um recipiente cheio de fluido, como na Fig. 14-1*a*. O sensor (Fig. 14-1*b*) é formado por um êmbolo de área ΔA que pode deslizar no interior de um cilindro fechado que repousa sobre uma mola. Um mostrador registra o deslocamento sofrido pela mola (calibrada) ao ser comprimida pelo fluido, indicando assim o módulo ΔF da força normal que age sobre o êmbolo. Definimos a **pressão** do fluido sobre o êmbolo como

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A}. \quad (14\text{-}3)$$

Teoricamente, a pressão em qualquer ponto do fluido é o limite dessa razão quando a área ΔA de um êmbolo com o centro nesse ponto tende a zero. Entretanto, se a

Tabela 14-1

Algumas Massas Específicas

Substância ou Objeto	Massa Específica (kg/m³)	Substância ou Objeto	Massa Específica (kg/m³)
Espaço interestelar	10^{-20}	Ferro	$7{,}9 \times 10^3$
Melhor vácuo em laboratório	10^{-17}	Mercúrio (o metal, não o planeta)	$13{,}6 \times 10^3$
Ar: 20°C e 1 atm de pressão	1,21	Terra: média	$5{,}5 \times 10^3$
20°C e 50 atm	60,5	núcleo	$9{,}5 \times 10^3$
Isopor	1×10^2	crosta	$2{,}8 \times 10^3$
Gelo	$0{,}917 \times 10^3$	Sol: média	$1{,}4 \times 10^3$
Água: 20°C e 1 atm	$0{,}998 \times 10^3$	núcleo	$1{,}6 \times 10^5$
20 °C e 50 atm	$1{,}000 \times 10^3$	Anã branca (núcleo)	10^{10}
Água do mar: 20°C e 1 atm	$1{,}024 \times 10^3$	Núcleo de urânio	3×10^{17}
Sangue	$1{,}060 \times 10^3$	Estrela de nêutrons (núcleo)	10^{18}

Tabela 14-2

Algumas Pressões

	Pressão (Pa)		Pressão (Pa)
Centro do Sol	2×10^{16}	Pneu de automóvel[a]	2×10^5
Centro da Terra	4×10^{11}	Atmosfera ao nível do mar	$1{,}0 \times 10^5$
Maior pressão contínua em laboratório	$1{,}5 \times 10^{10}$	Pressão arterial sistólica normal[a, b]	$1{,}6 \times 10^4$
Fossa oceânica mais profunda	$1{,}1 \times 10^8$	Melhor vácuo em laboratório	10^{-12}
Salto alto em uma pista de dança	10^6		

[a]Pressão acima da pressão atmosférica. [b]Equivalente a 120 torr nos medidores de pressão dos médicos.

força é uniforme em uma superfície plana de área A, podemos escrever a Eq. 14-3 na forma

$$p = \frac{F}{A} \quad \text{(pressão de uma força uniforme em uma superfície plana),} \qquad (14\text{-}4)$$

onde F é o módulo da força normal a que está sujeita a superfície de área A. (Quando dizemos que uma força é uniforme em uma superfície, isso significa que a força está uniformemente distribuída por todos os pontos da superfície.)

Observamos experimentalmente que em um dado ponto de um fluido em repouso, a pressão p definida pela Eq. 14-4 tem o mesmo valor qualquer que seja a orientação do êmbolo. A pressão é uma grandeza escalar; suas propriedades não dependem da orientação. É verdade que a força que age sobre o êmbolo do nosso sensor de pressão é uma grandeza vetorial, mas a Eq. 14-4 envolve apenas o *módulo* da força, que é uma grandeza escalar.

A unidade de pressão no SI é o newton por metro quadrado, que recebe um nome especial, o **pascal** (Pa). Em muitos países, os medidores de pressão de pneus estão calibrados em quilopascals. A relação entre o pascal e outras unidades de pressão muito usadas na prática (mas que não pertencem ao SI) é a seguinte:

$$1 \text{ atm} = 1{,}01 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ torr} = 14{,}7 \text{ lb/in}^2.$$

A *atmosfera* (atm) é, como o nome indica, a pressão média aproximada da atmosfera ao nível do mar. O *torr* (nome dado em homenagem a Evangelista Torricelli, que inventou o barômetro de mercúrio em 1674) já foi chamado de *milímetro de mercúrio* (mmHg). A abreviação de libra por polegada quadrada é psi (do inglês *p*ound per *s*quare *i*nch). A Tabela 14-2 mostra algumas pressões em pascals.

Exemplo

Pressão atmosférica e força

Uma sala de estar tem 4,2 m de comprimento, 3,5 m de largura e 2,4 m de altura.

(a) Qual é o peso do ar contido na sala se a pressão do ar é 1,0 atm?

IDEIAS-CHAVE

(1) O peso do ar é mg, onde m é a massa do ar. (2) A massa m está relacionada à massa específica ρ e ao volume V do ar através da Eq. 14-2 ($\rho = m/V$).

Cálculo Combinando as duas ideias e usando a massa específica do ar para 1,0 atm que aparece na Tabela 14-1, temos:

$$\begin{aligned} mg &= (\rho V)g \\ &= (1{,}21 \text{ kg/m}^3)(3{,}5 \text{ m} \times 4{,}2 \text{ m} \times 2{,}4 \text{ m})(9{,}8 \text{ m/s}^2) \\ &= 418 \text{ N} \approx 420 \text{ N}. \end{aligned} \qquad \text{(Resposta)}$$

Este valor corresponde ao peso de aproximadamente 110 latas de refrigerante.

(b) Qual é o módulo da força que a atmosfera exerce, de cima para baixo, sobre a cabeça de uma pessoa, que tem uma área da ordem de 0,040 m²?

IDEIA-CHAVE

Quando a pressão p que um fluido exerce sobre uma superfície de área A é uniforme, a força que o fluido exerce

sobre a superfície pode ser calculada usando a Eq. 14-4 ($p = F/A$).

Cálculo Embora a pressão do ar varie de acordo com o local e a hora do dia, podemos dizer que é aproximadamente 1,0 atm. Nesse caso, a Eq. 14-4 nos dá

$$F = pA = (1{,}0\ \text{atm})\left(\frac{1{,}01 \times 10^5\ \text{N/m}^2}{1{,}0\ \text{atm}}\right)(0{,}040\ \text{m}^2)$$

$$= 4{,}0 \times 10^3\ \text{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Esta força considerável é igual ao peso da coluna de ar que está acima da cabeça da pessoa e se estende até o limite superior da atmosfera terrestre.

14-4 Fluidos em Repouso

A Fig. 14-2*a* mostra um tanque de água (ou outro líquido qualquer) aberto para a atmosfera. Como todo mergulhador sabe, a pressão *aumenta* com a profundidade abaixo da interface ar–água. O medidor de profundidade usado pelos mergulhadores é, na verdade, um sensor de pressão semelhante ao da Fig. 14-1*b*. Como todo alpinista sabe, a pressão *diminui* com a altitude acima do nível do mar. As pressões encontradas pelos mergulhadores e alpinistas são chamadas de *pressões hidrostáticas* porque se devem a fluidos estáticos (em repouso). Vamos agora obter uma expressão para a pressão hidrostática em função da profundidade ou da altitude.

Para começar, vamos examinar o aumento da pressão com a profundidade em um tanque com água. Definimos um eixo y vertical com a origem na interface ar–água e o sentido positivo para cima e consideramos a água contida em um cilindro imaginário circular reto de bases A horizontais. Nesse caso, y_1 e y_2 (ambos números *negativos*) são as profundidades abaixo da superfície das bases superior e inferior do cilindro, respectivamente.

A Fig. 14-2*e* mostra o diagrama de corpo livre da água do cilindro. A água do cilindro se encontra em *equilíbrio estático*, ou seja, está em repouso e a resultante das forças que agem sobre o cilindro é nula. O cilindro está sujeito a três forças verticais: a força $\vec{F}_1$ age sobre a superfície superior do cilindro e se deve à água que está acima do cilindro (Fig. 14-2*b*). A força $\vec{F}_2$ age sobre a superfície inferior do cilindro e se deve à água que está abaixo do cilindro (Fig. 14-2*c*). A força gravitacional que age sobre a água do cilindro está representada por $m\vec{g}$, onde m é a massa da água contida no cilindro (Fig. 14-2*d*). O equilíbrio dessas forças pode ser escrito na forma

$$F_2 = F_1 + mg. \qquad (14\text{-}5)$$

Queremos transformar a Eq. 14-5 em uma equação envolvendo pressões. De acordo com a Eq. 14-4,

$$F_1 = p_1 A \quad \text{e} \quad F_2 = p_2 A. \qquad (14\text{-}6)$$

A massa m da água do cilindro é, segundo a Eq. 14-2, $m = \rho V$, onde o volume V do cilindro é o produto da área da base A pela altura $y_1 - y_2$. Assim, m é igual a $\rho A(y_1 - y_2)$. Substituindo este resultado e a Eq. 14-6 na Eq. 14-5, obtemos

$$p_2 A = p_1 A + \rho A g(y_1 - y_2)$$

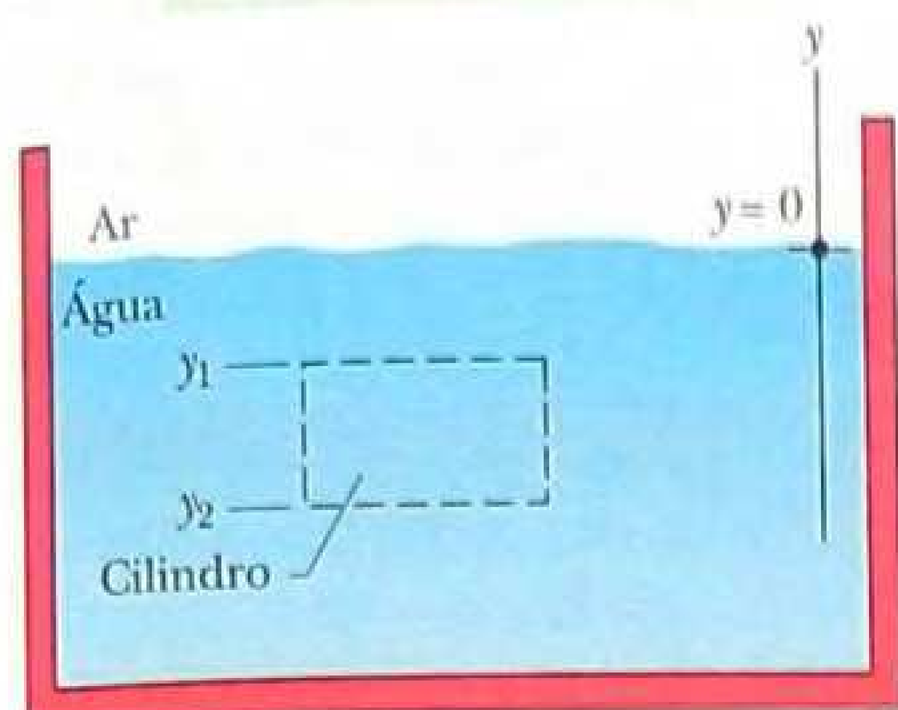
ou

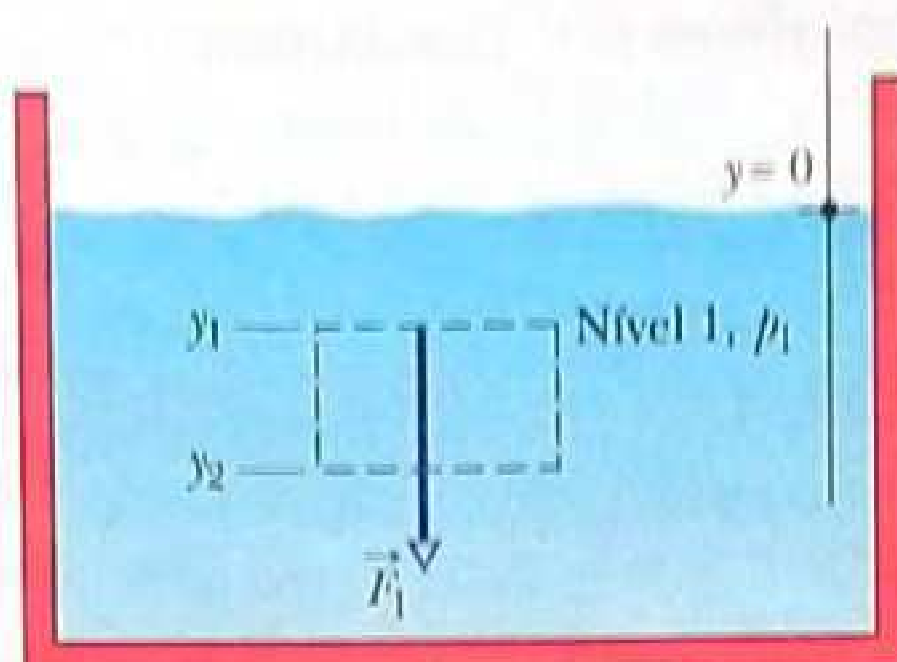
$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2). \qquad (14\text{-}7)$$

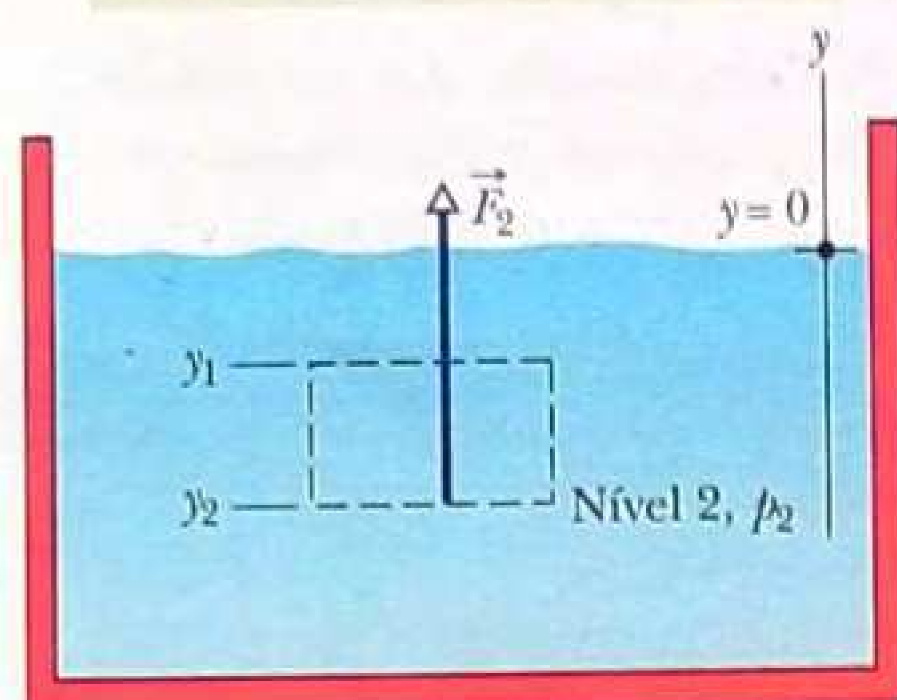
Esta equação pode ser usada para determinar a pressão tanto em um líquido (em função da profundidade) como na atmosfera (em função da altitude ou altura). No primeiro caso, suponha que estejamos interessados em conhecer a pressão p a uma profundidade h abaixo da superfície do líquido. Nesse caso, escolhemos o nível 1 como a superfície, o nível 2 como uma distância h abaixo do nível 1 (como na Fig. 14-3) e p_0 como a pressão atmosférica na superfície. Fazemos, portanto,

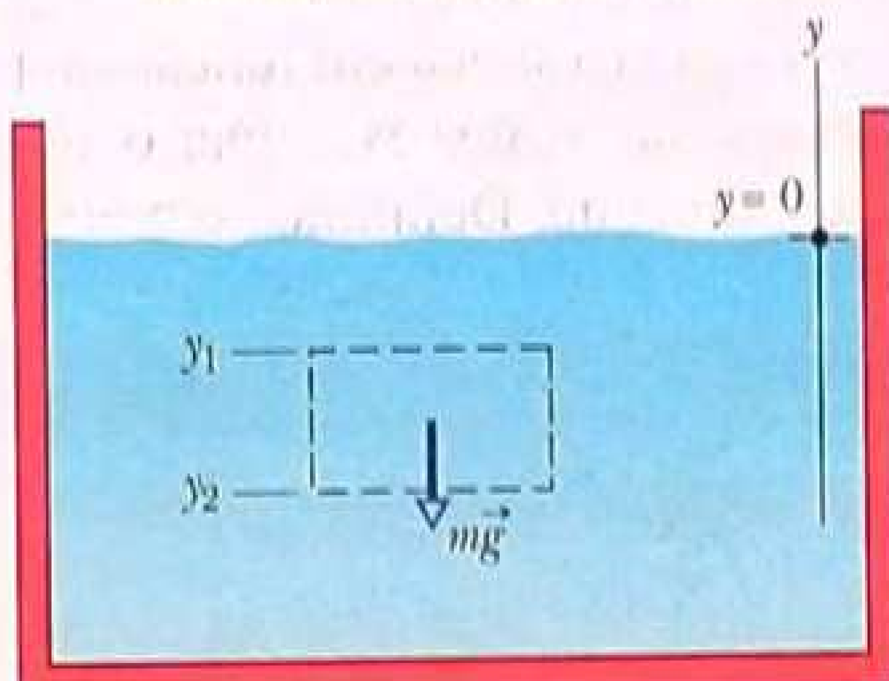
$$y_1 = 0, \quad p_1 = p_0 \quad \text{e} \quad y_2 = -h, \quad p_2 = p$$











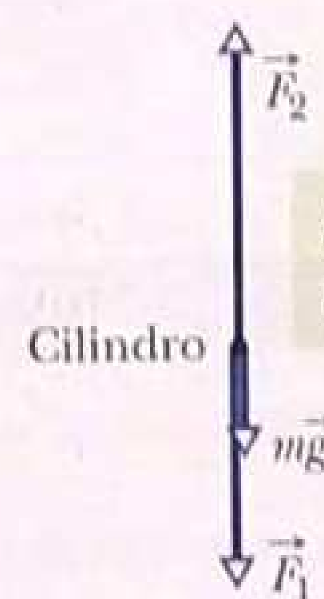


Figura 14-2 (*a*) Um tanque de água no qual um certo volume de água está contido em um cilindro imaginário com base horizontal de área *A*. (*b*) a (*d*) Uma força $\vec{F}_1$ age sobre a superfície superior do cilindro; uma força $\vec{F}_2$ age sobre a superfície inferior do cilindro; a força gravitacional que age sobre a água do cilindro está representada por $m\vec{g}$. (*e*) Diagrama de corpo livre do volume de água.

na Eq. 14-7 e obtemos

$$p = p_0 + \rho g h \quad \text{(pressão na profundidade } h\text{).} \tag{14-8}$$

Note que a pressão em uma dada profundidade no líquido depende da profundidade, mas não da dimensão horizontal.

A pressão em um ponto de um fluido em equilíbrio estático depende da profundidade do ponto, mas não da dimensão horizontal do fluido ou do recipiente.

Assim, a Eq. 14-8 é válida qualquer que seja a forma do recipiente. Se a superfície inferior do recipiente está a uma profundidade h, a Eq. 14-8 fornece a pressão p nessa profundidade.

Na Eq. 14-8, p é chamada de pressão total, ou **pressão absoluta**, no nível 2. Para compreender por quê, observe na Fig. 14-3 que a pressão p no nível 2 é a soma de duas parcelas: (1) p_0, a pressão da atmosfera, que é aplicada à superfície do líquido, e (2) $\rho g h$, a pressão do líquido que está acima do nível 2, que é aplicada nesse nível. A diferença entre a pressão absoluta e a pressão atmosférica é chamada de **pressão manométrica**. (O nome se deve ao uso de um manômetro para medir a diferença de pressão.) Para a situação da Fig. 14-3, a pressão manométrica é $\rho g h$.

A Eq. 14-7 também pode ser usada acima da superfície do líquido. Nesse caso, ela fornece a pressão atmosférica a uma dada distância acima do nível 1 em termos

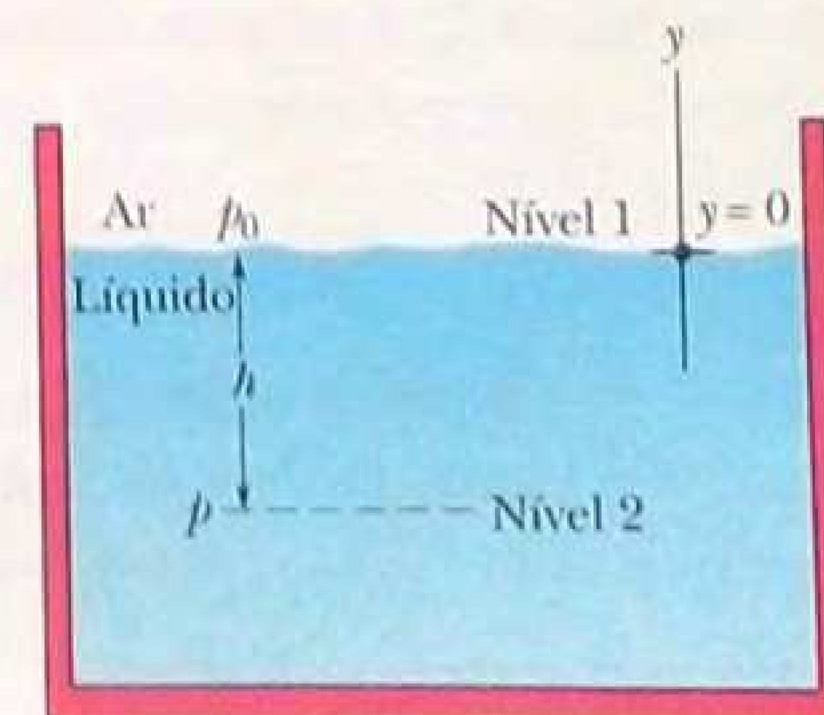


Figura 14-3 A pressão p aumenta com a profundidade h abaixo da superfície do líquido de acordo com a Eq. 14-8.

da pressão atmosférica p_1 no nível 1 (*supondo* que a massa específica da atmosfera é uniforme ao longo dessa distância). Assim, por exemplo, para calcular a pressão atmosférica a uma distância d acima do nível 1 da Fig. 14-3, fazemos

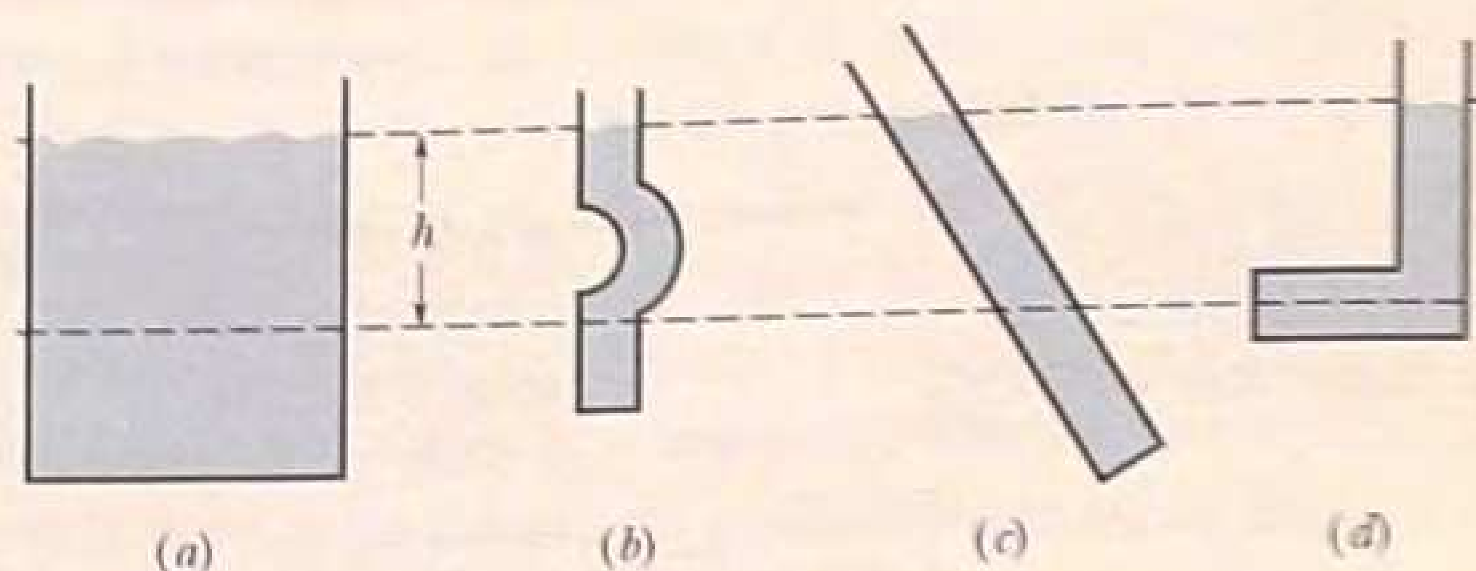
$$y_1 = 0, \quad p_1 = p_0 \quad \text{e} \quad y_2 = d, \quad p_2 = p.$$

Nesse caso, com $\rho = \rho_{ar}$, obtemos

$$p = p_0 - \rho_{ar} g d.$$

TESTE 1

A figura mostra quatro recipientes de azeite. Ordene-os de acordo com a pressão na profundidade h, começando pela maior.



Exemplo

Pressão barométrica: mergulhador

Um mergulhador novato, praticando em uma piscina, inspira ar suficiente do tanque para expandir totalmente os pulmões antes de abandonar o tanque a uma profundidade L e nadar para a superfície. Ele ignora as instruções e não exala o ar durante a subida. Ao chegar à superfície, a diferença entre a pressão externa a que está submetido e a pressão do ar nos pulmões é 9,3 kPa. De que profundidade partiu? Que risco possivelmente fatal está correndo?

IDEIA-CHAVE

A pressão a uma profundidade h em um líquido de massa específica ρ é dada pela Eq. 14-8 ($p = p_0 + \rho g h$), na qual a pressão manométrica $\rho g h$ é somada à pressão atmosférica p_0.

Cálculos Quando o mergulhador enche os pulmões na profundidade L, a pressão externa sobre ele (e, portanto, a pressão nos pulmões) está acima do normal e é dada pela Eq. 14-8:

$$p = p_0 + \rho g L,$$

onde p_0 é a pressão atmosférica e ρ é a massa específica da água (998 kg/m³, de acordo com a Tabela 14-1). Quando o mergulhador sobe, a pressão externa diminui até se tornar igual à pressão atmosférica p_0 quando o mergulhador atinge a superfície. A pressão sanguínea também diminui até voltar ao normal. Entretanto, como o mergulhador não exalou o ar, a pressão do ar nos pulmões permanece no valor correspondente à profundidade L. Na superfície, a diferença entre a pressão mais alta nos pulmões e a pressão mais baixa no sangue é

$$\Delta p = p - p_0 = \rho g L,$$

e, portanto,

$$L = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{9300 \text{ Pa}}{(998 \text{ kg/m}^3)(9{,}8 \text{ m/s}^2)}$$
$$= 0{,}95 \text{ m.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Trata-se de uma profundidade muito pequena! Mesmo assim, a diferença de pressão de 9,3 kPa (aproximadamente 9% da pressão atmosférica) é suficiente para romper os pulmões do mergulhador e forçar a passagem de ar dos pulmões para a corrente sanguínea, que transporta o ar para o coração, matando o mergulhador. Se ele seguir as instruções e exalar o ar gradualmente enquanto sobe, permitirá que a pressão nos pulmões se torne igual à pressão externa, eliminando o perigo.

Exemplo

Equilíbrio de pressões em um tubo em forma de U

O tubo em forma de U da Fig. 14-4 contém dois líquidos em equilíbrio estático: no lado direito existe água de massa específica ρ_a (= 998 kg/m³) e no lado esquerdo existe óleo de massa específica desconhecida ρ_x. Os valores das distâncias indicadas na figura são l = 135 mm e d = 12,3 mm. Qual é a massa específica do óleo?

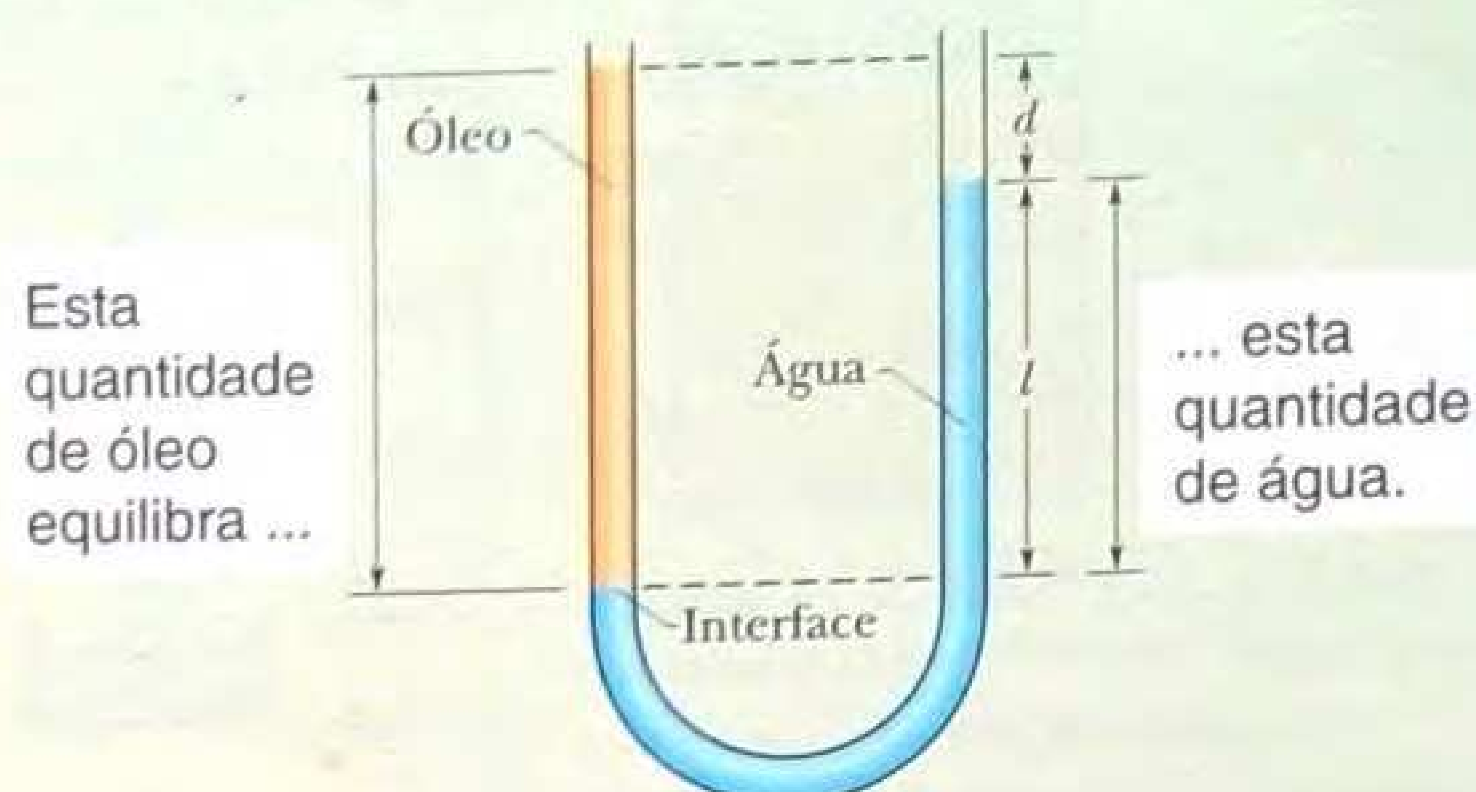


Figura 14-4 O óleo do lado esquerdo fica mais alto que a água do lado direito porque a massa específica do óleo é menor que a da água. As duas colunas de fluido produzem a mesma pressão p_{int} na interface.

IDEIAS-CHAVE

(1) A pressão p_{int} no nível correspondente à interface óleo–água do lado esquerdo depende da massa específica ρ_x e da altura do óleo acima da interface. (2) A água do lado direito *à mesma altura* está submetida à mesma pressão p_{int}. Isso acontece porque, como a água está em equilíbrio estático, as pressões em pontos na água no mesmo nível são necessariamente iguais, mesmo que os pontos estejam separados horizontalmente.

Cálculos No lado direito, a interface está uma distância l abaixo da superfície da *água* e a Eq. 14-8 nos dá

$$p_{int} = p_0 + \rho_a g l \quad \text{(lado direito)}.$$

No lado esquerdo, a interface está a uma distância $l + d$ abaixo da superfície do *óleo* e a Eq. 14-8 nos dá

$$p_{int} = p_0 + \rho_x g(l + d) \quad \text{(lado esquerdo)}.$$

Igualando as duas expressões e explicitando a massa específica desconhecida, obtemos

$$\rho_x = \rho_a \frac{l}{l+d} = (998\ \text{kg/m}^3)\frac{135\ \text{mm}}{135\ \text{mm} + 12{,}3\ \text{mm}}$$
$$= 915\ \text{kg/m}^3. \quad \text{(Resposta)}$$

Note que a resposta não depende da pressão atmosférica p_0 nem da aceleração de queda livre g.

14-5 Medindo a Pressão

O Barômetro de Mercúrio

A Fig. 14-5*a* mostra um *barômetro de mercúrio* simples, aparelho usado para medir a pressão da atmosfera. Como mostra a figura, um tubo de vidro é enchido com mercúrio e invertido com a extremidade aberta mergulhada em um recipiente contendo mercúrio. O espaço acima da coluna de mercúrio contém apenas vapor de mercúrio, cuja pressão é tão baixa à temperatura ambiente que pode ser desprezada.

Podemos usar a Eq. 14-7 para determinar a pressão atmosférica p_0 em termos da altura h da coluna de mercúrio. Como mostra a Fig. 14-5*a*, escolhemos o nível 1 da Fig. 14-2 como o da interface ar–mercúrio e o nível 2 como o do alto da coluna de mercúrio. Em seguida, fazemos

$$y_1 = 0, \quad p_1 = p_0 \quad \text{e} \quad y_2 = h, \quad p_2 = 0$$

na Eq. 14-7, o que nos dá

$$p_0 = \rho g h, \tag{14-9}$$

onde ρ é a massa específica do mercúrio.

Para uma dada pressão, a altura h da coluna de mercúrio não depende da área de seção reta do tubo vertical. O barômetro de mercúrio mais sofisticado da Fig. 14-5*b* fornece a mesma leitura que o da Fig. 14-5*a*; tudo que importa é a distância vertical h entre os níveis de mercúrio.

A Eq. 14-9 mostra que, para uma dada pressão, a altura da coluna de mercúrio depende do valor de g no local onde se encontra o barômetro e da massa específica do mercúrio, que varia com a temperatura. A altura da coluna (em milímetros)

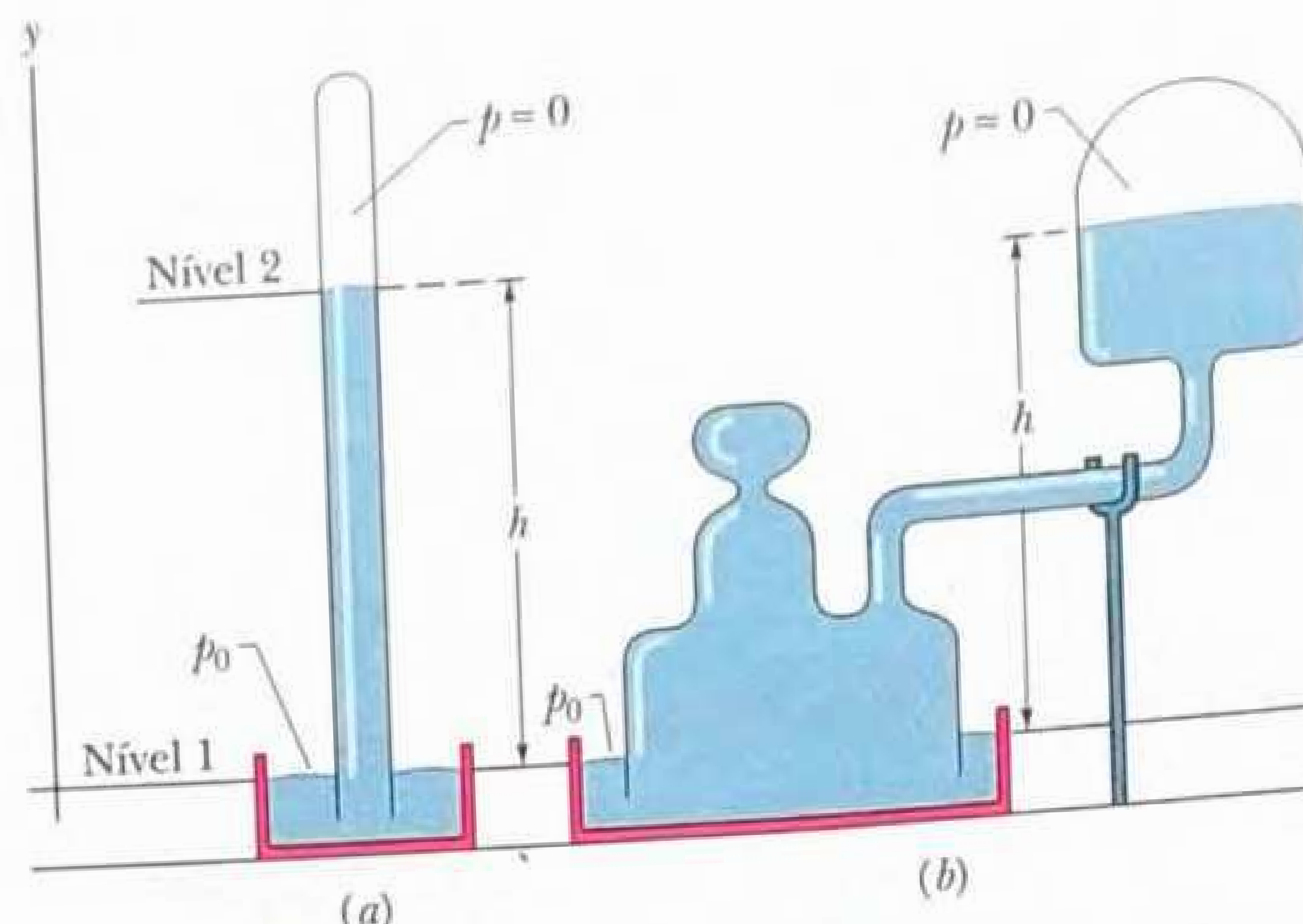


Figura 14-5 (*a*) Um barômetro de mercúrio. (*b*) Outro barômetro de mercúrio. A distância *h* é a mesma nos dois casos.

é numericamente igual à pressão (em torr) *apenas* se o barômetro estiver em um local onde *g* tem o valor padrão de 9,80665 m/s² *e* se a temperatura do mercúrio for 0°C. Se essas condições não forem satisfeitas (e raramente o são), pequenas correções devem ser feitas para que a altura da coluna de mercúrio possa ser lida como pressão.

O Manômetro de Tubo Aberto

Um *manômetro de tubo aberto* (Fig. 14-6), usado para medir a pressão manométrica p_m de um gás, é formado por um tubo em forma de U contendo um líquido, com uma das extremidades ligada a um recipiente cuja pressão manométrica se deseja medir e a outra aberta para a atmosfera. Podemos usar a Eq. 14-7 para determinar a pressão manométrica em termos da altura *h* mostrada na Fig. 14-6. Vamos escolher os níveis 1 e 2 da Fig. 14-6. Fazendo

$$y_1 = 0, \quad p_1 = p_0 \quad \text{e} \quad y_2 = -h, \quad p_2 = p$$

na Eq. 14-7, obtemos

$$p_m = p - p_0 = \rho g h, \tag{14-10}$$

onde ρ é a massa específica do líquido contido no tubo. A pressão manométrica p_m é diretamente proporcional a *h*.

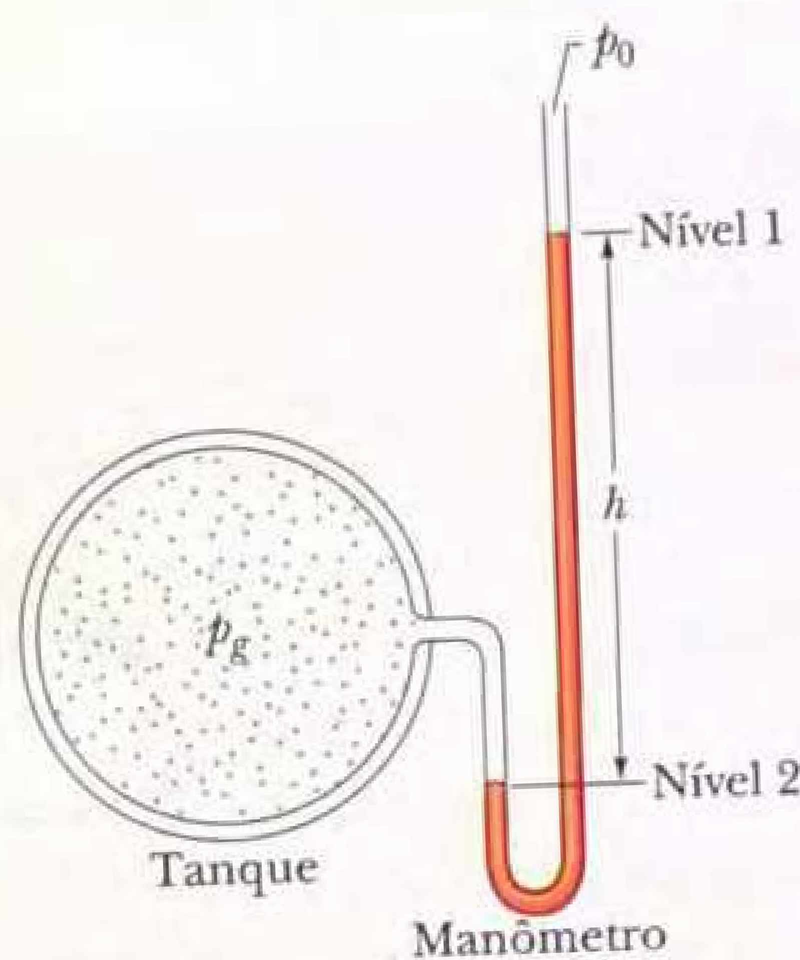


Figura 14-6 Um manômetro de tubo aberto, usado para medir a pressão manométrica do gás contido no tanque da esquerda. O lado direito do tubo em U está aberto para a atmosfera.

A pressão manométrica pode ser positiva ou negativa, dependendo de se $p > p_0$ ou $p < p_0$. Nos pneus e no sistema circulatório, a pressão (absoluta) é maior do que a pressão atmosférica, de modo que a pressão manométrica é uma grandeza positiva, às vezes chamada de *sobrepressão*. Quando alguém usa um canudo para beber um refrigerante, a pressão (absoluta) nos pulmões é menor do que a pressão atmosférica. Nesse caso, a pressão manométrica nos pulmões é uma grandeza negativa.

14-6 O Princípio de Pascal

Quando apertamos uma extremidade de um tubo de pasta de dente para fazer a pasta sair pela outra extremidade, estamos pondo em prática o **princípio de Pascal**. Este princípio também é usado na manobra de Heimlich, na qual uma pressão aplicada ao abdômen é transmitida para a garganta, liberando um pedaço de comida ali alojado. O princípio foi enunciado com clareza pela primeira vez em 1652 por Blaise Pascal (em cuja homenagem foi batizada a unidade de pressão do SI):

> Uma variação da pressão aplicada a um fluido incompressível contido em um recipiente é transmitida integralmente a todas as partes do fluido e às paredes do recipiente.

Demonstração do Princípio de Pascal

Considere o caso no qual o fluido incompressível é um líquido contido em um cilindro, como na Fig. 14-7. O cilindro é fechado por um êmbolo no qual repousa um recipiente com bolinhas de chumbo. A atmosfera, o recipiente e as bolinhas de chumbo exercem uma pressão p_{ext} sobre o êmbolo e, portanto, sobre o líquido. A pressão p em qualquer ponto P do líquido é dada por

$$p = p_{ext} + \rho g h. \tag{14-11}$$

Vamos adicionar algumas bolinhas de chumbo ao recipiente para aumentar p_{ext} de um valor Δp_{ext}. Como os valores dos parâmetros ρ, g e h da Eq. 14-11 permanecem os mesmos, a variação de pressão no ponto P é

$$\Delta p = \Delta p_{ext}. \tag{14-12}$$

Como esta variação de pressão não depende de h, então é a mesma para todos os pontos do interior do líquido, como afirma o princípio de Pascal.

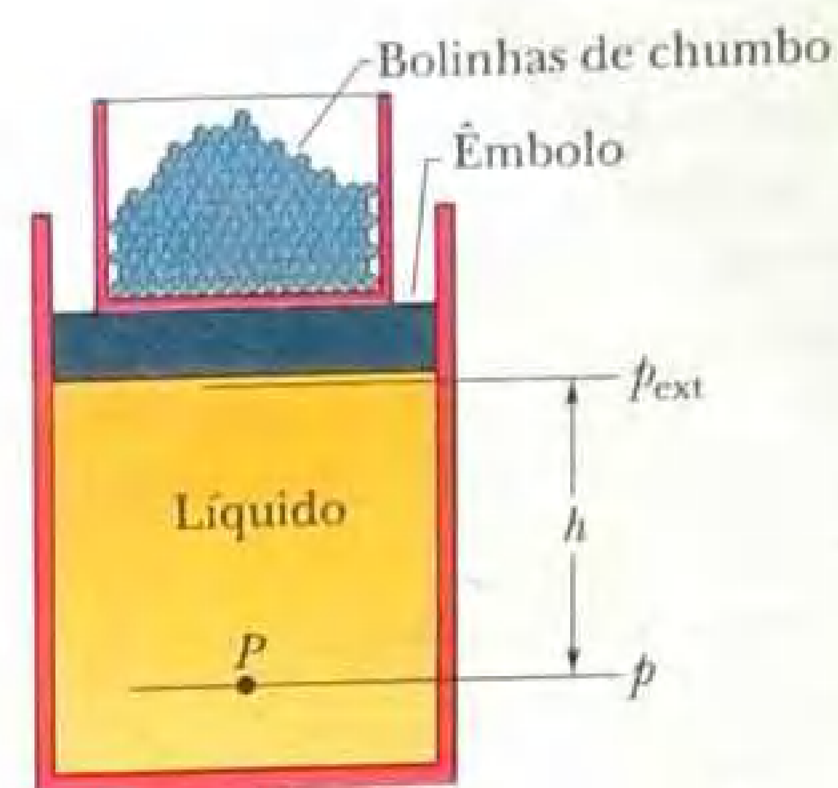


Figura 14-7 Bolinhas de chumbo colocadas sobre o êmbolo criam uma pressão p_{ext} no alto de um líquido confinado (incompressível). Se mais bolinhas de chumbo são colocadas sobre o êmbolo, fazendo aumentar p_{ext}, a pressão aumenta do mesmo valor em todos os pontos do líquido.

O Princípio de Pascal e o Macaco Hidráulico

A Fig. 14-8 mostra a relação entre o princípio de Pascal e o macaco hidráulico. Suponha que uma força externa de módulo F_e seja aplicada de cima para baixo ao êmbolo da esquerda (ou de entrada), cuja área é A_e. Um líquido incompressível produz uma força de baixo para cima, de módulo F_s, no êmbolo da direita (ou de saída), cuja área é A_s. Para manter o sistema em equilíbrio, deve existir uma força para baixo de módulo F_s no êmbolo de saída, exercida por uma carga externa (não mostrada na figura). A força $\vec{F}_e$ aplicada no lado esquerdo e a força $\vec{F}_s$ para baixo exercida pela carga no lado direito produzem uma variação Δp da pressão do líquido que é dada por

$$\Delta p = \frac{F_e}{A_e} = \frac{F_s}{A_s},$$

e, portanto,

$$F_s = F_e \frac{A_s}{A_e}. \tag{14-13}$$

A Eq. 14-13 mostra que a força de saída F_s exercida sobre a carga é maior que a força de entrada F_e se $A_s > A_e$, como na Fig. 14-8.

Quando deslocamos o êmbolo de entrada para baixo de uma distância d_e, o êmbolo de saída se desloca para cima de uma distância d_s, de modo que o mesmo volume V de líquido incompressível é deslocado pelos dois êmbolos. Assim,

$$V = A_e d_e = A_s d_s,$$

que pode ser escrita como

$$d_s = d_e \frac{A_e}{A_s}. \tag{14-14}$$

Isto mostra que, se $A_s > A_e$ (como na Fig. 14-8), o êmbolo de saída percorre uma distância menor que o êmbolo de entrada.

De acordo com as Eqs. 14-13 e 14-14, o trabalho de saída é dado por

$$W = F_s d_s = \left(F_e \frac{A_s}{A_e}\right)\left(d_e \frac{A_e}{A_s}\right) = F_e d_e, \tag{14-15}$$

o que mostra que o trabalho W realizado *sobre* o êmbolo de entrada pela força aplicada é igual ao trabalho W realizado *pelo* êmbolo de saída ao levantar uma carga.

A vantagem do macaco hidráulico é a seguinte:

> Com um macaco hidráulico, uma força aplicada ao longo de uma distância pode ser transformada em uma força maior aplicada ao longo de uma distância menor.

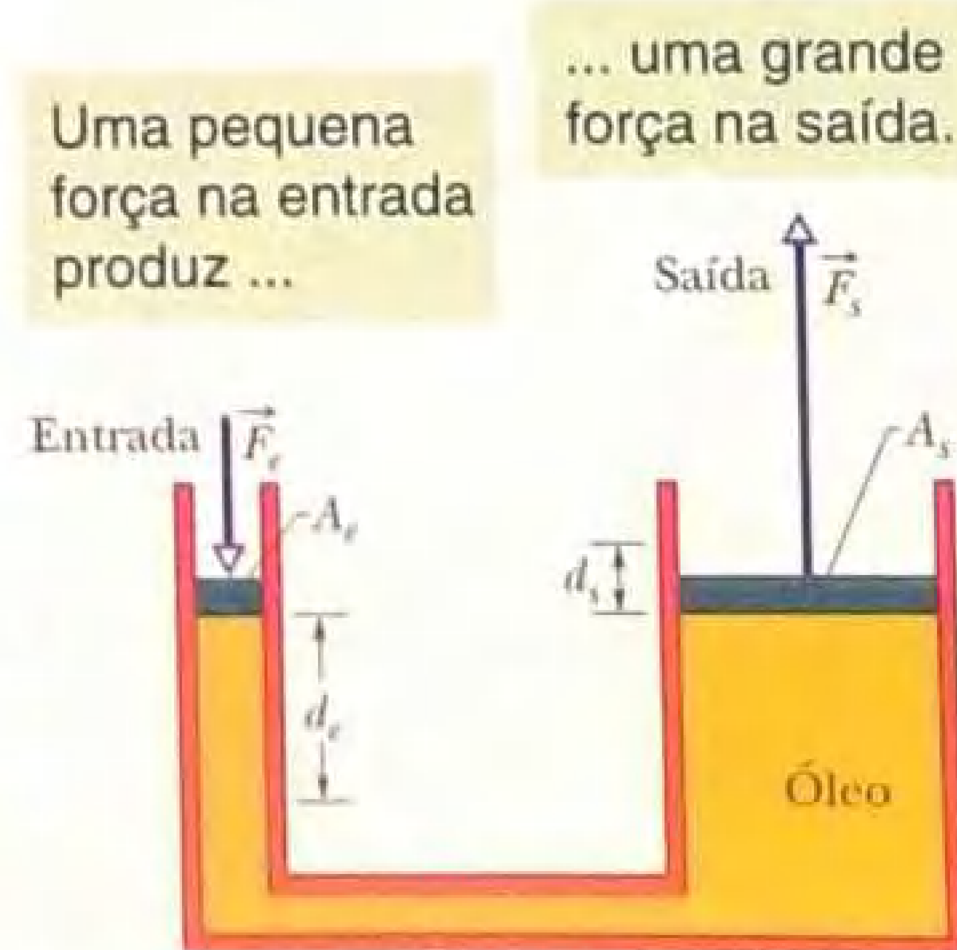


Figura 14-8 Um macaco hidráulico pode ser usado para amplificar a força $\vec{F}_e$, mas não o trabalho, que é o mesmo para as forças de entrada e de saída.

Como o produto da força pela distância permanece inalterado, o trabalho realizado é o mesmo. Entretanto, há, frequentemente, uma grande vantagem em poder exercer uma força maior. Muitos de nós, por exemplo, não temos força para levantar um automóvel, mas podemos fazê-lo usando um macaco hidráulico, ainda que, ao movimentar a alavanca do macaco, em uma série de movimentos curtos, tenhamos que fazê-la percorrer uma distância muito maior que a distância vertical percorrida pelo automóvel.

14-7 O Princípio de Arquimedes

A força de empuxo que age sobre o saco plástico cheio d'água é igual ao peso da água.



Figura 14-9 Um saco plástico de massa desprezível, cheio d'água, em equilíbrio estático em uma piscina. A força gravitacional experimentada pelo saco é equilibrada por uma força resultante para cima exercida pela água que o cerca.

A Fig. 14-9 mostra uma estudante em uma piscina, manuseando um saco plástico muito fino (de massa desprezível) cheio d'água. A jovem observa que o saco e a água nele contida estão em equilíbrio estático, ou seja, não tendem a subir nem a descer. A força gravitacional para baixo $\vec{F}_g$ a que a água contida no saco está submetida é equilibrada por uma força para cima exercida pela água que está do lado de fora do saco.

A força para cima, que recebe o nome de **força de empuxo** e é representada pelo símbolo $\vec{F}_E$, se deve ao fato de que a pressão da água que envolve o saco aumenta com a profundidade. Assim, a pressão na parte inferior do saco é maior que na parte superior, o que faz com que as forças a que o saco está submetido devido à pressão sejam maiores em módulo na parte de baixo do saco do que na parte de cima. Algumas dessas forças estão representadas na Fig. 14-10*a*, onde o espaço ocupado pelo saco foi deixado vazio. Note que os vetores que representam as forças na parte de baixo do saco (com componentes para cima) são mais compridos que os vetores que representam as forças na parte de cima do saco (com componentes para baixo). Quando somamos vetorialmente todas as forças exercidas pela água sobre o saco, as componentes horizontais se cancelam e a soma das componentes verticais é o empuxo $\vec{F}_E$ que age sobre o saco. (A força $\vec{F}_E$ está representada à direita da piscina na Fig. 14-10*a*.)

Como o saco de água está em equilíbrio estático, o módulo de $\vec{F}_E$ é igual ao módulo $m_f g$ da força gravitacional $\vec{F}_g$ que age sobre o saco com água: $F_E = m_f g$. (O índice f significa *fluido*, no caso a água.) Em palavras, o módulo do empuxo é igual ao peso da água no interior do saco.

Na Fig. 14-10*b*, trocamos o saco plástico com água por uma pedra que ocupa um volume igual ao do espaço vazio da Fig. 14-10*a*. Dizemos que a pedra *desloca* a água, ou seja, ocupa o espaço que, de outra forma, seria ocupado pela água. Como a forma da cavidade não foi alterada, as forças na superfície da cavidade são as mesmas que quando o saco plástico com água estava nesse lugar. Assim, o mesmo empuxo para cima que agia sobre o saco plástico agora age sobre a pedra, ou seja, o módulo F_E do empuxo é igual a $m_f g$, o peso da água deslocada pela pedra.

Ao contrário do saco com água, a pedra não está em equilíbrio estático. A força gravitacional $\vec{F}_g$ para baixo que age sobre a pedra tem um módulo maior que o empuxo para cima, como mostra o diagrama de corpo livre da Fig. 14-10*b*. Assim, a pedra acelera para baixo, descendo até o fundo da piscina.

Vamos agora preencher a cavidade da Fig. 14-10*a* com um pedaço de madeira, como na Fig. 14-10*c*. Mais uma vez, nada mudou com relação às forças que agem sobre a superfície da cavidade, de modo que o módulo F_E do empuxo é igual a $m_f g$, o peso da água deslocada. Como a pedra, o pedaço de madeira não está em equilíbrio estático. Nesse caso, porém, o módulo F_g da força gravitacional é menor que o módulo F_E do empuxo (como mostra o diagrama à direita da piscina), de modo que a madeira acelera para cima, subindo até a superfície.

Os resultados que obtivemos para o saco plástico, a pedra e o pedaço de madeira se aplicam a qualquer fluido e podem ser resumidos no **princípio de Arquimedes**:

Quando um corpo está total ou parcialmente submerso em um fluido, uma força de empuxo $\vec{F}_E$ exercida pelo fluido age sobre o corpo. A força é dirigida para cima e tem um módulo igual ao peso $m_f g$ do fluido deslocado pelo corpo.

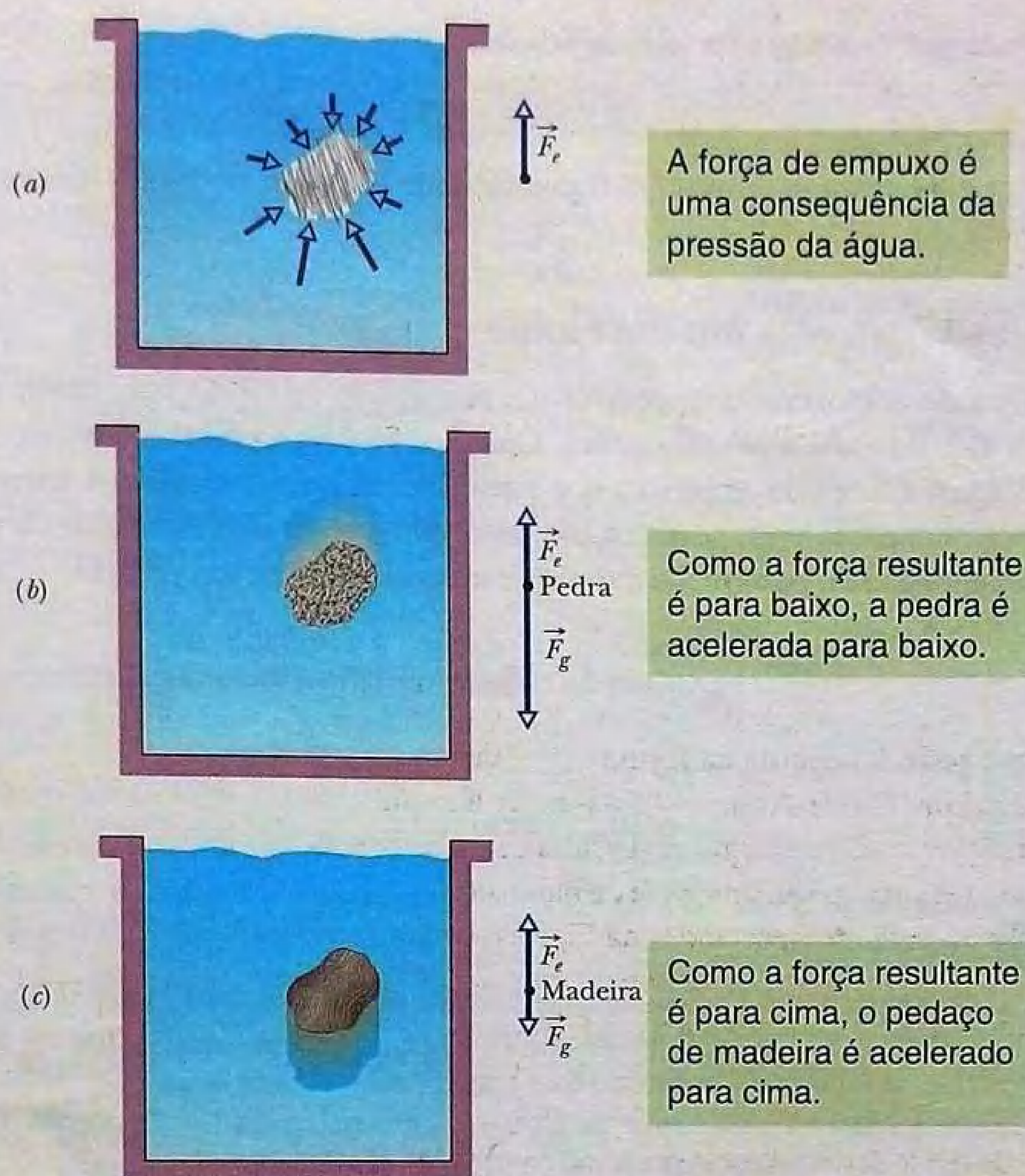


Figura 14-10 (*a*) A água que está em volta da cavidade produz um empuxo resultante para cima sobre qualquer material que ocupe a cavidade. (*b*) No caso de uma pedra de mesmo volume que a cavidade, a força gravitacional é maior que o empuxo. (*c*) No caso de um pedaço de madeira de mesmo volume, a força gravitacional é menor que o empuxo.

De acordo com o princípio de Arquimedes, o módulo da força de empuxo é dado por

$$F_E = m_f g \quad \text{(força de empuxo)}, \qquad (14\text{-}16)$$

onde m_f é a massa do fluido deslocado pelo corpo.

Flutuação

Quando pousamos um pedaço de madeira na superfície de uma piscina, a madeira começa a afundar na água porque é puxada para baixo pela força gravitacional. À medida que o bloco desloca mais e mais água, o módulo F_e da força de empuxo, que aponta para cima, aumenta. Finalmente, F_e se torna igual ao módulo F_g da força gravitacional e a madeira para de afundar. A partir desse momento, o pedaço de madeira permanece em equilíbrio estático e dizemos que está *flutuando* na água. Em todos os casos,

> Quando um corpo flutua em um fluido, o módulo F_e da força de empuxo que age sobre o corpo é igual ao módulo F_g da força gravitacional a que o corpo está submetido.

Podemos escrever esta afirmação como

$$F_e = F_g \quad \text{(flutuação)}. \qquad (14\text{-}17)$$

De acordo com a Eq. 14-16, $F_e = m_f g$. Assim,

> Quando um corpo flutua em um fluido, o módulo F_g da força gravitacional a que o corpo está submetido é igual ao peso $m_f g$ do fluido deslocado pelo corpo.

Podemos escrever esta afirmação como

$$F_g = m_f g \quad \text{(flutuação)}. \tag{14-18}$$

Em palavras, um corpo que flutua desloca um peso de fluido igual ao seu próprio peso.

Peso Aparente em um Fluido

Quando colocamos uma pedra em uma balança calibrada para medir pesos, a leitura da balança é o peso da pedra. Quando, porém, repetimos a experiência debaixo d'água, a força de empuxo a que a pedra é submetida diminui a leitura da balança. A leitura passa a ser, portanto, um peso aparente. O **peso aparente** de um corpo está relacionado ao peso real e à força de empuxo através da equação

$$\begin{pmatrix}\text{peso}\\ \text{aparente}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{peso}\\ \text{real}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{módulo da}\\ \text{força de empuxo}\end{pmatrix},$$

que pode ser escrita na forma

$$\text{peso}_{ap} = \text{peso} - F_b \quad \text{(peso aparente)}. \tag{14-19}$$

TESTE 2

Um pinguim flutua, primeiro em um fluido de massa específica ρ_0, depois em um fluido de massa específica $0{,}95\rho_0$ e, finalmente, em um fluido de massa específica $1{,}1\ \rho_0$. (a) Ordene as massas específicas de acordo com o módulo da força de empuxo exercida sobre o pinguim, começando pela maior. (b) Ordene as massas específicas de acordo com o volume de fluido deslocado pelo pinguim, começando pelo maior.

Se, em um teste de força, você tivesse que levantar uma pedra pesada, poderia fazer isso com mais facilidade debaixo d'água. Nesse caso, a força aplicada teria que ser maior que o peso aparente da pedra e não que o peso real, pois a força de empuxo o ajudaria a levantar a pedra.

O módulo da força de empuxo a que está sujeito um corpo que flutua é igual ao peso do corpo. A Eq. 14-19 nos diz, portanto, que um corpo que flutua tem um peso aparente nulo; o corpo produziria uma leitura zero ao ser pesado em uma balança. (Quando os astronautas se preparam para realizar uma tarefa complexa no espaço, usam uma piscina para praticar, pois na água seu peso aparente é nulo, como no espaço.)

Exemplo

Flutuação, empuxo e massa específica

Na Fig. 14-11, um bloco de massa específica $\rho = 800$ kg/m³ flutua em um fluido de massa específica $\rho_f = 1200$ kg/m³. O bloco tem uma altura $H = 6{,}0$ cm.

(a) Qual é a altura h da parte submersa do bloco?

IDEIAS-CHAVE

(1) Para que o bloco flutue, a força de empuxo a que está submetido deve ser igual à força gravitacional. (2) A força de empuxo é igual ao peso $m_f g$ do fluido deslocado pela parte submersa do bloco

Cálculos De acordo com a Eq. 14-16, o módulo da força de empuxo é $F_e = m_f g$, onde m_f é a massa do fluido deslocado pelo volume submerso do bloco, V_f. De acordo com a Eq. 14-2 ($\rho = m/V$), a massa do fluido deslocado é $m_f = \rho_f V_f$. Não conhecemos V_f, mas se chamarmos o comprimento do bloco de C e a largura de L, o volume submerso do bloco será, de acordo com a Fig. 14-11, $V_f = CLh$. Combinando as três expressões, descobrimos que o módulo da força de empuxo é dado por

$$F_e = m_f g = \rho_f V_f g = \rho_f CLhg. \tag{14-20}$$

Da mesma forma, podemos escrever o módulo F_g da força gravitacional a que o bloco está submetido, primeiro em termos da massa m do bloco e depois em termos da massa específica ρ e do volume (total) V do bloco, que, por sua

Quando a força de empuxo equilibra a força gravitacional, um objeto *flutua*.

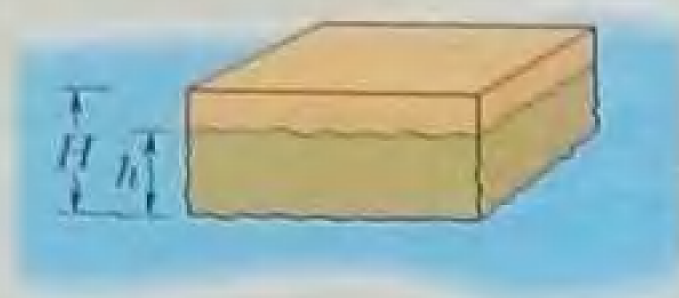


Figura 14-11 Um bloco de altura H flutuando em um fluido com uma parte h submersa.

vez, pode ser expresso em termos das dimensões do bloco, C, L e H (altura total):

$$F_g = mg = \rho V g = \rho_f CLHg. \quad (14\text{-}21)$$

Como o bloco está em repouso, a aplicação da segunda lei de Newton às componentes das forças em relação a um eixo vertical y ($F_{res,y} = ma_y$) nos dá

$$F_e - F_g = m(0),$$

ou, de acordo com as Eqs. 14-20 e 14-21,

$$\rho_f CLhg - \rho CLHg = 0,$$

e, portanto,

$$h = \frac{\rho}{\rho_f} H = \frac{800 \text{ kg/m}^3}{1200 \text{ kg/m}^3} (6{,}0 \text{ cm})$$
$$= 4{,}0 \text{ cm}. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Se o bloco for totalmente imerso e depois liberado, qual será o módulo da sua aceleração?

Cálculos A força gravitacional que age sobre o bloco é a mesma, mas agora, com o bloco totalmente submerso, o volume da água deslocada é $V = CLH$. (É usada a altura total do bloco.) Isso significa que $F_e > F_g$ e o bloco é acelerado para cima. De acordo com a segunda lei de Newton,

$$F_e - F_g = ma,$$

ou

$$\rho_f CLHg - \rho CLHg = \rho CLHa,$$

onde substituímos a massa m do bloco por ρCLH. Explicitando a, obtemos

$$a = \left(\frac{\rho_f}{\rho} - 1\right) g = \left(\frac{1200 \text{ kg/m}^3}{800 \text{ kg/m}^3} - 1\right) (9{,}8 \text{ m/s}^2)$$
$$= 4{,}9 \text{ m/s}^2. \quad \text{(Resposta)}$$

14-8 Fluidos Ideais em Movimento

O movimento de *fluidos reais* é muito complicado e ainda não está perfeitamente compreendido. Por essa razão, vamos discutir apenas o movimento de um **fluido ideal**, que é mais fácil de analisar matematicamente. Um fluido ideal satisfaz quatro requisitos no que diz respeito ao *escoamento*:

1. ***O escoamento é laminar.*** No *escoamento laminar*, a velocidade do fluido em um ponto fixo qualquer não varia com o tempo, nem em módulo nem em orientação. O escoamento suave da água na parte central de um rio de águas calmas é estacionário; o escoamento da água em uma corredeira ou perto das margens de qualquer rio, não. A Fig. 14-12 mostra a transição do escoamento laminar para *turbulento* em uma coluna de fumaça. A velocidade das partículas de fumaça aumenta à medida que sobem; para um certo valor crítico da velocidade, o escoamento muda de laminar para turbulento.
2. ***O escoamento é incompressível.*** Supomos, como no caso de fluidos em repouso, que o fluido ideal é incompressível, ou seja, que a massa específica tem um valor uniforme e constante.
3. ***O escoamento não viscoso.*** Em termos coloquiais, a viscosidade de um fluido é uma medida da resistência que o fluido oferece ao escoamento. O mel, por exemplo, resiste mais ao escoamento que a água e, portanto, é mais viscoso do que a água. A viscosidade dos fluidos é análoga ao atrito entre sólidos; ambos são mecanismos através dos quais a energia cinética de objetos em movimento é transferida para energia térmica. Se não fosse o atrito, um bloco deslizaria com velocidade constante em uma superfície horizontal. Analogamente, um objeto imerso em um fluido não viscoso não experimenta uma *força de arrasto viscoso* e se move com velocidade constante através do fluido. Como o cientista inglês Lorde Rayleigh disse uma vez, se a água do mar fosse um fluido ideal, as hélices dos navios não



FIG. 14-12 Em certo ponto, o escoamento ascendente de fumaça e gás aquecido muda de laminar para turbulento. *(Will McIntyre/Photo Researchers)*

funcionariam, mas, por outro lado, os navios (uma vez colocados em movimento) não precisariam de hélices!

4. *O escoamento é irrotacional.* Embora, a rigor, isso não seja necessário, vamos também supor que o escoamento é *irrotacional*. Para entender o que significa essa propriedade, suponha que um pequeno grão de poeira se move com o fluido. Se o escoamento é irrotacional, o grão de areia não gira em torno de um eixo que passa pelo centro de massa, embora possa girar em torno de um outro eixo qualquer. O movimento de uma roda gigante, por exemplo, é rotacional, enquanto o movimento dos passageiros é irrotacional.

Para observar o escoamento de um fluido, usamos *traçadores*, como, por exemplo, gotas de corante introduzidas em um líquido (Fig. 14-13) ou partículas de fumaça misturadas a um gás (Fig. 14-12). Cada gota ou partícula de um traçador torna visível uma *linha de fluxo*, que é a trajetória seguida por um pequeno elemento do fluido. Como vimos no Capítulo 4, a velocidade de uma partícula é tangente à trajetória da partícula. No caso que estamos examinando, a partícula é um elemento do fluido e a velocidade $\vec{v}$ do elemento é tangente a uma linha de fluxo (Fig. 14-14). Por essa razão, duas linhas de fluxo jamais se cruzam; se o fizessem, uma partícula que chegasse ao ponto de interseção poderia ter ao mesmo tempo duas velocidades diferentes, o que seria absurdo.

14-9 A Equação de Continuidade

O leitor provavelmente já observou que é possível aumentar a velocidade da água que sai de uma mangueira de jardim fechando parcialmente o bico da mangueira com o polegar. Essa é uma demonstração prática do fato de que a velocidade v da água depende da área de seção reta A através da qual a água escoa.

Vamos agora deduzir uma expressão que relaciona v e A no caso do escoamento laminar de um fluido ideal em um tubo de seção reta variável, como o da Fig. 14-15. O escoamento é para a direita e o segmento de tubo mostrado (parte de um tubo mais longo) tem comprimento L. A velocidade do fluido é v_1 na extremidade esquerda e v_2 na extremidade direita. A área da seção reta do tubo é A_1 na extremidade esquerda e A_2 na extremidade direita. Suponha que, em um intervalo de tempo Δt, um volume ΔV do fluido (o volume violeta na Fig. 14-15) entra no segmento de tubo pela extremidade esquerda. Como o fluido é incompressível, um volume igual ΔV do fluido (o volume verde na Fig. 14-15) deve sair pela extremidade direita.



Figura 14-13 O escoamento laminar de um fluido ao redor de um cilindro, revelado por um corante injetado no fluido antes que este passe pelo cilindro. *(Cortesia de D. H. Peregrine, University of Bristol)*

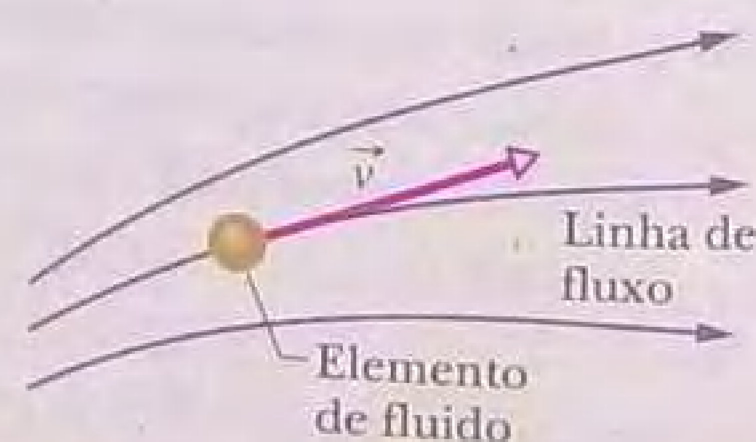


Figura 14-14 Ao se mover, um elemento do fluido traça uma linha de fluxo. O vetor velocidade do elemento é tangente à linha de fluxo em todos os pontos.

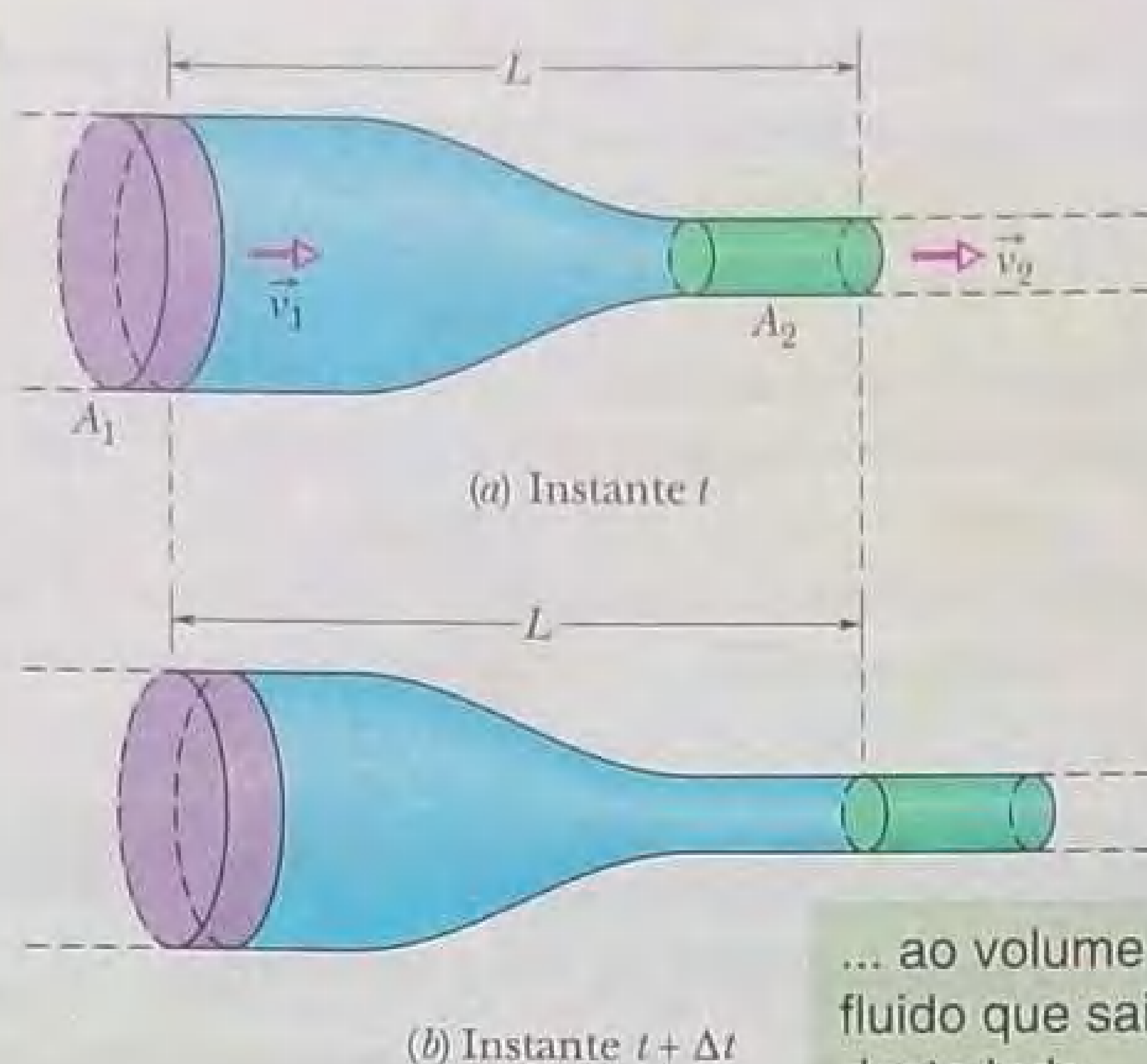


Figura 14-15 Um fluido escoa da esquerda para a direita com vazão constante através de um segmento de tubo de comprimento L. A velocidade do fluido é v_1 no lado esquerdo e v_2 no lado direito. A área de seção reta é A_1 no lado esquerdo e A_2 no lado direito. Do instante t em (a) até o instante $t + \Delta t$ em (b), a quantidade de fluido mostrada em cor violeta entra do lado esquerdo e uma quantidade igual, mostrada em cor verde, sai do lado direito.

Podemos usar este volume ΔV comum às duas extremidades para relacionar as velocidades e áreas. Para isso, consideramos primeiramente a Fig. 14-16, que mostra uma vista lateral de um tubo de seção reta *uniforme* de área A. Na Fig. 14-16a, um elemento e do fluido está prestes a passar pela reta tracejada perpendicular ao eixo do tubo. Se a velocidade do elemento é v, durante um intervalo de tempo Δt o elemento percorre uma distância $\Delta x = v\Delta t$ ao longo do tubo. O volume ΔV do fluido que passa pela reta tracejada durante o intervalo de tempo Δt é

$$\Delta V = A\,\Delta x = Av\,\Delta t. \qquad (14\text{-}22)$$

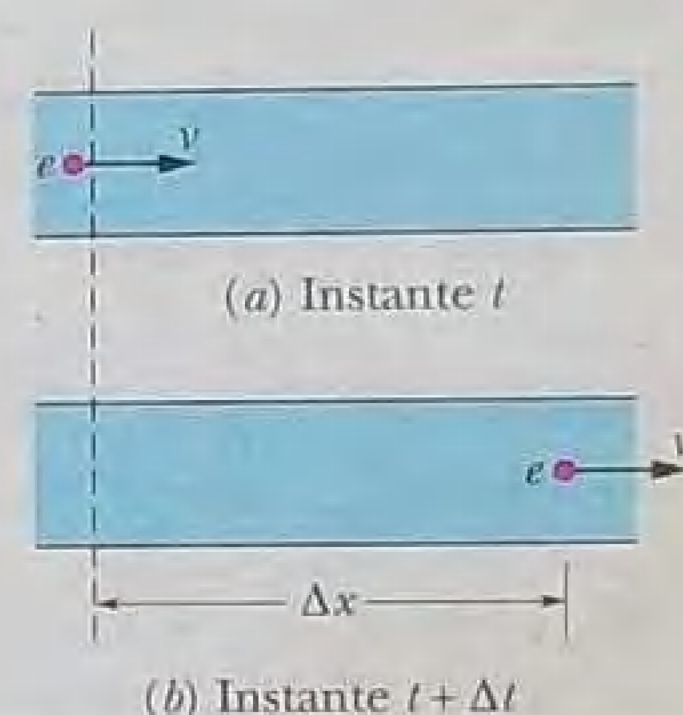


Figura 14-16 Um fluido escoa com velocidade v constante em um tubo cilíndrico. (a) No instante t, o elemento do fluido e está prestes a passar pela reta tracejada. (b) No instante $t + \Delta t$, o elemento e está a uma distância $\Delta x = v\,\Delta t$ da reta tracejada.

Aplicando a Eq. 14-22 às duas extremidades do segmento de tubo da Fig. 14-15, temos:

$$\Delta V = A_1 v_1\,\Delta t = A_2 v_2\,\Delta t$$

ou

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \text{(equação de continuidade)}. \qquad (14\text{-}23)$$

Esta relação entre velocidade e área da seção reta é chamada de **equação de continuidade** para o escoamento de um fluido ideal. De acordo com a Eq. 14-23, a velocidade do escoamento aumenta quando a área da seção reta através da qual o fluido escoa é reduzida, como acontece quando fechamos parcialmente o bico de uma mangueira de jardim com o polegar.

A Eq. 14-23 se aplica não só a um tubo real, mas também a qualquer *tubo de fluxo*, um tubo imaginário limitado por linhas de fluxo. Um tubo de fluxo se comporta como um tubo real porque nenhum elemento do fluido pode cruzar uma linha de fluxo; assim, todo o fluido contido em um tubo de fluxo permanece indefinidamente no seu interior. A Fig. 14-17 mostra um tubo de fluxo no qual a área de seção reta aumenta de A_1 para A_2 no sentido do escoamento. De acordo com a Eq. 14-23, com o aumento da área, a velocidade diminui, como mostra o espaçamento maior das linhas de fluxo no lado direito da Fig. 14-17. De modo semelhante, o menor espaçamento das linhas de fluxo na Fig. 14-13 revela que a velocidade de escoamento é maior logo acima e logo abaixo do cilindro.

A Eq. 14-23 pode ser escrita na forma

$$R_V = Av = \text{constante} \quad \text{(vazão, equação de continuidade)}, \qquad (14\text{-}24)$$

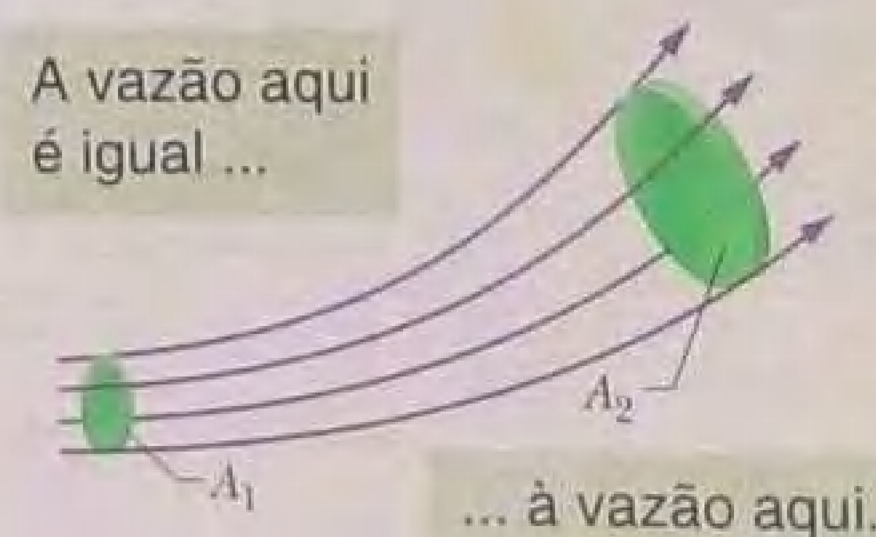


Figura 14-17 Um tubo de fluxo é definido pelas linhas de fluxo que o envolvem. A vazão é a mesma em todas as seções retas de um tubo de fluxo.

onde R_V é a **vazão** do fluido (volume que passa por uma seção reta por unidade de tempo). A unidade de vazão no SI é o metro cúbico por segundo (m³/s). Se a massa específica ρ do fluido é uniforme, podemos multiplicar a Eq. 14-24 pela massa específica para obter a **vazão mássica** R_m (massa por unidade de tempo):

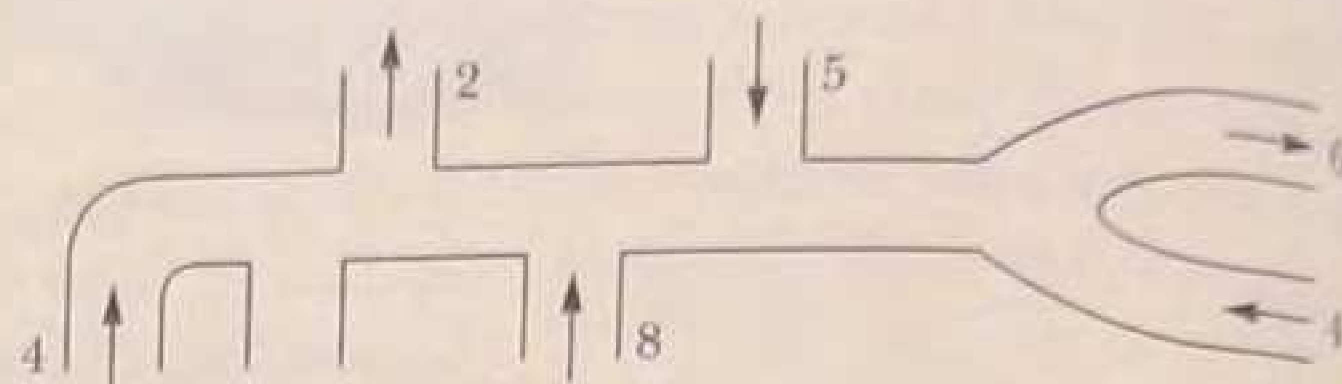
$$R_m = \rho R_V = \rho Av = \text{constante} \quad \text{(vazão mássica)}. \qquad (14\text{-}25)$$

A unidade de vazão mássica no SI é o quilograma por segundo (kg/s). De acordo

com a Eq. 14-25, a massa que entra no segmento de tubo da Fig. 14-15 por segundo é igual à massa que sai do segmento por segundo.

TESTE 3

A figura mostra um encanamento e indica a vazão (em cm^3/s) e o sentido do escoamento em todos os canos, exceto um. Quais são a vazão e o sentido do escoamento nesse cano?



Exemplo

Largura do jato de água de uma torneira

A Fig. 14-18 mostra que o jato de água que sai de uma torneira fica progressivamente mais fino durante a queda. Essa variação da seção reta horizontal é característica de todos os jatos de água laminares (não turbulentos) em queda livre porque a força gravitacional aumenta a velocidade da água. As áreas das seções retas indicadas são $A_0 = 1{,}2\ \text{cm}^2$ e $A = 0{,}35\ \text{cm}^2$. Os dois níveis estão separados por uma distância vertical $h = 45$ mm. Qual é a vazão da torneira?

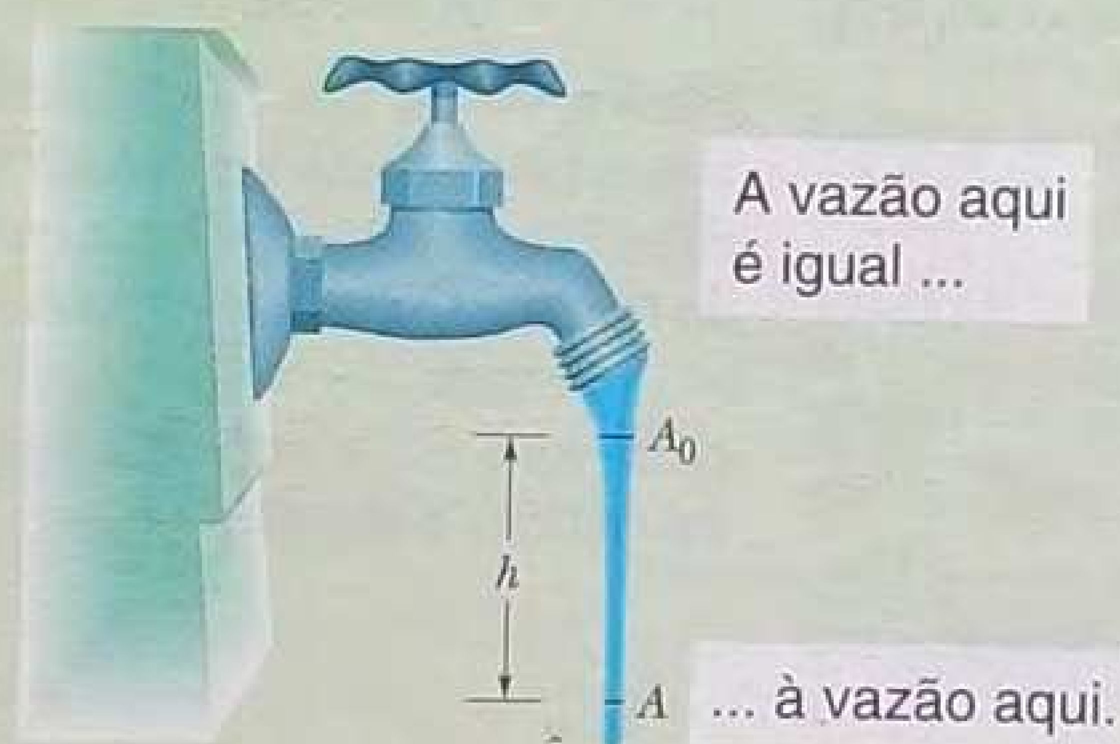


Figura 14-18 Quando a água cai de uma torneira, a velocidade da água aumenta. Como a vazão é a mesma em todas as seções retas horizontais, o jato de água fica progressivamente mais estreito.

IDEIA-CHAVE

A vazão na seção reta maior é igual à vazão na seção reta menor.

Cálculos De acordo com a Eq. 14-24, temos:

$$A_0 v_0 = A v, \tag{14-26}$$

onde v_0 e v são as velocidades da água nos níveis correspondentes a A_0 e A. De acordo com a Eq. 2-16, também podemos escrever, já que a água cai livremente com aceleração g,

$$v^2 = v_0^2 + 2gh. \tag{14-27}$$

Combinando as Eqs. 14-26 e 14-27 para eliminar v e explicitando v_0, obtemos

$$v_0 = \sqrt{\frac{2ghA^2}{A_0^2 - A^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(0{,}045\ \text{m})(0{,}35\ \text{cm}^2)^2}{(1{,}2\ \text{cm}^2)^2 - (0{,}35\ \text{cm}^2)^2}}$$

$$= 0{,}286\ \text{m/s} = 28{,}6\ \text{cm/s}.$$

De acordo com a Eq. 14-24, a vazão R_V é, portanto,

$$R_V = A_0 v_0 = (1{,}2\ \text{cm}^2)(28{,}6\ \text{cm/s})$$
$$= 34\ \text{cm}^3/\text{s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

14-10 A Equação de Bernoulli

A Fig. 14-19 mostra um tubo através do qual um fluido ideal escoa com vazão constante. Suponha que, em um intervalo de tempo Δt, um volume ΔV do fluido, de cor violeta na Fig. 14-19, entra pela extremidade esquerda (entrada) do tubo e um volume igual, de cor verde na Fig. 14-19, sai pela extremidade direita (saída) do tubo. Como o fluido é incompressível, com uma massa específica constante ρ, o volume que sai é igual ao volume que entra.

Sejam y_1, v_1 e p_1 a altura, a velocidade e a pressão do fluido que entra do lado esquerdo e y_2, v_2 e p_2 os valores correspondentes do fluido que sai do lado direito. Aplicando ao fluido a lei de conservação da energia, vamos mostrar que esses valores estão relacionados através da equação

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2. \tag{14-28}$$

onde o termo $\frac{1}{2}\rho v^2$ é chamado de **energia cinética específica** (energia cinética por unidade de volume) do fluido. A Eq. 14-28 também pode ser escrita na forma

$$p + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante} \quad \text{(equação de Bernoulli).} \qquad (14\text{-}29)$$

As Eqs. 14-28 e 14-29 são formas equivalentes da **equação de Bernoulli**, que tem esse nome por causa de Daniel Bernoulli, que estudou o escoamento de fluidos no século XVIII.* Como a equação de continuidade (Eq. 14-24), a equação de Bernoulli não é um princípio novo, mas simplesmente uma reformulação de um princípio conhecido em uma forma mais adequada para a mecânica dos fluidos. Como teste, vamos aplicar a equação de Bernoulli a um fluido em repouso, fazendo $v_1 = v_2 = 0$ na Eq. 14-28. O resultado é

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2),$$

que é a Eq. 14-7.

Uma previsão importante da equação de Bernoulli surge quando supomos que y é constante ($y = 0$, digamos), ou seja, que a altura do fluido não varia. Nesse caso, a Eq. 14-28 se torna

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2, \qquad (14\text{-}30)$$

ou, em palavras,

> Se a velocidade de um fluido aumenta enquanto o fluido se move horizontalmente ao longo de uma linha de fluxo, a pressão do fluido diminui e vice-versa.

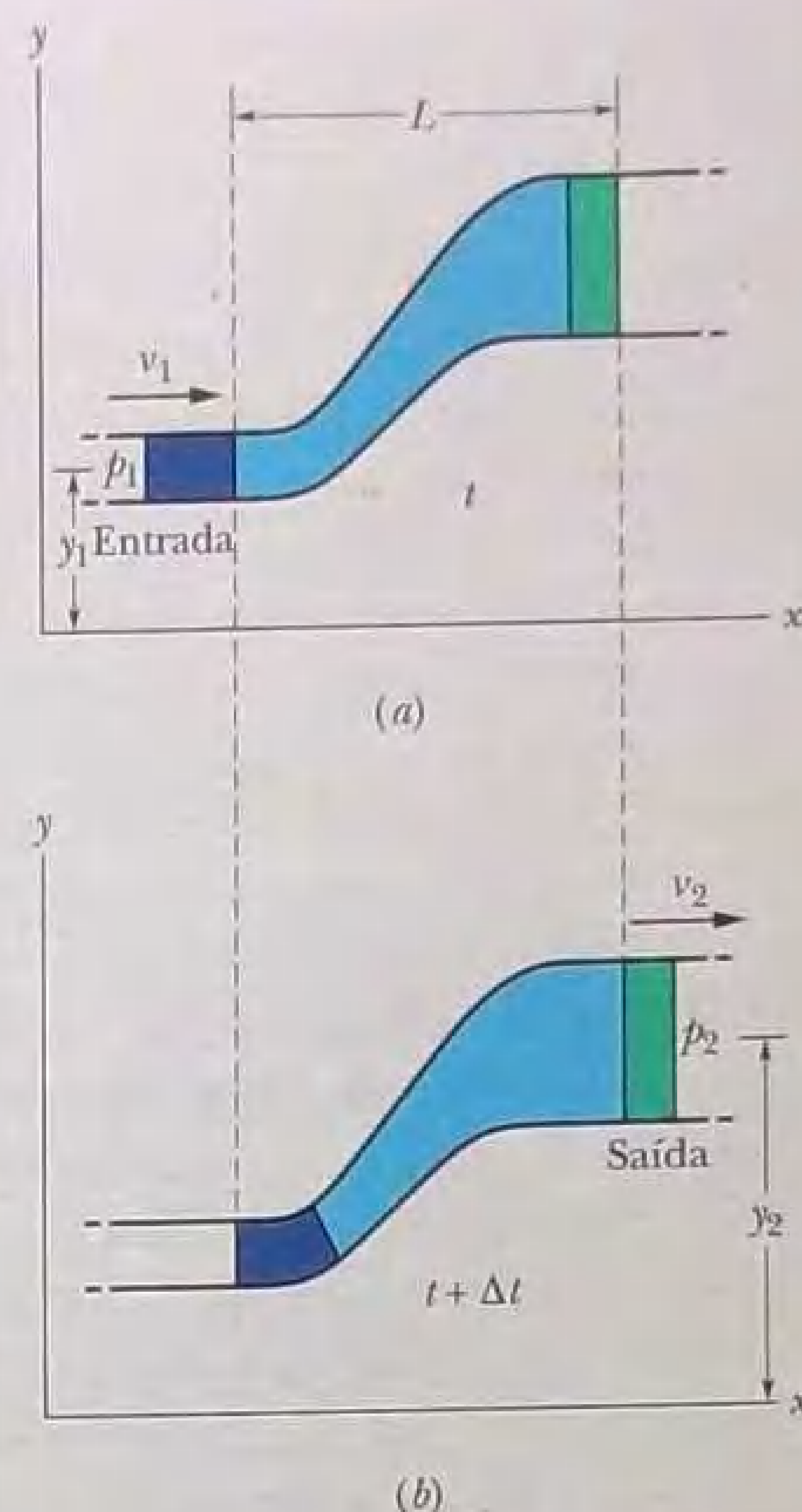


Figura 14-19 Um fluido escoa com vazão constante através de um comprimento L de um tubo, da extremidade de entrada, à esquerda, até a extremidade de saída, à direita. Do instante t em (a) ao instante $t + \Delta t$ em (b), uma quantidade de fluido, representada na cor violeta, entra pela extremidade esquerda e uma quantidade igual, representada na cor verde, sai pela extremidade direita.

Isso significa que nas regiões em que as linhas de fluxo estão mais concentradas (o que significa que a velocidade é maior), a pressão é menor e vice-versa.

A relação entre uma mudança de velocidade e uma mudança de pressão faz sentido quando consideramos um elemento do fluido. Quando o elemento se aproxima de uma região estreita, a pressão mais elevada atrás do elemento o acelera, de modo que ele adquire uma velocidade maior. Quando o elemento se aproxima de uma região mais larga, a pressão maior à frente o desacelera, de modo que ele adquire uma velocidade menor.

A equação de Bernoulli é estritamente válida apenas para fluidos ideais. Quando forças viscosas estão presentes, parte da energia é convertida em energia térmica. Na demonstração que se segue, vamos supor que o fluido é ideal.

Demonstração da Equação de Bernoulli

Vamos considerar como nosso sistema o volume inteiro do fluido (ideal) da Fig. 14-19. Vamos aplicar a lei de conservação da energia a esse sistema na passagem do estado inicial (Fig. 14-19a) para o estado final (Fig. 14-19b). No processo, as propriedades do fluido que está entre os dois planos verticais separados por uma distância L na Fig. 14-19 permanecem as mesmas; precisamos nos preocupar apenas com as mudanças que ocorrem nas extremidades de entrada e saída.

Para começar, aplicamos a lei de conservação da energia na forma do teorema do trabalho e energia cinética,

$$W = \Delta K, \qquad (14\text{-}31)$$

que nos diz que a variação da energia cinética do sistema é igual ao trabalho total realizado sobre o sistema. A variação da energia cinética é uma consequência da

* Se a vazão for irrotacional (como estamos supondo neste livro), a constante da Eq. 14-29 tem o mesmo valor em todos os pontos do tubo; os pontos não precisam pertencer à mesma linha de fluxo. Da mesma forma, na Eq. 14-28, os pontos 1 e 2 podem estar em qualquer lugar do tubo.

variação da velocidade do fluido entre as extremidades do tubo e é dada por

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}\Delta m\, v_2^2 - \tfrac{1}{2}\Delta m\, v_1^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\rho\,\Delta V(v_2^2 - v_1^2), \qquad (14\text{-}32)$$

onde Δm ($= \rho\,\Delta V$) é a massa do fluido que entra em uma extremidade e sai pela outra durante um pequeno intervalo de tempo Δt.

O trabalho realizado sobre o sistema tem duas origens. O trabalho W_g realizado pela força gravitacional ($\Delta m\vec{g}$) sobre o fluido de massa Δm durante a subida da massa do nível da entrada até o nível da saída é dado por

$$W_g = -\Delta m\, g(y_2 - y_1)$$
$$= -\rho g\,\Delta V(y_2 - y_1). \qquad (14\text{-}33)$$

Esse trabalho é negativo porque o deslocamento para cima e a força gravitacional para baixo têm sentidos opostos.

Algum trabalho também precisa ser realizado *sobre* o sistema (na extremidade de entrada) para empurrar o fluido para dentro do tubo e *pelo* sistema (na extremidade de saída) para empurrar o fluido que está mais adiante no tubo. O trabalho realizado por uma força de módulo F agindo sobre o fluido contido em um tubo de área A para fazer com que o fluido percorra uma distância Δx é

$$F\,\Delta x = (pA)(\Delta x) = p(A\,\Delta x) = p\,\Delta V.$$

O trabalho realizado sobre o sistema é, portanto, $p_1\,\Delta V$, e o trabalho realizado pelo sistema é $-p_2\,\Delta V$. A soma dos dois trabalhos, W_p, é

$$W_p = -p_2\,\Delta V + p_1\,\Delta V$$
$$= -(p_2 - p_1)\,\Delta V. \qquad (14\text{-}34)$$

Assim, a Eq. 14-31 se torna

$$W = W_g + W_p = \Delta K.$$

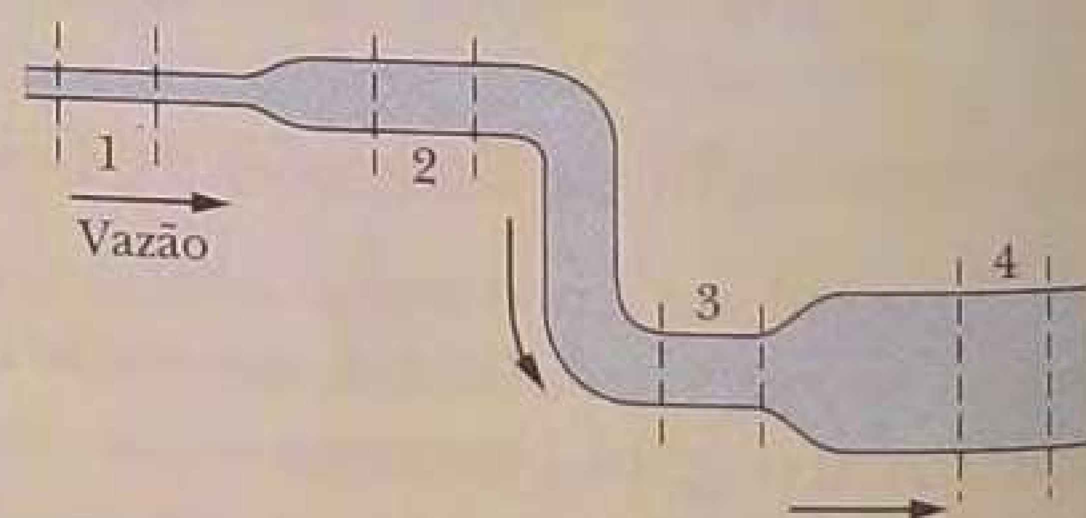
Combinando as Eqs. 14-32, 14-33 e 14-34, obtemos

$$-\rho g\,\Delta V(y_2 - y_1) - \Delta V(p_2 - p_1) = \tfrac{1}{2}\rho\,\Delta V(v_2^2 - v_1^2).$$

Cancelando ΔV e reagrupando os termos, obtemos a Eq. 14-28, que queríamos demonstrar.

TESTE 4

A água escoa suavemente pela tubulação da figura, descendo no processo. Ordene as quatro seções numeradas da tubulação de acordo com (a) a vazão R_V, (b) a velocidade v e (c) a pressão p do fluido, em ordem decrescente.



Exemplo

Aplicação do princípio de Bernoulli a um cano de calibre variável

Um cano horizontal de calibre variável (como o da Fig. 14-15), cuja seção reta muda de $A_1 = 1{,}20 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$ para $A_2 = A_1/2$, conduz um fluxo laminar de etanol, de massa específica $\rho = 791\ \text{kg/m}^3$. A diferença de pressão entre a parte larga e a parte estreita do cano é 4120 Pa. Qual é a vazão R_V de etanol?

IDEIAS-CHAVE

(1) Como todo o fluido que passa pela parte mais larga do cano também passa pela parte mais estreita, a vazão R_V deve ser a mesma nas duas partes. Assim, de acordo com a Eq. 14-24,

$$R_V = v_1 A_1 = v_2 A_2. \qquad (14\text{-}35)$$

Entretanto, como não conhecemos as duas velocidades, não podemos calcular R_V a partir dessa equação. (2) Como o escoamento é laminar, podemos aplicar a equação de Bernoulli. De acordo com a Eq. 14-28, temos:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y, \qquad (14\text{-}36)$$

onde os índices 1 e 2 se referem às partes larga e estreita do cano, respectivamente, e y é a altura comum às duas partes. A Eq. 14-36 não parece muito útil para a solução do problema, pois não contém a vazão procurada R_V e contém as velocidades desconhecidas v_1 e v_2.

Cálculos Existe uma forma engenhosa de fazer a Eq. 14-36 trabalhar para nós. Primeiro, podemos usar a Eq. 14-35 e o fato de que $A_2 = A_1/2$ para escrever

$$v_1 = \frac{R_V}{A_1} \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{R_V}{A_2} = \frac{2R_V}{A_1}. \qquad (14\text{-}37)$$

Em seguida, podemos substituir essas expressões na Eq. 14-36 para eliminar as velocidades desconhecidas e introduzir a vazão procurada. Fazendo isso e explicitando R_V, obtemos

$$R_V = A_1\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{3\rho}}. \qquad (14\text{-}38)$$

Ainda temos uma decisão a tomar. Sabemos que a diferença de pressão entre as duas partes do cano é 4120 Pa, mas isso significa que $p_1 - p_2 = 4120$ Pa ou -4120 Pa? Poderíamos supor que a primeira hipótese é a verdadeira, pois de outra forma a raiz quadrada na Eq. 14-38 não seria um número real. Em vez disso, vamos raciocinar um pouco. De acordo com a Eq. 14-35, para que os produtos v_1A_1 e v_2A_2 sejam iguais, a velocidade v_2 na parte estreita deve ser maior que a velocidade v_1 na parte larga. Sabemos também que se a velocidade de um fluido aumenta enquanto ele escoa em um cano horizontal (como neste caso), a pressão do fluido diminui. Assim, p_1 é maior que p_2, e $p_1 - p_2 = 4120$ Pa. Substituindo este resultado e os valores conhecidos na Eq. 14-38, obtemos

$$R_V = 1{,}20 \times 10^{-3}\,\text{m}^2\sqrt{\frac{(2)(4120\ \text{Pa})}{(3)(791\ \text{kg/m}^3)}}$$
$$= 2{,}24 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo

Aplicação do princípio de Bernoulli a uma caixa d'água

No velho Oeste, um bandido atira em uma caixa d'água sem tampa (Fig. 14-20), abrindo um furo a uma distância h da superfície da água. Qual é a velocidade v da água ao sair da caixa d'água?

IDEIAS-CHAVE

(1) A situação descrita é equivalente à da água descendo com velocidade v_0 por um cano largo de seção reta A (o tanque) e depois se movendo (horizontalmente) com velocidade v em um cano estreito de seção reta a (o furo). (2) Como toda a água que passa pelo cano largo passa também pelo cano estreito, a vazão R_V é a mesma nos dois "canos". (3) Podemos também relacionar v a v_0 (e a h) através da equação de Bernoulli (Eq. 14-28).

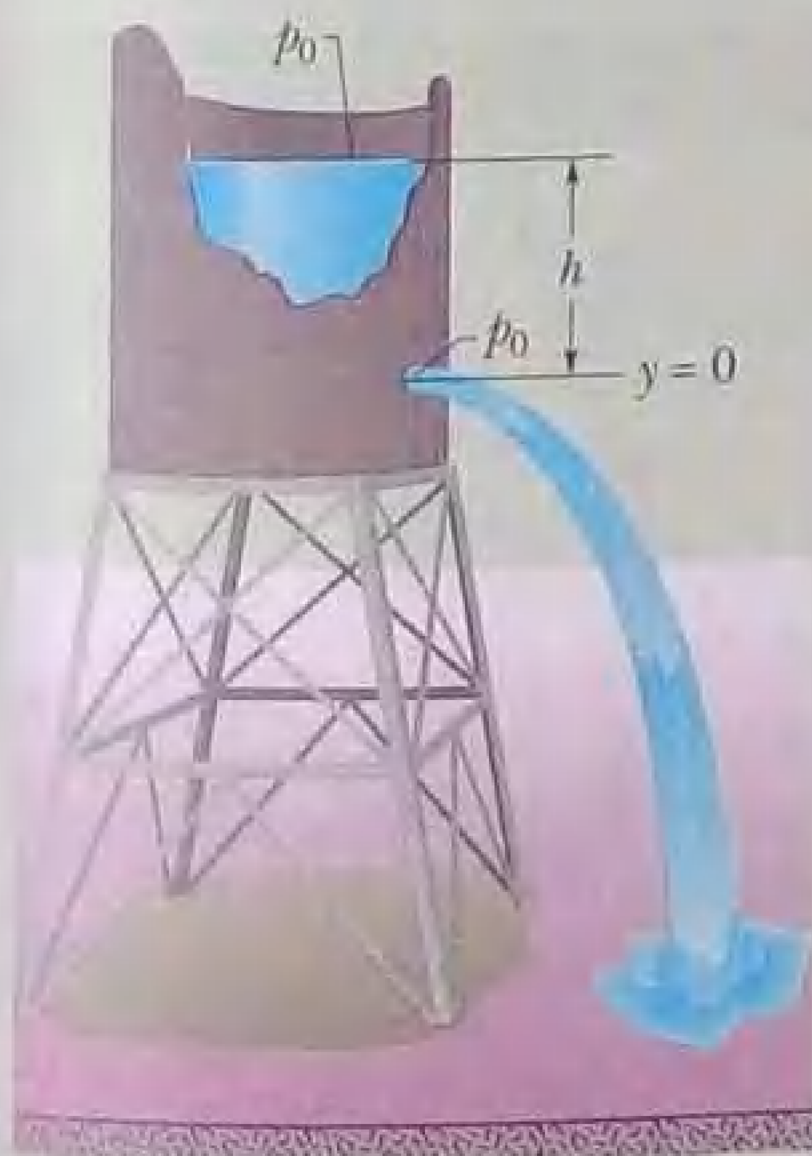


Figura 14-20 A água sai de um tanque por um furo situado a uma distância h da superfície da água. A pressão na superfície da água e no local do furo é a pressão atmosférica p_0.

Cálculos De acordo com a Eq. 14-24,

$$R_V = av = Av_0 \quad \text{e, portanto,} \quad v_0 = \frac{a}{A}v.$$

Como $a \ll A$, sabemos que $v_0 \ll v$. Para aplicar a equação de Bernoulli, tomamos o nível do furo como nível de referência para a medida da altura (e da energia potencial gravitacional). Como a pressão no alto da caixa d'água e no furo da bala é a pressão atmosférica p_0 (pois os dois locais estão expostos à atmosfera), a Eq. 14-28 se torna

$$p_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g h = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g(0). \qquad (14\text{-}39)$$

(O alto do tanque é representado pelo lado esquerdo da equação e o furo pelo lado direito. O zero do lado direito indica que o furo está no nível de referência.) Antes de explicitar v na Eq. 14-39, podemos usar nosso resultado de que $v_0 \ll v$ para simplificá-la: supomos que v_0^2, e portanto o termo $\frac{1}{2}\rho v_0^2$ na Eq. 14-39, é desprezível em comparação com os outros termos e o abandonamos. Explicitando v na equação restante, obtemos

$$v = \sqrt{2gh}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Esta é a mesma velocidade que um objeto adquire ao cair de uma altura h a partir do repouso.

REVISÃO E RESUMO

Massa Específica A **massa específica** ρ de um material é definida como a massa do material por unidade de volume:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (14\text{-}1)$$

Quando uma amostra do material é muito maior do que as dimensões atômicas, costumamos escrever a Eq. 14-1 na forma

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (14\text{-}2)$$

Pressão de um Fluido Um **fluido** é uma substância que pode escoar; os fluidos se amoldam aos contornos do recipiente porque não resistem a tensões de cisalhamento. Podem, porém, exercer uma força perpendicular à superfície. Essa força é descrita em termos da **pressão** p:

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A}, \quad (14\text{-}3)$$

onde ΔF é a força que age sobre um elemento da superfície de área ΔA. Se a força é uniforme em uma área plana, a Eq. 14-3 pode ser escrita na forma

$$p = \frac{F}{A}. \quad (14\text{-}4)$$

A força associada à pressão de um fluido tem o mesmo módulo em todas as direções. A **pressão manométrica** é a diferença entre a pressão real (ou pressão *absoluta*) e a pressão atmosférica.

Variação da Pressão com a Altura e com a Profundidade A pressão em um fluido em repouso varia com a posição vertical y. Tomando como positivo o sentido para cima,

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2). \quad (14\text{-}7)$$

A pressão em um fluido é a mesma em todos os pontos situados à mesma altura. Se h é a *profundidade* de uma amostra do fluido em relação a um nível de referência no qual a pressão é p_0, a Eq. 14-7 se torna

$$p = p_0 + \rho gh, \quad (14\text{-}8)$$

onde p é a pressão na amostra.

Princípio de Pascal Uma variação da pressão aplicada a um fluido contido em um recipiente é transmitida integralmente a todas as partes do fluido e às paredes do recipiente.

Princípio de Arquimedes Quando um corpo está total ou parcialmente submerso em um fluido, uma força de empuxo $\vec{F}_e$ exercida pelo fluido age sobre o corpo. A força é dirigida para cima e tem um módulo dado por

$$F_e = m_f g, \quad (14\text{-}16)$$

onde m_f é a massa do fluido deslocado pelo corpo.

Quando um corpo flutua em um fluido, o módulo F_E do empuxo (para cima) é igual ao módulo F_g da força gravitacional (para baixo) que age sobre o corpo. O **peso aparente** de um corpo sobre o qual atua um empuxo está relacionado ao peso real através da equação

$$\text{peso}_{\text{ap}} = \text{peso} - F_e. \quad (14\text{-}19)$$

Escoamento de Fluidos Ideais Um **fluido ideal** é incompressível, não tem viscosidade, e seu escoamento é laminar e irrotacional. Uma *linha de fluxo* é a trajetória seguida por uma partícula do fluido. Um *tubo de fluxo* é um feixe de linhas de fluxo. O escoamento no interior de um tubo de fluxo obedece à **equação de continuidade**:

$$R_V = Av = \text{constante}, \quad (14\text{-}24)$$

onde R_V é a **vazão**, A é a área da seção reta do tubo de fluxo em qualquer ponto e v é a velocidade do fluido nesse ponto. A **vazão mássica** R_m é dada por

$$R_m = \rho R_V = \rho Av = \text{constante}. \quad (14\text{-}25)$$

Equação de Bernoulli A aplicação da lei de conservação da energia ao escoamento de um fluido ideal leva à **equação de Bernoulli**:

$$p + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy = \text{constante} \quad (14\text{-}29)$$

ao longo de qualquer tubo de fluxo.

PERGUNTAS

1 Uma peça irregular de 3 kg de um material sólido é totalmente imersa em um fluido. O fluido que estaria no espaço ocupado pela peça tem uma massa de 2 kg. (a) Ao ser liberada, a peça sobe, desce ou permanece no mesmo lugar? (b) Se a peça é totalmente imersa em um fluido menos denso e depois liberada, o que acontece?

2 A Fig. 14-21 mostra quatro situações nas quais um líquido vermelho e um líquido cinzento foram colocados em um tubo em forma de U. Em uma dessas situações, os líquidos não podem estar em equilíbrio estático. (a) Que situação é essa? (b) Para as outras três situações, suponha que o equilíbrio é estático. Para cada uma, a massa específica do líquido vermelho é maior, menor ou igual à massa específica do líquido cinzento?

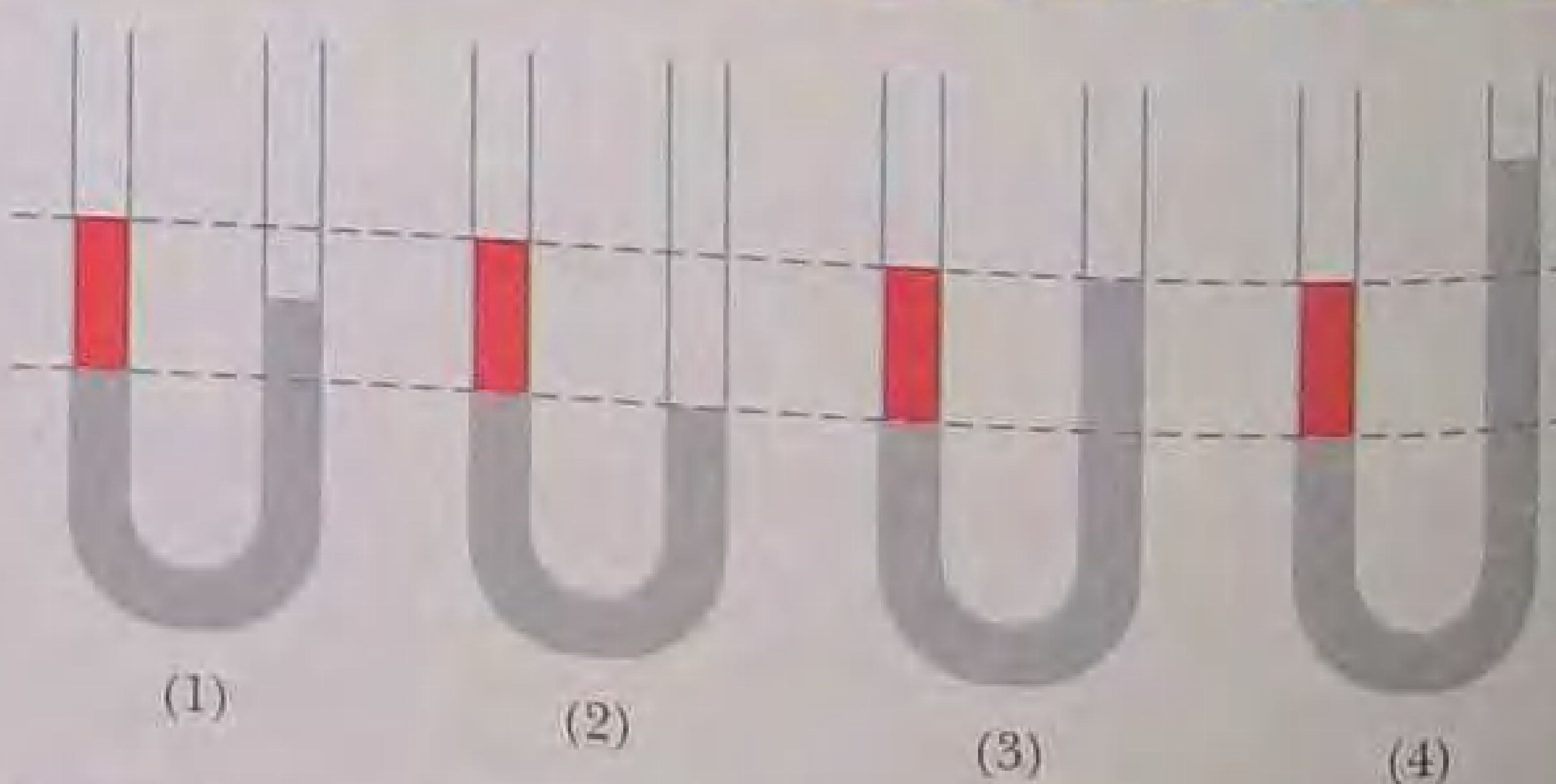


Figura 14-21 Pergunta 2.

3 Um barco com uma âncora a bordo flutua em uma piscina um pouco mais larga do que o barco. O nível da água sobe, desce ou permanece o mesmo (a) se a âncora é jogada na água e (b) se a âncora é jogada do lado de fora da piscina? (c) O nível da água na piscina sobe, desce ou permanece o mesmo se, em vez disso, uma rolha de cortiça é lançada do barco para a água, onde flutua?

4 A Fig. 14-22 mostra um tanque cheio d'água. Cinco pisos e tetos horizontais estão indicados; todos têm a mesma área e estão situados a uma distância L, $2L$ ou $3L$ abaixo do alto do tanque. Ordene-os de acordo com a força que a água exerce sobre eles, começando pela maior.

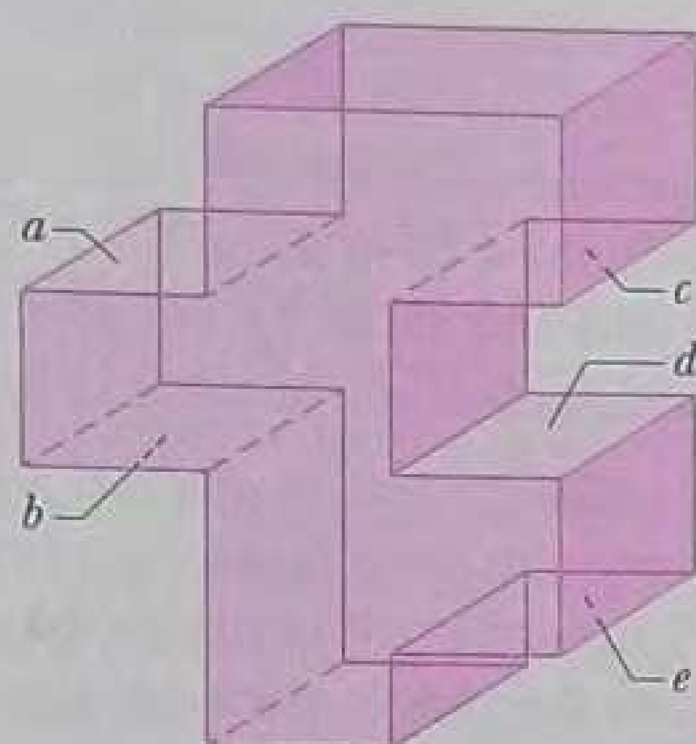


Figura 14-22 Pergunta 4.

5 *O efeito bule.* A água derramada lentamente de um bule pode mudar de sentido e escorrer por uma distância considerável por baixo do bico do bule antes de se desprender e cair. (A agua é mantida sob o bico pela pressão atmosférica.) Na Fig. 14-23, na camada de água do lado de dentro do bico, o ponto a está no alto e o ponto b está no fundo da camada; na camada de água do lado de fora do bico, o ponto c está no alto e o ponto d está no fundo da camada. Ordene os quatro pontos de acordo com a pressão manométrica a que a água está sujeita, da mais positiva para a mais negativa.

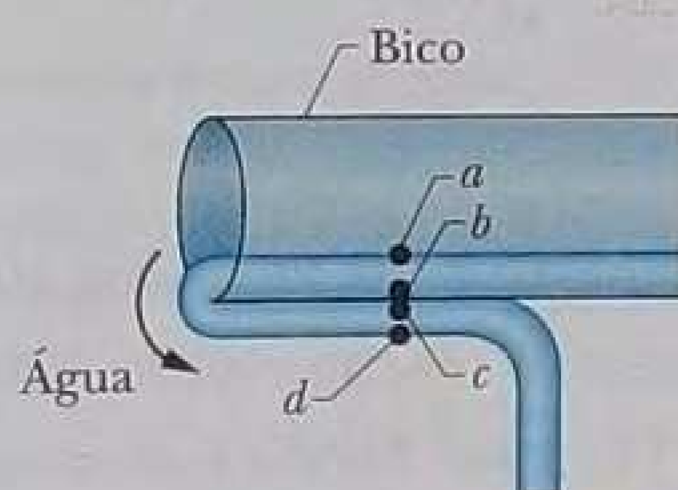


Figura 14-23 Pergunta 5.

6 A Fig. 14-24 mostra três recipientes iguais, cheios até a borda; patos de brinquedo flutuam em dois deles. Ordene os três conjuntos de acordo com o peso total, em ordem decrescente.

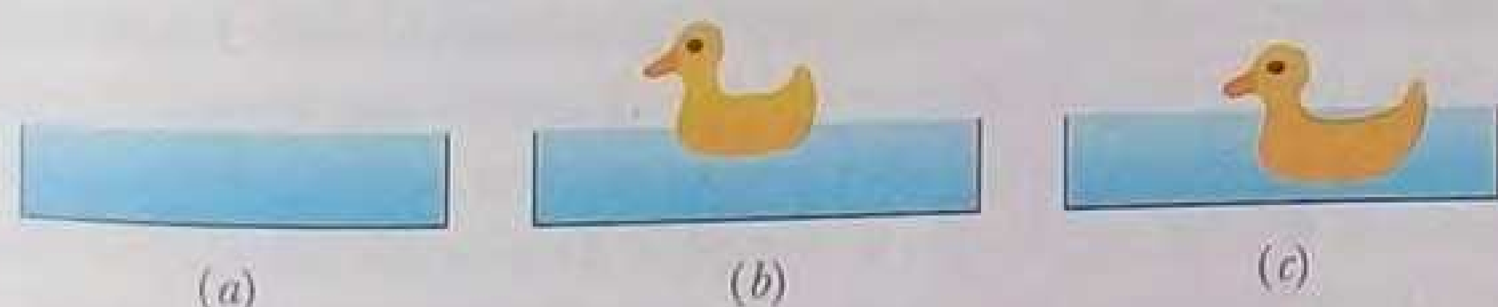


Figura 14-24 Pergunta 6.

7 A Fig. 14-25 mostra quatro tubos nos quais a água escoa suavemente para a direita. Os raios das diferentes partes dos tubos estão indicados. Em qual dos tubos o trabalho total realizado sobre um volume unitário de água que escoa da extremidade esquerda para a extremidade direita é (a) nulo, (b) positivo e (c) negativo?

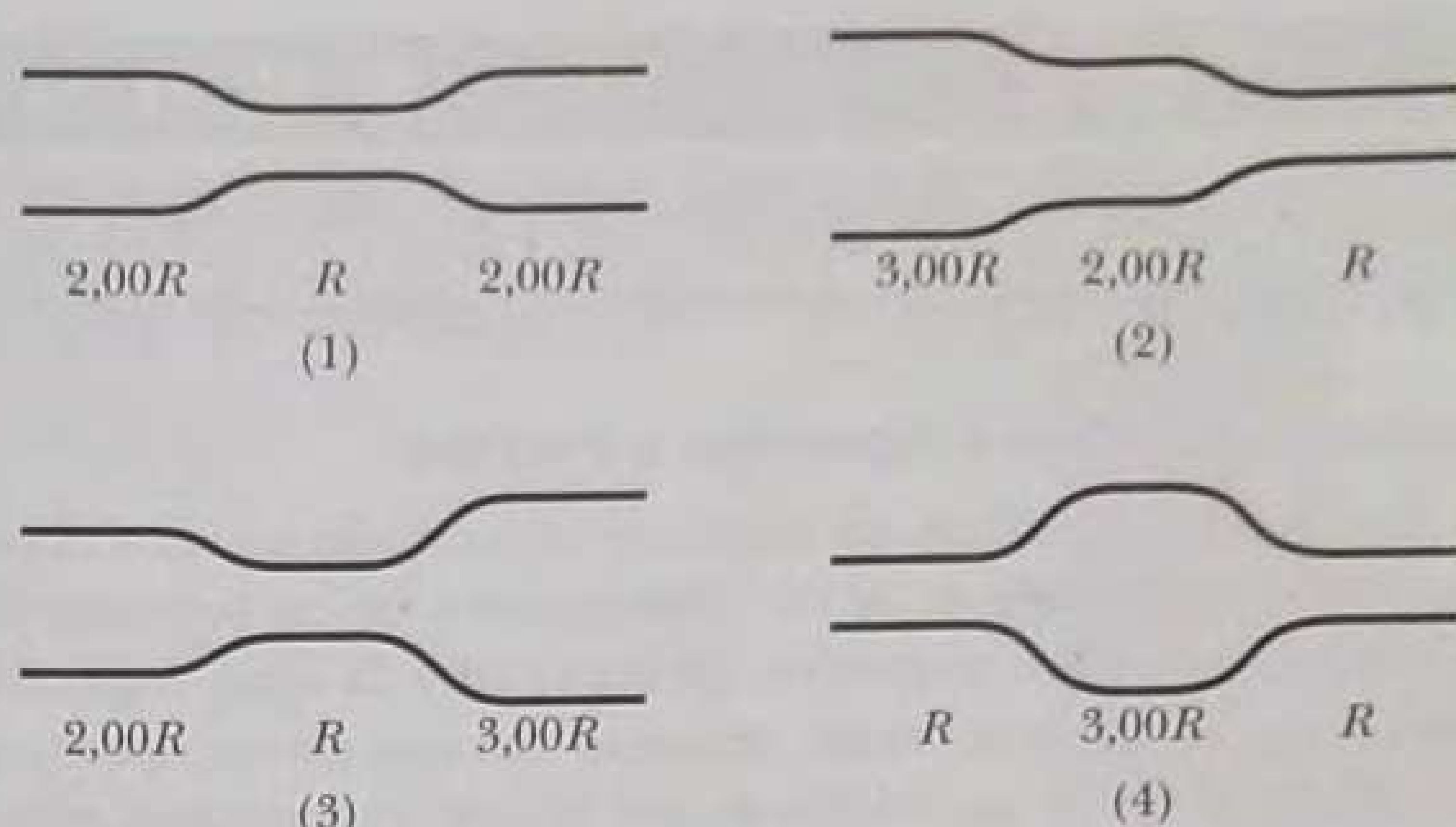


Figura 14-25 Pergunta 7.

8 Um bloco retangular é empurrado para baixo em três líquidos, um de cada vez. O peso aparente P_{ap} do bloco em função da profundidade h é mostrado na Fig. 14-26 para os três líquidos. Ordene os líquidos de acordo com o peso por unidade de volume, do maior para o menor.

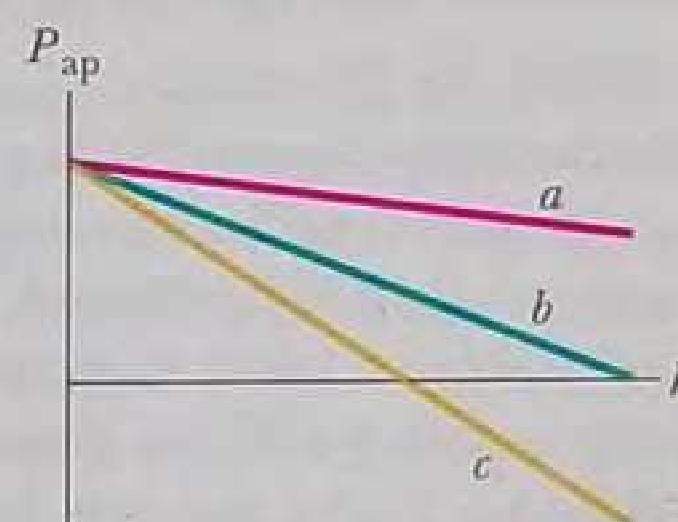


Figura 14-26 Pergunta 8.

9 A água flui suavemente em um cano horizontal. A Fig. 14-27 mostra a energia cinética K de um elemento de água que se move ao longo de um eixo x paralelo ao eixo do cano. Ordene os trechos A, B e C de acordo com o raio do cano, do maior para o menor.



Figura 14-27 Pergunta 9.

10 A Fig. 14-28 mostra a pressão manométrica p_g em função da profundidade h para três líquidos. Uma esfera de plástico é totalmente imersa nos três líquidos, um de cada vez. Ordene os gráficos de acordo com o empuxo exercido sobre a esfera, do maior para o menor.

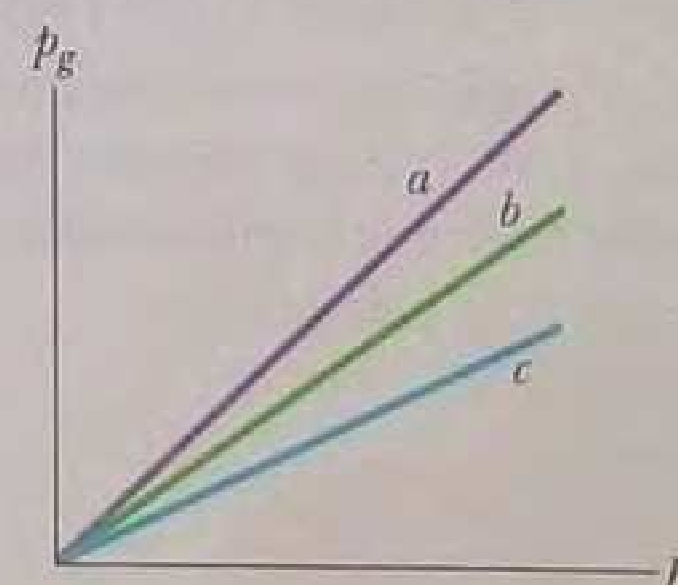


Figura 14-28 Pergunta 10.

PROBLEMAS

• – •• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Seção 14-3 Massa Específica e Pressão

•1 Um peixe se mantém na mesma profundidade na água doce ajustando a quantidade de ar em ossos porosos ou em bolsas de ar para tornar sua massa específica média igual à da água. Suponha que, com as bolsas de ar vazias, um peixe tem uma massa específica de 1,08 g/cm³. Para que fração de seu volume expandido o peixe deve inflar as bolsas de ar para tornar sua massa específica igual à da água?

•2 Um recipiente hermeticamente fechado e parcialmente evacuado tem uma tampa com uma área de 77 m² e massa desprezível. Se a força necessária para remover a tampa é 480 N e a pressão atmosférica é $1{,}0 \times 10^5$ Pa, qual é a pressão do ar no interior do recipiente?

•3 Determine o aumento de pressão do fluido em uma seringa quando uma enfermeira aplica uma força de 42 N ao êmbolo circular da seringa, que tem um raio de 1,1 cm.

•4 Três líquidos imiscíveis são despejados em um recipiente cilíndrico. Os volumes e massas específicas dos líquidos são: 0,50 L, 2,6 g/cm³; 0,25 L, 1,0 g/cm³; 0,40 L, 0,80 g/cm³. Qual é a força total exercida pelos líquidos sobre o fundo do recipiente? Um litro = 1 L = 1000 cm³. (Ignore a contribuição da atmosfera.)

•5 Uma janela de escritório tem 3,4 m de largura por 2,1 m de altura. Como resultado da passagem de uma tempestade, a pressão do ar do lado de fora do edifício cai para 0,96 atm, mas no interior do edifício permanece em 1,0 atm. Qual é o módulo da força que empurra a janela para fora por causa dessa diferença de pressão?

•6 Você calibra os pneus do carro com 28 psi. Mais tarde, mede a pressão arterial, obtendo uma leitura de 12/8 em cmHg. No SI, as pressões são expressas em pascal ou seus múltiplos, como o quilopascal (kPa). Qual é, em kPa, (a) a pressão dos pneus de seu carro e (b) sua pressão arterial?

••7 Em 1654, Otto von Guericke, o inventor da bomba de vácuo, fez uma demonstração para os nobres do Sacro Império Romano na qual duas juntas de oito cavalos não puderam separar dois hemisférios de cobre evacuados. (a) Supondo que os hemisférios tinham paredes finas (mas resistentes), de modo que R na Fig. 14-29 pode ser considerado tanto o raio interno como o raio externo, mostre que o módulo da força $\vec{F}$ necessária para separar os hemisférios é dado por $F = \pi R^2 \Delta p$, onde $\Delta p = p_{ext} - p_{int}$ é a diferença entre a pressão do lado de fora e a pressão do lado de dentro da esfera. (b) Supondo que R = 30 cm, p_{int} = 0,10 atm e p_{ext} = 1,00 atm, determine o módulo da força que as juntas de cavalos teriam que exercer para separar os hemisférios. (c) Explique por que uma única junta de cavalos poderia executar a mesma demonstração se um dos hemisférios estivesse preso em uma parede.

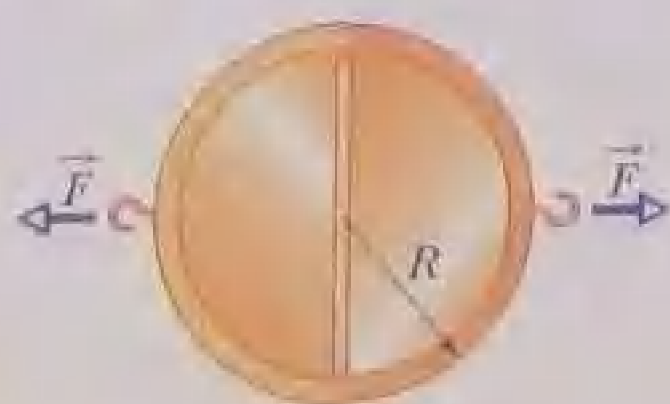


Figura 14-29 Problema 7.

Seção 14-4 Fluidos em Repouso

•8 *Embolia gasosa em viagens de avião.* Os mergulhadores são aconselhados a não viajar de avião nas primeiras 24 h após um mergulho porque o ar pressurizado usado durante o mergulho pode introduzir nitrogênio na corrente sanguínea. Uma redução súbita da pressão do ar (como a que acontece quando um avião decola) pode fazer com que o nitrogênio forme bolhas no sangue, que podem produzir embolias dolorosas ou mesmo fatais. Qual é a variação de pressão experimentada por um soldado da divisão de operações especiais que mergulha a 20 m de profundidade em um dia e salta de paraquedas de uma altitude de 7,6 km no dia seguinte? Suponha que a massa específica média do ar nessa faixa de altitude é 0,87 kg/m³.

•9 *Pressão arterial do argentinossauro.* (a) Se a cabeça desse saurópode gigantesco ficava a 21 m de altura e o coração a 9,0 m, que pressão manométrica (hidrostática) era necessária na altura do coração para que a pressão no cérebro fosse 80 torr (suficiente para abastecer o cérebro)? Suponha que a massa específica do sangue do argentinossauro era $1{,}06 \times 10^3$ kg/m³. (b) Qual era a pressão arterial (em torr) na altura dos pés do animal?

•10 O tubo de plástico da Fig. 14-30 tem uma seção reta de 5,00 cm². Introduz-se água no tubo até que o lado mais curto (de comprimento d = 0,800 m) fique cheio. Em seguida, o lado menor é fechado e mais água é despejada no lado maior. Se a tampa do lado menor é arrancada quando a força a que está submetida excede 9,80 N, que altura da coluna de água do lado maior deixa a tampa na iminência de ser arrancada?



Figura 14-30 Problemas 10 e 81.

•11 *Girafa bebendo água.* Em uma girafa, com a cabeça 2,0 m acima do coração e o coração 2,0 m acima do solo, a pressão manométrica (hidrostática) do sangue na altura do coração é 250 torr. Suponha que a girafa está de pé e a massa específica do sangue é $1{,}06 \times 10^3$ kg/m³. Determine a pressão arterial (manométrica) em torr (a) no cérebro (a pressão deve ser suficiente para abastecer o cérebro com sangue) e (b) nos pés (a pressão deve ser compensada por uma pele esticada, que se comporta como uma meia elástica). (c) Se a girafa baixasse a cabeça bruscamente para beber água, sem afastar as pernas, qual seria o aumento da pressão arterial no cérebro? (Esse aumento provavelmente causaria a morte da girafa.)

•12 A profundidade máxima $d_{máx}$ a que um mergulhador pode descer com um *snorkel* (tubo de respiração) é determinada pela massa específica da água e pelo fato de que os pulmões humanos não funcionam com uma diferença de pressão (entre o interior e o exterior da cavidade torácica) maior que 0,050 atm. Qual é a diferença entre os valores de $d_{máx}$ para água doce e para a água do mar Morto (a água natural mais salgada no mundo, com uma massa específica de $1{,}5 \times 10^3$ kg/m³)?

•13 Com uma profundidade de 10,9 km, a fossa das Marianas, no oceano Pacífico, é o lugar mais profundo dos oceanos. Em 1960,

Donald Walsh e Jacques Piccard chegaram à fossa das Marianas no batiscafo *Trieste*. Supondo que a água do mar tem uma massa específica uniforme de 1024 kg/m³, calcule a pressão hidrostática aproximada (em atmosferas) que o *Trieste* teve que suportar. (Mesmo um pequeno defeito na estrutura do *Trieste* teria sido desastroso.)

•14 Calcule a diferença hidrostática entre a pressão arterial no cérebro e no pé de uma pessoa com 1,83 m de altura. A massa específica do sangue é $1{,}06 \times 10^3$ kg/m³.

•15 Que pressão manométrica uma máquina deve produzir para sugar lama com uma massa específica de 1800 kg/m³ através de um tubo e fazê-la subir 1,5 m?

•16 *Homens e elefantes fazendo snorkel.* Quando uma pessoa faz *snorkel*, os pulmões estão conectados diretamente à atmosfera através do tubo de respiração e, portanto, se encontram à pressão atmosférica. Qual é a diferença Δp, em atmosferas, entre a pressão interna e a pressão da água sobre o corpo do mergulhador se o comprimento do tubo de respiração é (a) 20 cm (situação normal) e (b) 4,0 m (situação provavelmente fatal)? No segundo caso, a diferença de pressão faz os vasos sanguíneos das paredes dos pulmões se romperem, enchendo os pulmões de sangue. Como mostra a Fig. 14-31, um elefante pode usar a tromba como tubo de respiração e nadar com os pulmões 4,0 m abaixo da superfície da água porque a membrana que envolve seus pulmões contém tecido conectivo que envolve e protege os vasos sanguíneos, impedindo que se rompam.



Figura 14-31 Problema 16.

•17 Alguns membros da tripulação tentam escapar de um submarino avariado 100 m abaixo da superfície. Que força deve ser aplicada a uma escotilha de emergência, de 1,2 m por 0,60 m, para abri-la para fora nessa profundidade? Suponha que a massa específica da água do oceano é 1024 kg/m³ e que a pressão do ar no interior do submarino é 1,00 atm.

•18 Na Fig. 14-32, um tubo aberto, de comprimento $L = 1{,}8$ m e área da seção reta $A = 4{,}6$ cm², penetra na tampa de um barril cilíndrico de diâmetro $D = 1{,}2$ m e altura $H = 1{,}8$ m. O barril e o tubo estão cheios d'água (até o alto do tubo). Calcule a razão entre a força hidrostática que age sobre o fundo do barril e a força gravitacional que age sobre a água contida no barril. Por que a razão não é igual a 1,0? (Não é necessário levar em conta a pressão atmosférica.)

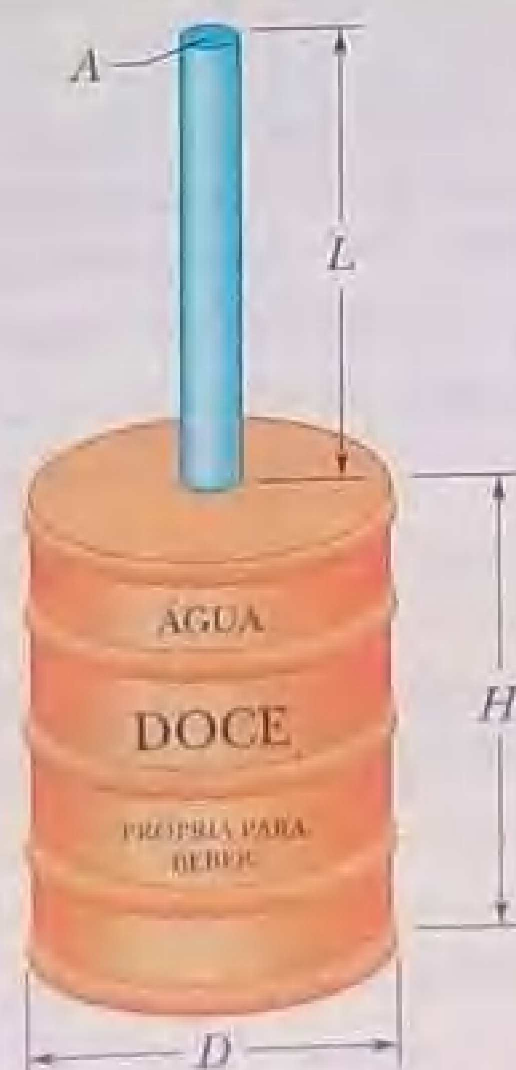


Figura 14-32 Problema 18.

••19 Um grande aquário de 5,00 m de altura está cheio de água doce até uma altura de 2,00 m. Uma das paredes do aquário é feita de plástico e tem 8,00 m de largura. De quanto aumenta a força exercida sobre a parede se a altura da água é aumentada para 4,00 m?

••20 O tanque em forma de L mostrado na Fig. 14-33 está cheio d'água e é aberto na parte de cima. Se $d = 5{,}0$ m, qual é a força exercida pela água (a) na face A e (b) na face B?

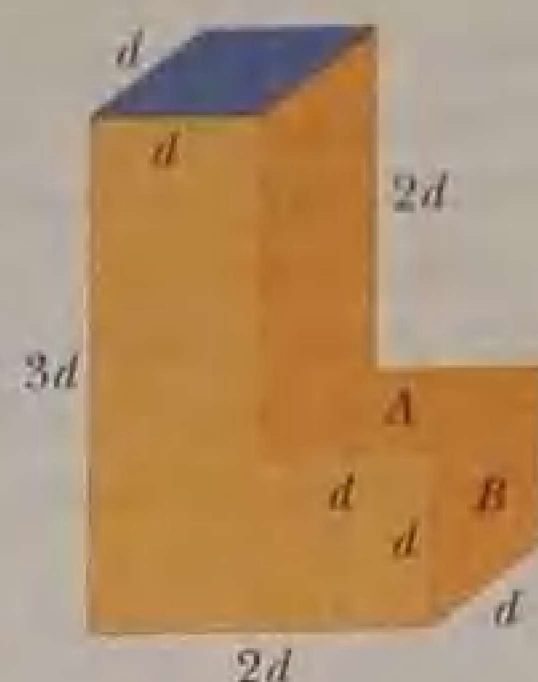


Figura 14-33 Problema 20.

••21 Dois recipientes cilíndricos iguais, com as bases no mesmo nível, contêm um líquido de massa específica $1{,}30 \times 10^3$ kg/m³. A área de cada base é 4,00 cm², mas em um dos recipientes a altura do líquido é 0,854 m e no outro é 1,560 m. Determine o trabalho realizado pela força gravitacional para igualar os níveis quando os recipientes são ligados por um tubo.

••22 *Perda de consciência dos pilotos de caça.* Quando um piloto faz uma curva muito fechada em um avião de caça moderno, a pressão do sangue na altura do cérebro diminui e o sangue deixa de abastecer o cérebro. Se o coração mantém a pressão manométrica (hidrostática) da aorta em 120 torr quando o piloto sofre uma aceleração centrípeta horizontal de $4g$, qual é a pressão sanguínea no cérebro (em torr), situado a 30 cm de distância do coração no sentido do centro da curva? A falta de sangue no cérebro pode fazer com que o piloto passe a enxergar em preto e branco e o campo visual se estreite, um fenômeno conhecido como "visão de túnel". Caso persista, o piloto pode sofrer a chamada g-LOC (*g-induced loss of consciousness*, perda de consciência induzida por g). A massa específica do sangue é $1{,}06 \times 10^3$ kg/m³.

••23 Na análise de certos fenômenos geológicos, é muitas vezes apropriado supor que a pressão em um dado *nível de compensação* horizontal, muito abaixo da superfície, é a mesma em uma vasta região e é igual à pressão produzida pelo peso das rochas que se encontram acima desse nível. Assim, a pressão no nível de compensação é dada pela mesma fórmula usada para calcular a pressão de um fluido. Esse modelo exige, entre outras coisas, que as montanhas tenham *raízes* de rochas continentais que penetram no manto mais denso (Fig. 14-34). Considere uma montanha de altura $H = 6{,}0$ km em um continente de espessura $T = 32$ km. As rochas continentais têm uma massa específica 2,9 g/cm³ e o manto que fica abaixo destas rochas tem uma massa específica de 3,3 g/cm³. Calcule a profundidade D da raiz. (*Sugestão:* iguale as pressões nos pontos a e b; a profundidade y do nível de compensação se cancela.)



Figura 14-34 Problema 23.

•••24 Na Fig. 14-35, a água atinge uma altura $D = 35,0$ m atrás da face vertical de uma represa com $W = 314$ m de largura. Determine (a) a força horizontal a que está submetida a represa por causa da pressão manométrica da água e (b) o torque produzido por essa força em relação a uma reta que passa por O e é paralela à face plana da represa. (c) Determine o braço de alavanca desse torque.

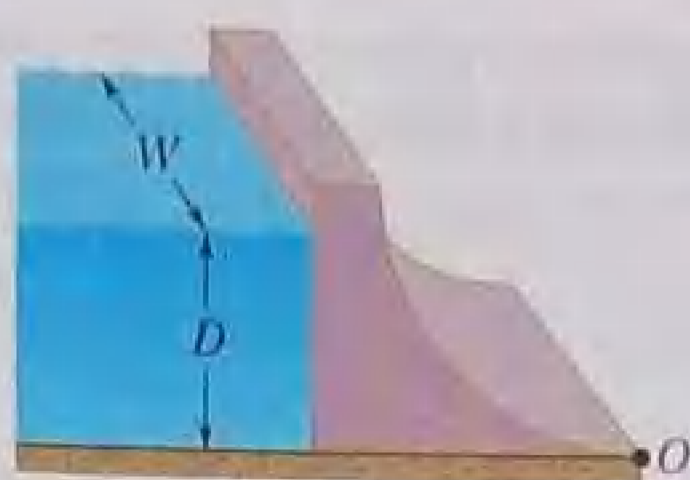


Figura 14-35 Problema 24.

Seção 14-5 Medindo a Pressão

•25 A coluna de um barômetro de mercúrio (como o da Fig. 14-5*a*) tem uma altura $h = 740,35$ mm. A temperatura é –5,0 °C, na qual a massa específica do mercúrio é $\rho = 1,3608 \times 10^4$ kg/m³. A aceleração de queda livre no local onde se encontra o barômetro é $g = 9,7835$ m/s². Qual é a pressão atmosférica medida pelo barômetro em pascal e em torr (que é uma unidade muito usada para as leituras dos barômetros)?

•26 Para sugar limonada, com uma massa específica de 1000 kg/m³, usando um canudo para fazer o líquido subir 4,0 cm, que pressão manométrica mínima (em atmosferas) deve ser produzida pelos pulmões?

••27 Qual seria a altura da atmosfera se a massa específica do ar (a) fosse uniforme e (b) diminuísse linearmente até zero com a altura? Suponha que ao nível do mar a pressão do ar é 1,0 atm e a massa específica do ar é 1,3 kg/m³.

Seção 14-6 O Princípio de Pascal

•28 Um êmbolo com uma seção reta a é usado em uma prensa hidráulica para exercer uma pequena força de módulo f sobre um líquido que está em contato, através de um tubo de ligação, com um êmbolo maior de seção reta A (Fig. 14-36). (a) Qual é o módulo F da força que deve ser aplicada ao êmbolo maior para que o sistema fique em equilíbrio? (b) Se os diâmetros dos êmbolos são 3,80 cm e 53,0 cm, qual é o módulo da força que deve ser aplicada ao êmbolo menor para equilibrar uma força de 20,0 kN aplicada ao êmbolo maior?

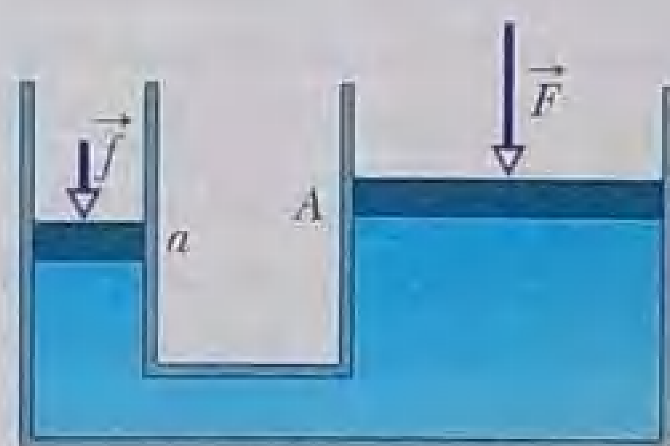


Figura 14-36 Problema 28.

••29 Na Fig. 14-37, uma mola de constante elástica $3,00 \times 10^4$ N/m liga uma viga rígida ao êmbolo de saída de um macaco hidráulico. Um recipiente vazio de massa desprezível está sobre o êmbolo de entrada. O êmbolo de entrada tem uma área A_e e o êmbolo de saída tem uma área $18,0A_e$. Inicialmente, a mola está relaxada. Quantos quilogramas de areia devem ser despejados (lentamente) no recipiente para que a mola sofra uma compressão de 5,00 cm?

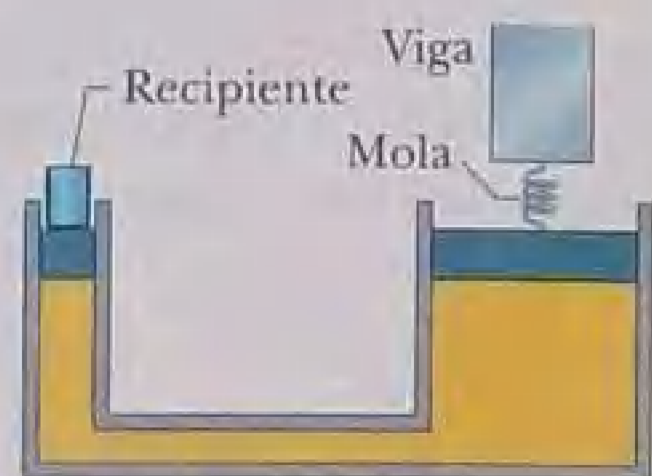


Figura 14-37 Problema 29.

Seção 14-7 O Princípio de Arquimedes

•30 Um objeto de 5,00 kg é liberado a partir do repouso quando está totalmente imerso em um líquido. O líquido deslocado pelo objeto tem uma massa de 3,00 kg. Que distância o objeto percorre em 0,200 s e em que sentido, supondo que se desloca livremente e que a força de arrasto exercida pelo líquido é desprezível?

•31 Um bloco de madeira flutua em água doce com dois terços do volume V submersos e, em óleo, com $0,90V$ submersos. Determine a massa específica (a) da madeira e (b) do óleo.

•32 Na Fig. 14-38, um cubo de aresta $L = 0,600$ m e 450 kg de massa é suspenso por uma corda em um tanque aberto que contém um líquido de massa específica 1030 kg/m³. Determine (a) o módulo da força total exercida sobre a face superior do cubo pelo líquido e pela atmosfera, supondo que a pressão atmosférica é 1,00 atm, (b) o módulo da força total exercida sobre a face inferior do cubo e (c) a tensão da corda. (d) Calcule o módulo da força de empuxo a que o cubo está submetido usando o princípio de Arquimedes. Que relação existe entre todas essas grandezas?

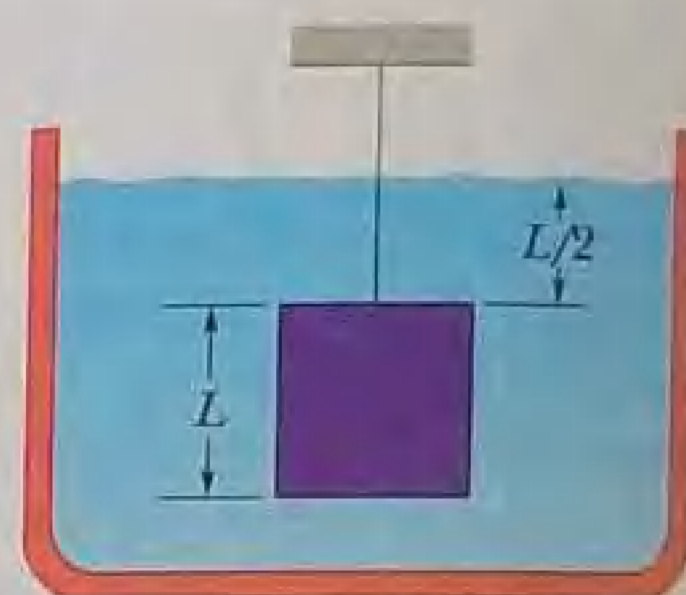


Figura 14-38 Problema 32.

•33 Uma âncora de ferro de massa específica 7870 kg/m³ parece ser 200 N mais leve na água que no ar. (a) Qual é o volume da âncora? (b) Quanto ela pesa no ar?

•34 Um barco que flutua em água doce desloca um volume de água que pesa 35,6 kN. (a) Qual é o peso da água que o barco desloca quando flutua em água salgada de massa específica $1,10 \times 10^3$ kg/m³? (b) Qual é a diferença entre o volume de água doce e o volume de água salgada deslocados?

•35 Três crianças, todas pesando 356 N, fazem uma jangada com toras de madeira de 0,30 m de diâmetro e 1,80 m de comprimento. Quantas toras são necessárias para mantê-las flutuando em água doce? Suponha que a massa específica da madeira é 800 kg/m³.

••36 Na Fig. 14-39*a*, um bloco retangular é gradualmente empurrado para dentro de um líquido. O bloco tem uma altura d; a área das faces superior e inferior é $A = 5,67$ cm². A Fig. 14-39*b* mostra o peso aparente P_{ap} do bloco em função da profundidade h da face inferior. A escala do eixo vertical é definida por $P_s = 0,20$ N. Qual é a massa específica do líquido?

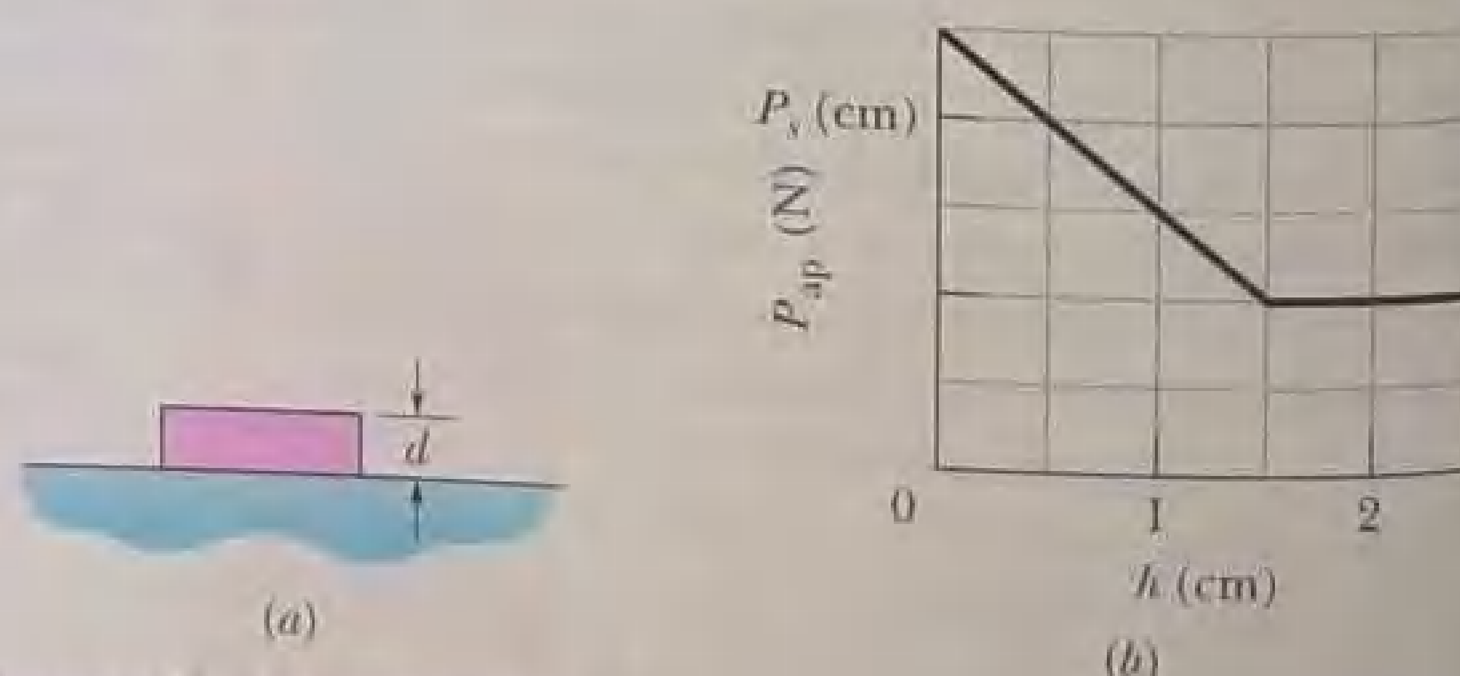


Figura 14-39 Problema 36.

••37 Uma esfera de ferro oca flutua quase totalmente submersa em água. O diâmetro externo é 60,0 cm e a massa específica do ferro é 7,87 g/cm³. Determine o diâmetro interno.

••38 Uma pequena esfera totalmente imersa em um líquido é liberada a partir do repouso e sua energia cinética é medida depois

que se desloca 4,0 cm no líquido. A Fig. 14-40 mostra os resultados depois de muitos líquidos serem usados: a energia cinética K está plotada no gráfico em função da massa específica do líquido, ρ_{liq}, e a escala do eixo vertical é definida por K_s = 1,60 J. Quais são (a) a massa específica e (b) o volume da bola?

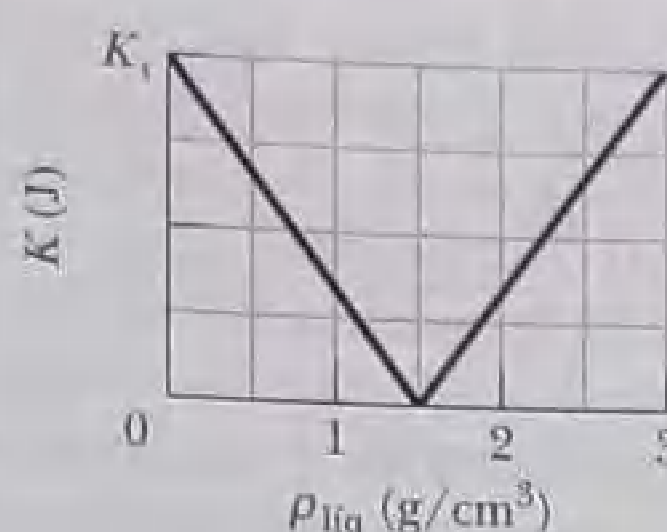


Figura 14-40 Problema 38.

••**39** Uma esfera oca de raio interno 8,0 cm e raio externo 9,0 cm flutua com metade do volume submerso em um líquido de massa específica 800 kg/m³. (a) Qual é a massa da esfera? (b) Calcule a massa específica do material de que é feita a esfera.

••**40** *Jacarés traiçoeiros.* Os jacarés costumam esperar pela presa flutuando com apenas o alto da cabeça exposto, para não serem vistos. Um meio de que dispõem para afundar mais ou menos é controlar o tamanho dos pulmões. Outro é engolir pedras (*gastrólitos*) que passam a residir no estômago. A Fig. 14-41 mostra um modelo muito simplificado de um jacaré, com uma massa de 130 kg, que flutua com a cabeça parcialmente exposta. O alto da cabeça tem uma área de 0,20 m². Se o jacaré engolir pedras com uma massa total equivalente a 1,0% da massa do corpo (um valor típico), de quanto afundará?

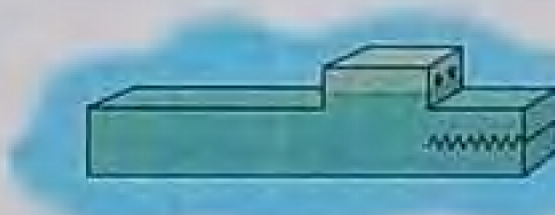


Figura 14-41 Problema 40.

••**41** Que fração do volume de um *iceberg* (massa específica 917 kg/m³) é visível se o *iceberg* flutua (a) no mar (água salgada, massa específica 1024 kg/m³) e (b) em um rio (água doce, massa específica 1000 kg/m³)? (Quando a água congela para formar gelo, o sal é deixado de lado. Assim, a água que resulta do degelo de um *iceberg* pode ser usada para beber.)

••**42** Um flutuador tem a forma de um cilindro reto, com 0,500 m de altura e 4,00 m² de área das bases; a massa específica é 0,400 vez a massa específica da água doce. Inicialmente, o flutuador é mantido totalmente imerso em água doce, com a face superior na superfície da água. Em seguida, é liberado e sobe gradualmente até começar a flutuar. Qual é o trabalho realizado pelo empuxo sobre o flutuador durante a subida?

••**43** Quando os paleontólogos encontram um fóssil de dinossauro razoavelmente completo, podem determinar a massa e o peso do dinossauro vivo usando um modelo em escala esculpido em plástico, baseado nas dimensões dos ossos do fóssil. A escala do modelo é de 1 para 20, ou seja, os comprimentos são 1/20 dos comprimentos reais, as áreas são $(1/20)^2$ das áreas reais e os volumes são $(1/20)^3$ dos volumes reais. Primeiro, o modelo é pendurado em um dos braços de uma balança e são colocados pesos no outro braço até que o equilíbrio seja estabelecido. Em seguida, o modelo é totalmente imerso em água e são removidos pesos do outro braço até que o equilíbrio seja restabelecido (Fig. 14-42). Para um modelo de um determinado fóssil de *T. rex*, 637,76 g tiveram que ser removidos para restabelecer o equilíbrio. Qual era o volume (a) do modelo e (b) do *T. rex* original? (c) Se a massa específica do *T. rex* era aproximadamente igual à da água, qual era a massa do dinossauro?



Figura 14-42 Problema 43.

••**44** Um bloco de madeira tem uma massa de 3,67 kg e uma massa específica de 600 kg/m³. Ele deve ser carregado de chumbo (1,14 × 10⁴ kg/m³) para flutuar na água com 0,900 de seu volume submerso. Que massa de chumbo é necessária se o chumbo for colocado (a) no alto do bloco e (b) na base do bloco?

••**45** Uma peça de ferro que contém um certo número de cavidades pesa 6000 N no ar e 4000 N na água. Qual é o volume total das cavidades? A massa específica do ferro é 7,87 g/cm³.

••**46** Deixa-se cair uma pequena bola a partir do repouso a uma profundidade de 0,600 m abaixo da superfície em uma piscina com água. Se a massa específica da bola é 0,300 vez a da água e se a força de arrasto que a água exerce sobre a bola é desprezível, que altura acima da superfície da água a bola atinge ao emergir? (Despreze a transferência de energia para as ondas e respingos produzidos pela bola ao emergir.)

••**47** O volume de ar no compartimento de passageiros de um automóvel de 1800 kg é 5,00 m³. O volume do motor e das rodas dianteiras é 0,750 m³ e o volume das rodas traseiras, tanque de gasolina e porta-malas é 0,800 m³; a água não pode penetrar no tanque de gasolina e no porta-malas. O carro cai em um lago. (a) A princípio, não entra água no compartimento de passageiros. Que volume do carro, em metros cúbicos, fica abaixo da superfície da água com o carro flutuando (Fig. 14-43)? (b) Quando a água penetra lentamente, o carro afunda. Quantos metros cúbicos de água estão dentro do carro quando o carro desaparece abaixo da superfície da água? (O carro, que leva uma carga pesada no porta-malas, permanece na horizontal.)



Figura 14-43 Problema 47.

•••**48** A Fig. 14-44 mostra uma bola de ferro suspensa por uma corda de massa desprezível presa em um cilindro que flutua, parcialmente submerso, com as bases paralelas à superfície da água. O cilindro tem uma altura de 6,00 cm, uma área das bases de 12,0 cm², uma massa específica de 0,30 g/cm³ e 2,00 cm da altura estão acima da superfície da água. Qual é o raio da bola de ferro?

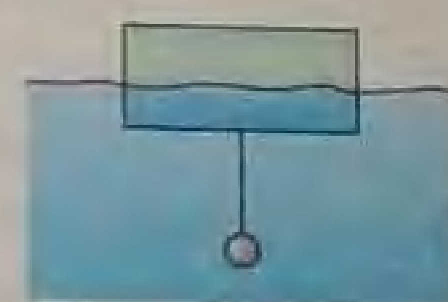


Figura 14-44 Problema 48.

Seção 14-9 A Equação de Continuidade

•49 *Efeito canal.* A Fig. 14-45 mostra uma canal onde se encontra uma barcaça ancorada com $d = 30$ m de largura e $b = 12$ m de calado. O canal tem uma largura $D = 55$ m, uma profundidade $H = 14$ m e nele circula água com uma velocidade $v_i = 1,5$ m/s. Suponha que a vazão em torno da barcaça é uniforme. Quando a água encontra a barcaça, sofre uma queda brusca de nível conhecida como efeito canal. Se a queda é de $h = 0,80$ m, qual é a velocidade da água ao passar ao lado da barcaça (a) pelo plano vertical indicado pela reta tracejada a e (b) pelo plano vertical indicado pela reta tracejada b? A erosão causada pelo aumento da velocidade é um problema que preocupa os engenheiros hidráulicos.

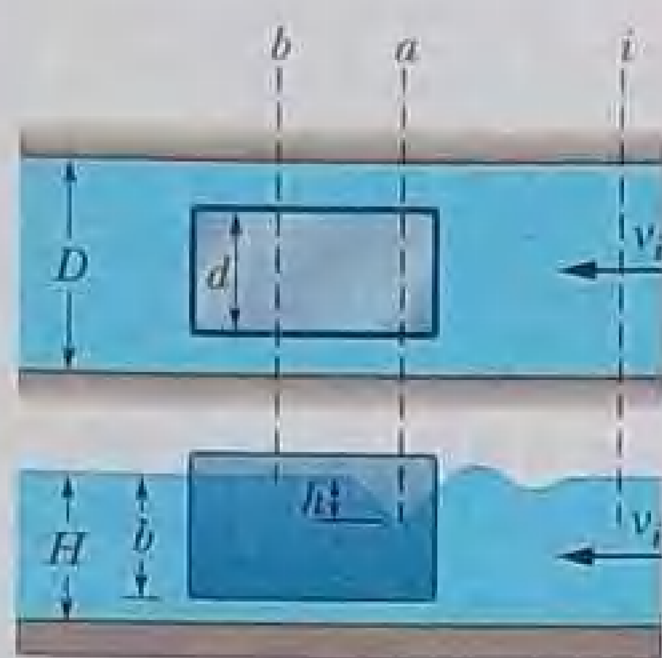


Figura 14-45 Problema 49.

•50 A Fig. 14-46 mostra dois segmentos de uma antiga tubulação que atravessa uma colina; as distâncias são $d_A = d_B = 30$ m e $D = 110$ m. O raio do cano do lado de fora da colina é 2,00 cm; o raio do cano no interior da colina, porém, não é mais conhecido. Para determiná-lo, os engenheiros hidráulicos verificaram inicialmente que a velocidade da água nos segmentos à esquerda e à direita da colina era 2,50 m/s. Em seguida, introduziram um corante na água no ponto A e observaram que levava 88,8 s para chegar ao ponto B. Qual é o raio médio do cano no interior da colina?

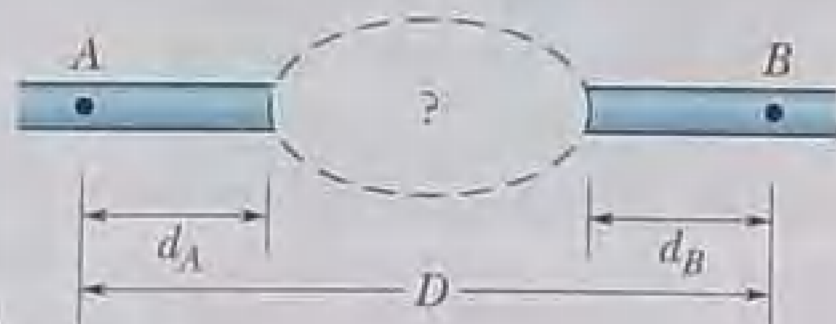


Figura 14-46 Problema 50.

•51 Uma mangueira de jardim com um diâmetro interno de 1,9 cm está ligada a um borrifador (estacionário) que consiste apenas em um recipiente com 24 furos de 0,13 cm de diâmetro. Se a água circula na mangueira com uma velocidade de 0,91 m/s, com que velocidade deixa os furos do borrifador?

•52 Dois riachos se unem para formar um rio. Um dos riachos tem uma largura de 8,2 m, uma profundidade de 3,4 m e a velocidade da água é 2,3 m/s. Outro riacho tem 6,8 m de largura, 3,2 m de profundidade e a velocidade da água é 2,6 m/s. Se o rio tem uma largura de 10,5 m e a velocidade da água é 2,9 m/s, qual é a profundidade do rio?

••53 A água de um porão inundado é bombeada com uma velocidade de 5,0 m/s através de uma mangueira com 1,0 cm de raio. A mangueira passa por uma janela 3,0 m acima do nível da água. Qual é a potência da bomba?

••54 A água que sai de um cano de 1,9 cm (diâmetro interno) passa por três canos de 1,3 cm. (a) Se as vazões nos três canos menores são 26, 19 e 11 L/min, qual é a vazão no tubo de 1,9 cm? (b) Qual é a razão entre a velocidade da água no cano de 1,9 cm e a velocidade no cano em que a vazão é 26 L/min?

Seção 14-10 A Equação de Bernoulli

•55 Qual é o trabalho realizado pela pressão para fazer passar 1,4 m³ de água por um cano com um diâmetro interno de 13 mm se a diferença de pressão entre as extremidades do cano é 1,0 atm?

•56 Dois tanques, 1 e 2, ambos com uma grande abertura no alto, contêm líquidos diferentes. Um pequeno furo é feito no lado de cada tanque à mesma distância h abaixo da superfície do líquido, mas o furo do tanque 1 tem metade da seção reta do furo do tanque 2. (a) Qual é a razão ρ_1/ρ_2 entre as massas específicas dos líquidos se a vazão mássica é a mesma para os dois furos? (b) Qual é a razão R_{V1}/R_{V2} entre as vazões volumétricas dos dois tanques? (c) Em um certo instante, o líquido do tanque 1 está 12,0 cm acima do furo. A que altura acima do furo o líquido do tanque 2 deve estar nesse instante para que os tanques tenham vazões volumétricas iguais?

•57 Um tanque cilíndrico de grande diâmetro está cheio d'água até uma profundidade $D = 0,30$ m. Um furo de seção reta $A = 6,5$ cm² no fundo do tanque permite a drenagem da água. (a) Qual é a velocidade de escoamento da água, em metros cúbicos por segundo? (b) A que distância abaixo do fundo do tanque a seção reta do jorro é igual à metade da área do furo?

•58 A entrada da tubulação da Fig. 14-47 tem uma seção reta de 0,74 m² e a velocidade da água é 0,40 m/s. Na saída, a uma distância $D = 180$ m abaixo da entrada, a seção reta é menor que a da entrada e a velocidade da água é 9,5 m/s. Qual é a diferença de pressão entre a entrada e a saída?



Figura 14-47 Problema 58.

•59 A água se move com uma velocidade de 5,0 m/s em um cano com uma seção reta de 4,0 cm². A água desce gradualmente 10 m enquanto a seção reta aumenta para 8,0 cm². (a) Qual é a velocidade da água depois da descida? (b) Se a pressão antes da descida é $1,5 \times 10^5$ Pa, qual é a pressão depois da descida?

•60 Os torpedos são às vezes testados em um tubo horizontal por onde escoa água, da mesma forma como os aviões são testados em um túnel de vento. Considere um tubo circular com um diâmetro interno de 25,0 cm e um torpedo alinhado com o eixo maior do tubo. O torpedo tem 5,00 cm de diâmetro e é testado com a água passando por ele a 2,50 m/s. (a) Com que velocidade a água passa na parte do tubo que não está obstruída pelo torpedo? (b) Qual é a diferença de pressão entre a parte obstruída e a parte não obstruída do tubo?

•61 Um cano com um diâmetro interno de 2,5 cm transporta água para o porão de uma casa a uma velocidade de 0,90 m/s com uma pressão de 170 kPa. Se o cano se estreita para 1,2 cm e sobe para o segundo piso, 7,6 m acima do ponto de entrada, qual é (a) a velocidade e (b) a pressão da água no segundo piso?

••62 O tubo de Pitot (Fig. 14-48) é usado para medir a velocidade do ar nos aviões. Ele é formado por um tubo externo com pequenos furos B (quatro são mostrados na figura) que permitem a entrada de ar no tubo; esse tubo está ligado a um dos lados de um tubo em forma de U. O outro lado do tubo em forma de U está ligado ao furo A na frente do medidor, que aponta no sentido do movimento do avião. Em A, o ar fica estagnado, de modo que $v_A = 0$. Em B, porém, a

velocidade do ar é presumivelmente igual à velocidade v do ar em relação ao avião. (a) Use a equação de Bernoulli para mostrar que

$$v = \sqrt{\frac{2\rho g h}{\rho_{ar}}},$$

onde ρ é a massa específica do líquido contido no tubo em U e h é a diferença entre os níveis do líquido no tubo. (b) Suponha que o tubo contém álcool e que a diferença de nível h é 26,0 cm. Qual é a velocidade do avião em relação ao ar? A massa específica do ar é 1,03 kg/m³ e a do álcool é 810 kg/m³.

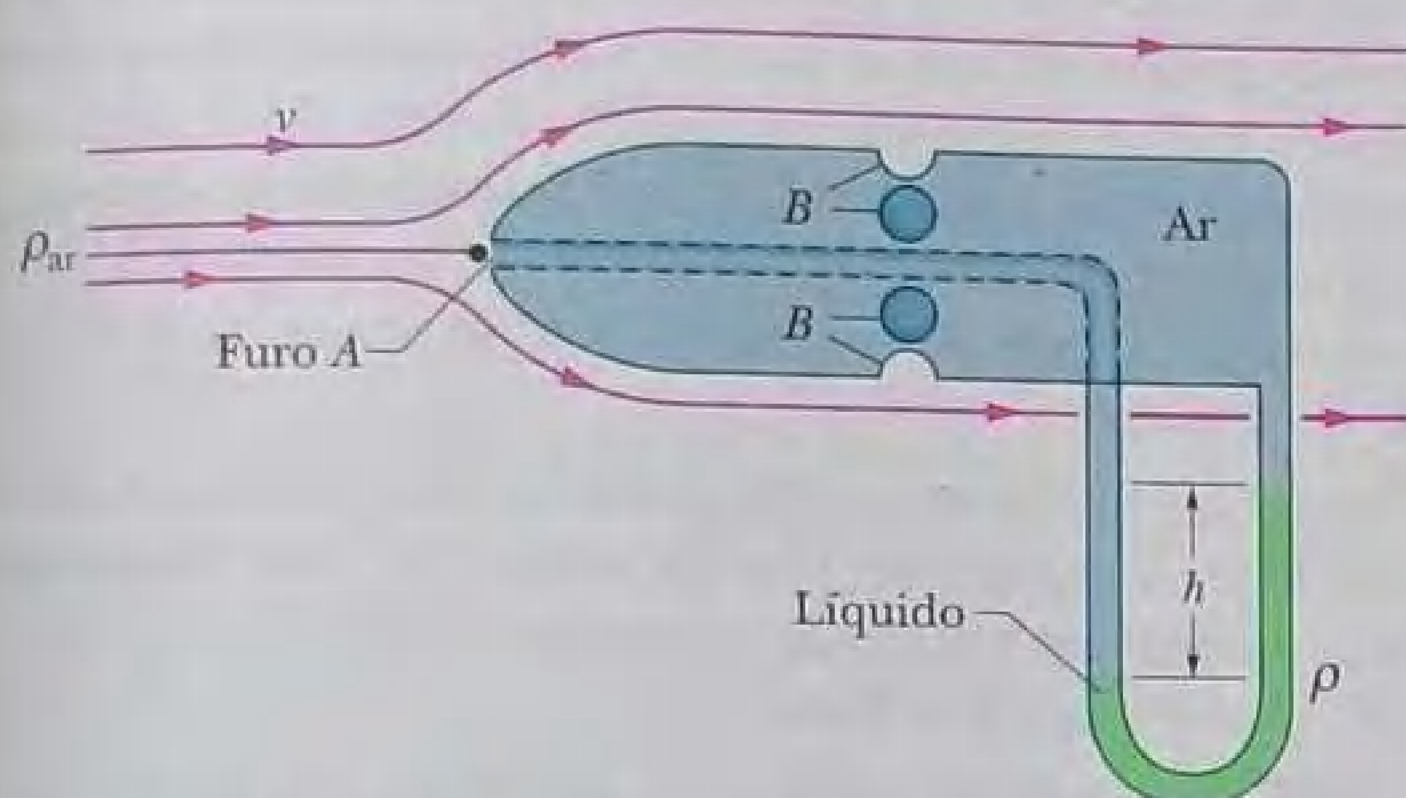


Figura 14-48 Problemas 62 e 63.

••63 O tubo de Pitot (veja o Problema 62) de um avião que está voando a grande altitude mede uma diferença de pressão de 180 Pa. Qual é a velocidade do ar se a massa específica do ar nessa altitude é 0,031 kg/m³?

••64 Na Fig. 14-49, a água atravessa um cano horizontal e sai para a atmosfera com uma velocidade v_1 = 15 m/s. Os diâmetros dos segmentos esquerdo e direito do cano são 5,0 cm e 3,0 cm. (a) Que volume de água escoa para a atmosfera em um período de 10 min? Quais são (b) a velocidade v_2 e (c) a pressão manométrica no segmento esquerdo do tubo?



Figura 14-49 Problema 64.

••65 O *medidor venturi* é usado para medir a vazão dos fluidos nos canos. O medidor é ligado entre dois pontos do cano (Fig. 14-50); a seção reta A na entrada e na saída do medidor é igual à seção reta do cano. O fluido entra no medidor com velocidade V e depois passa com velocidade v por uma "garganta" estreita de seção reta a. Um manômetro liga a parte mais larga do medidor à parte mais estreita. A variação da velocidade do fluido é acompanhada por uma variação Δp da pressão do fluido, que produz uma diferença h na altura do líquido nos dois lados do manômetro. (A diferença Δp corresponde à pressão na garganta menos a pressão no cano.) (a) Aplicando a equação de Bernoulli e a equação de continuidade aos pontos 1 e 2 na Fig. 14-50, mostre que

$$V = \sqrt{\frac{2a^2\,\Delta p}{\rho(a^2 - A^2)}},$$

onde ρ é a massa específica do fluido. (b) Suponha que o fluido é água doce, que a seção reta é 64 cm² no cano e 32 cm² na garganta, e que a pressão é 55 kPa no cano e 41 kPa na garganta. Qual é a vazão de água em metros cúbicos por segundo?

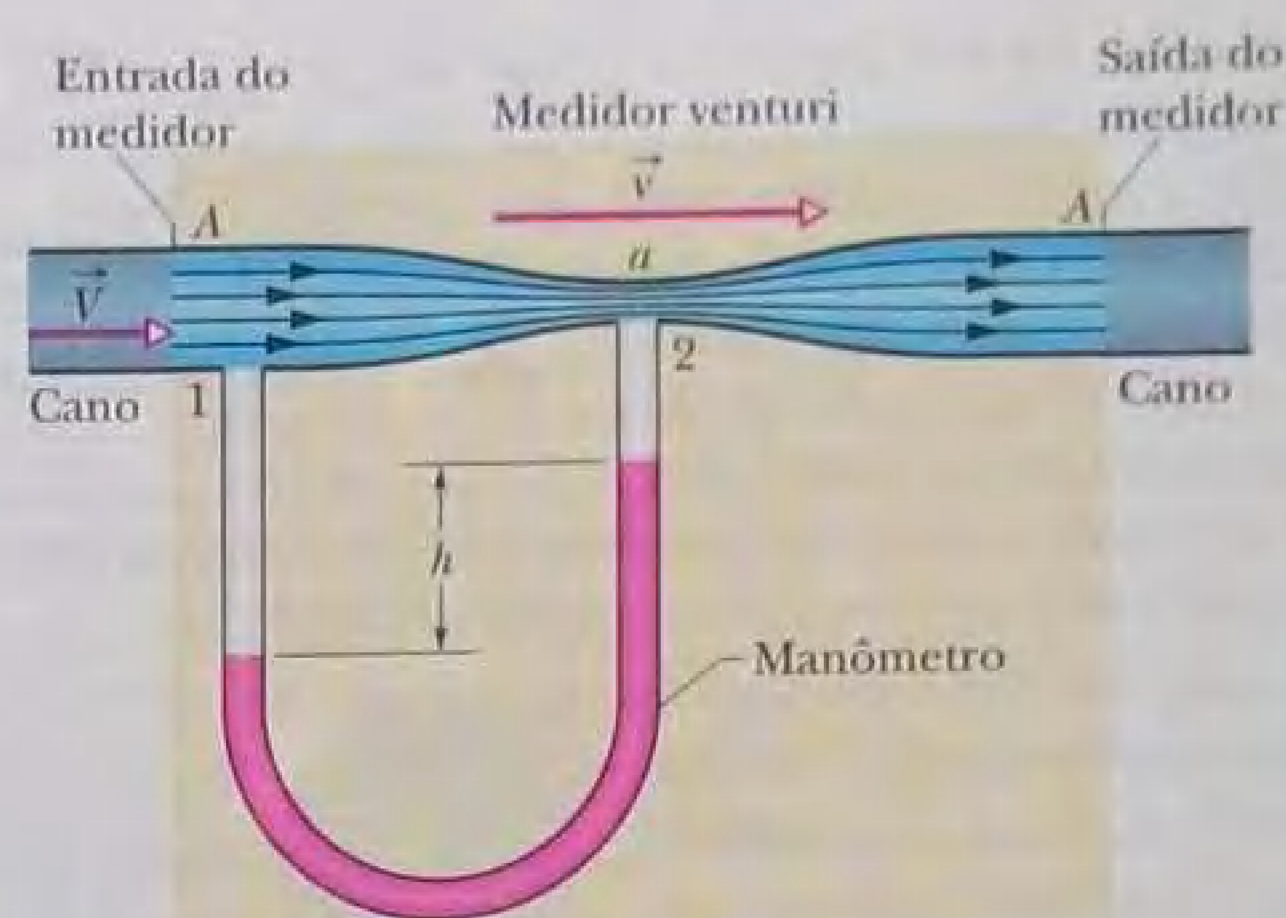


Figura 15-50 Problemas 65 e 66.

••66 Considere o medidor venturi do Problema 65 e da Fig. 14-50 sem o manômetro. Suponha que $A = 5a$ e que a pressão p_1 no ponto A é 2,0 atm. Calcule os valores (a) da velocidade V no ponto A e (b) da velocidade v no ponto a para que a pressão p_2 no ponto a seja zero. (c) Calcule a vazão correspondente se o diâmetro no ponto A é 5,0 cm. O fenômeno que ocorre em a quando p_2 cai para perto de zero é conhecido como cavitação; a água evapora para formar pequenas bolhas.

••67 Na Fig. 14-51, a água doce atrás de uma represa tem uma profundidade D = 15 m. Um cano horizontal de 4,0 cm de diâmetro atravessa a represa a uma profundidade d = 6,0 m. Uma tampa fecha a abertura do cano. (a) Determine o módulo da força de atrito entre a tampa e a parede do tubo. (b) A tampa é retirada. Qual é o volume de água que sai do cano em 3,0 h?

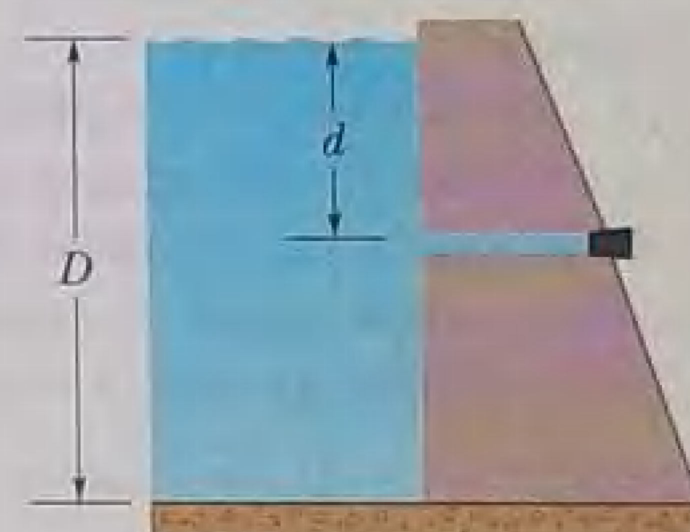


Figura 14-51 Problema 67.

••68 Água doce escoa horizontalmente do segmento 1 de uma tubulação, com uma seção reta A_1, para o segmento 2, com uma seção reta A_2. A Fig. 14-52 mostra um gráfico da relação entre diferença de pressão $p_2 - p_1$ e o inverso do quadrado da área A_1, A_1^{-2}, supondo um escoamento laminar. A escala do eixo vertical é definida por Δp_s = 300 kN/m². Nas condições da figura, quais são os valores (a) de A_2 e (b) da vazão?

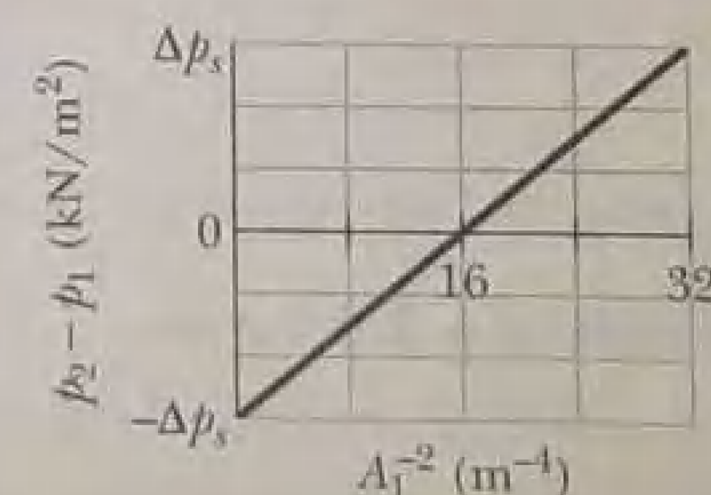


Figura 14-52 Problema 68.

••69 Um líquido de massa específica 900 kg/m³ escoa em um tubo horizontal com seção reta de 1,90 × 10⁻² m² na região A e uma seção reta de 9,50 × 10⁻² m² na região B. A diferença de pressão entre as duas regiões é 7,20 × 10³ Pa. Quais são (a) a vazão e (b) a vazão mássica?

••70 Na Fig. 14-53, a água entra em regime laminar no lado esquerdo de uma tubulação (raio $r_1 = 2{,}00R$), atravessa a parte seção central (raio R), e sai pelo lado direito (raio $r_3 = 3{,}00R$). A velocidade da água na parte central é 0,500 m/s. Qual é o trabalho total realizado sobre 0,400 m³ de água enquanto a água passa do lado esquerdo para o lado direito?

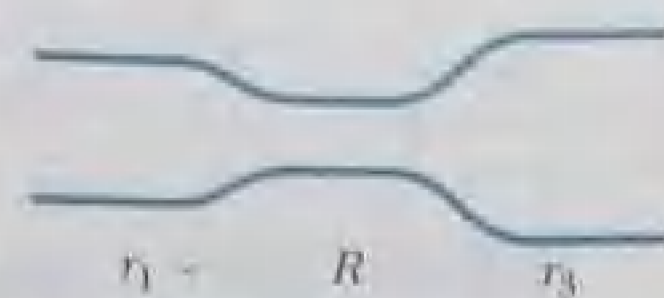


Figura 14-53 Problema 70.

••71 A Fig. 14-54 mostra um jorro d'água saindo por um furo a uma distância h = 10 cm da superfície de tanque que contém H = 40 cm de água. (a) A que distância x a água atinge o solo? (b) A que profundidade deve ser feito um segundo furo para que o valor de x seja o mesmo? (c) A que profundidade deve ser feito um furo para que o valor de x seja o maior possível?

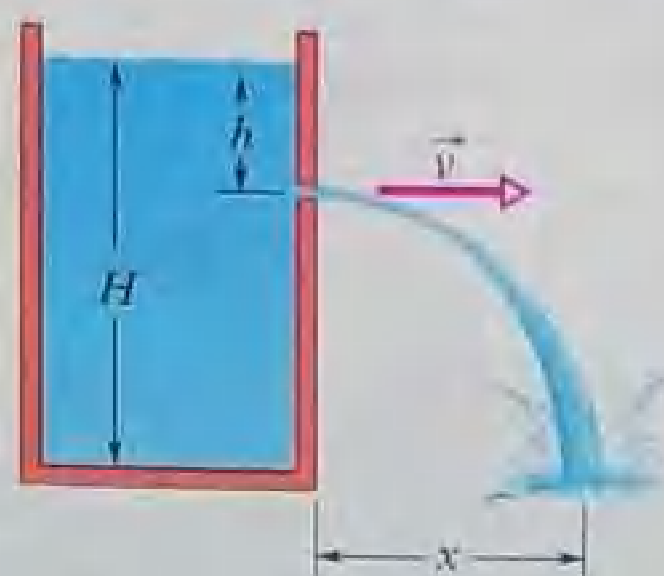


Figura 14-54 Problema 71.

•••72 A Fig. 14-55 mostra um diagrama muito simplificado do sistema de drenagem de água da chuva de uma casa. A chuva que cai no telhado inclinado escorre para as calhas da borda do telhado e desce por canos verticais (apenas um é mostrado na figura) para um cano principal M abaixo do porão, que leva a água para um cano ainda maior, situado no subsolo. Na Fig. 14-55, um ralo no porão também está ligado ao cano M. Suponha que as seguintes condições são verdadeiras:

1. os canos verticais têm um comprimento h_1 = 11 m;
2. o ralo do porão fica a uma altura h_2 = 1,2 m em relação ao cano M;
3. o cano M tem um raio de 3,0 cm;
4. a casa tem L = 60 m de fachada e P = 30 m de profundidade;
5. toda a água que cai no telhado passa pelo cano M;
6. a velocidade inicial da água nos canos verticais é desprezível;
7. a velocidade do vento é desprezível (a chuva cai verticalmente).

Para que índice de precipitação, em centímetros por hora, a água do cano M chega à altura do ralo, ameaçando inundar o porão?

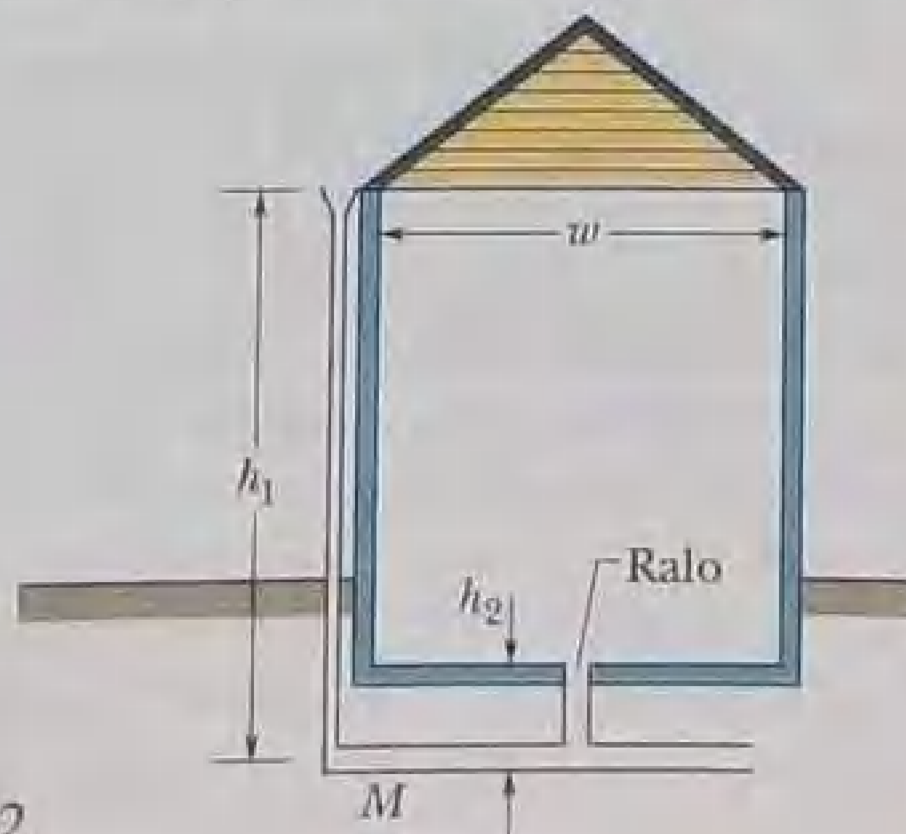


Figura 14-55 Problema 72.

Problemas Adicionais

73 Cerca de um terço do corpo de uma pessoa que flutua no mar Morto fica acima da superfície da água. Supondo que a massa específica do corpo humano é 0,98 g/cm³, determine a massa específica da água do mar Morto. (Por que ela é tão maior do que 1,0 g/cm³?)

74 Um tubo em forma de U, aberto nas duas extremidades, contém mercúrio. Quando 11,2 cm de água são despejados no lado direito do tubo, de quanto o mercúrio sobe no lado esquerdo em relação ao nível inicial?

75 Se uma bolha de água mineral com gás sobe com uma aceleração de 0,225 m/s² e tem um raio de 0,500 mm, qual é a massa da bolha? Suponha que a força de arrasto que o líquido exerce sobre a bolha é desprezível.

76 Suponha que seu corpo tem uma massa específica uniforme 0,95 vez a da água. (a) Se você está boiando em uma piscina, que fração do volume do seu corpo está acima da superfície da água?

Areia movediça é o fluido produzido quando a água se mistura com a areia, separando os grãos e eliminando o atrito que os impede de se mover uns em relação aos outros. Poços de areia movediça podem se formar quando a água das montanhas escorre para os vales e se infiltra em bolsões de areia. (b) Se você está boiando em um poço profundo de areia movediça com uma massa específica 1,6 vez a da água, que fração do seu corpo fica acima da superfície da areia movediça? (c) Em particular, você ainda é capaz de respirar?

77 Uma bola de vidro com 2,00 cm de raio repousa no fundo de um copo de leite. A massa específica do leite é 1,03 g/cm³ e o módulo da força normal que o fundo do copo exerce sobre a bola é $9{,}48 \times 10^{-2}$ N. Qual é a massa da bola?

78 Surpreendido por uma avalanche, um esquiador é totalmente soterrado pela neve, cuja massa específica é 96 kg/m³. Suponha que a massa específica média do esquiador, com seus trajes e equipamentos, é 1020 kg/m³. Que fração da força gravitacional que age sobre o esquiador é compensada pelo empuxo da neve?

79 Um objeto está pendurado em uma balança de mola. A balança indica 30 N no ar, 20 N quando o objeto está imerso em água e 24 N quando o objeto está imerso em outro líquido de massa específica desconhecida. Qual é a massa específica desse outro líquido?

80 Em um experimento, um bloco retangular de altura h é colocado para flutuar em quatro líquidos separados. No primeiro líquido, que é a água, o bloco flutua totalmente submerso. Nos líquidos A, B e C, o bloco flutua com altura $h/2$, $2h/3$ e $h/4$ acima da superfície do líquido, respectivamente. Qual é a *densidade* (massa específica em relação à da água) do líquido (a) A, (b) B e (c) C?

81 A Fig. 14-30 mostra um tubo em forma de U modificado: o lado direito é mais curto que o esquerdo. A extremidade do lado direito está d = 10,0 cm acima da bancada do laboratório. O raio do tubo é 1,50 cm. Despeja-se água (lentamente) no lado esquerdo até que comece a transbordar do lado direito. Em seguida, um líquido de massa específica 0,80 g/cm³ é despejado lentamente no lado esquerdo até que a altura do líquido nesse lado seja 8,0 cm (o líquido não se mistura com a água). Que quantidade de água transborda do lado direito?

82 Qual é a aceleração de um balão de ar quente se a razão entre a massa específica do ar fora do balão e a massa específica do ar dentro do balão é 1,39? Despreze a massa do balão e da cesta.

83 A Fig. 14-56 mostra um *sifão*, que é um tubo usado para transferir líquidos de um recipiente para outro. O tubo ABC deve estar inicialmente cheio, mas, se essa condição é satisfeita, o líquido escoa pelo tubo até que a superfície do líquido no recipiente esteja no mesmo nível que a extremidade A do tubo. O líquido tem uma massa específica de 1000 kg/m³ e viscosidade desprezível. As distâncias mostradas na figura são h_1 = 25 cm, d = 12 cm, e h_2 = 40 cm. (a) Com que velocidade o líquido sai do tubo no ponto C? (b) Se a pressão atmosférica é $1{,}0 \times 10^5$ Pa, qual é a pressão do líquido em B, o ponto mais alto do tubo? (c) Teoricamente, até que altura máxima h_1 esse sifão pode fazer a água subir?

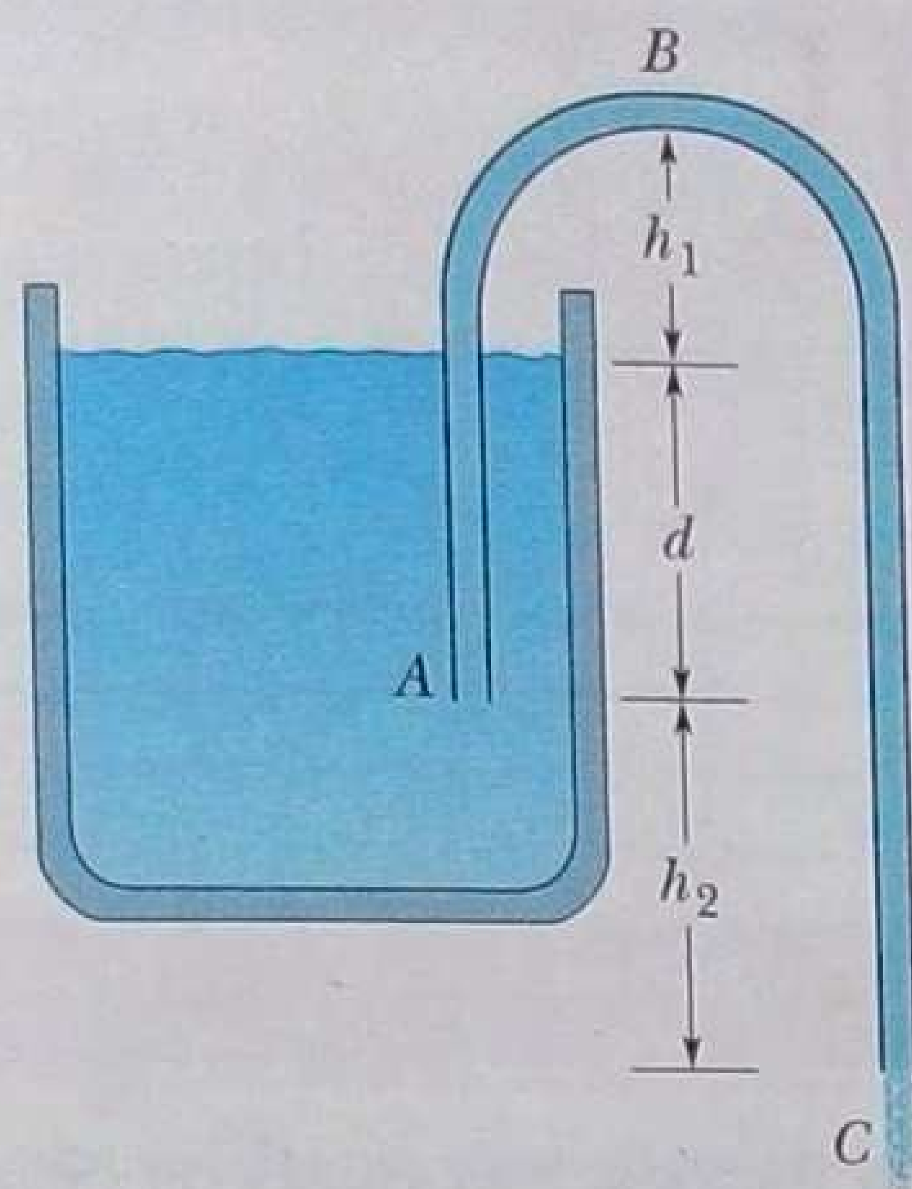


Figura 14-56 Problema 83.

84 Quando tossimos, o ar é expelido em alta velocidade pela traqueia e brônquios superiores e remove o excesso de muco que está prejudicando a respiração. Essa alta velocidade é produzida da seguinte forma: depois que inspiramos uma grande quantidade de ar, a glote (abertura estreita da laringe) se fecha, os pulmões se contraem, aumentando a pressão do ar, a traqueia e os brônquios superiores se estreitam e a glote se abre bruscamente, deixando escapar o ar. Suponha que, durante a expulsão, a vazão seja $7{,}0 \times 10^{-3}$ m/s. Que múltiplo da velocidade do som ($v_s = 343$ m/s) é a velocidade do ar na traqueia se o diâmetro da traqueia (a) permanece com o valor normal de 14 mm e (b) diminui para 5,2 mm?

85 Uma lata tem um volume de 1200 cm^3 e uma massa de 130 g. Quantos gramas de bolinhas de chumbo podem ser colocados na lata sem que ela afunde na água?

CAPÍTULO

15 OSCILAÇÕES

15-1 O QUE É FÍSICA?

Nosso mundo está repleto de oscilações, nas quais os objetos se movem repetidamente de um lado para outro. Muitas são simplesmente curiosas ou desagradáveis, mas outras podem ser economicamente importantes ou perigosas. Eis alguns exemplos: quando um taco rebate uma bola de beisebol, o taco pode sofrer uma oscilação suficiente para machucar a mão do batedor ou mesmo se partir em dois. Quando o vento fustiga uma linha de transmissão de energia elétrica, a linha às vezes oscila ("galopa", no jargão dos engenheiros elétricos) com tanta intensidade que pode se romper, interrompendo o fornecimento de energia elétrica a toda uma região. Nos aviões, a turbulência do ar que passa pelas asas faz com que oscilem, causando fadiga no metal que pode fazer com que as asas se quebrem. Quando um trem faz uma curva, as rodas oscilam horizontalmente quando são forçadas a mudar de direção, produzindo um som peculiar.

Quando acontece um terremoto nas vizinhanças de uma cidade, os edifícios sofrem oscilações tão intensas que podem desmoronar. Quando uma flecha é lançada de um arco, as penas da extremidade conseguem passar pelo arco sem se chocar com ele porque a flecha oscila. Quando se deixa cair uma moeda em um prato metálico, a moeda oscila de uma forma tão característica que é possível conhecer o valor da moeda pelo som produzido. Quando um peão de rodeio monta um touro, o corpo do peão oscila para um lado e para outro enquanto o touro gira e corcoveia (pelo menos, é o que o peão tenta fazer).

O estudo e o controle das oscilações são dois objetivos importantes da física e da engenharia. Neste capítulo, vamos discutir um tipo básico de oscilação conhecido como *movimento harmônico simples*.

15-2 Movimento Harmônico Simples

A Fig. 15-1*a* mostra uma sequência de "instantâneos" de um sistema oscilatório simples, uma partícula que se move repetidamente para um lado e para outro em relação à origem de um eixo x. Nesta seção, vamos nos limitar a descrever o movimento. Mais adiante, discutiremos como esse tipo de movimento pode ser produzido.

Uma propriedade importante do movimento oscilatório é a **frequência**, o número de oscilações por segundo. O símbolo de frequência é f e a unidade de frequência no SI é o **hertz** (Hz), definido como

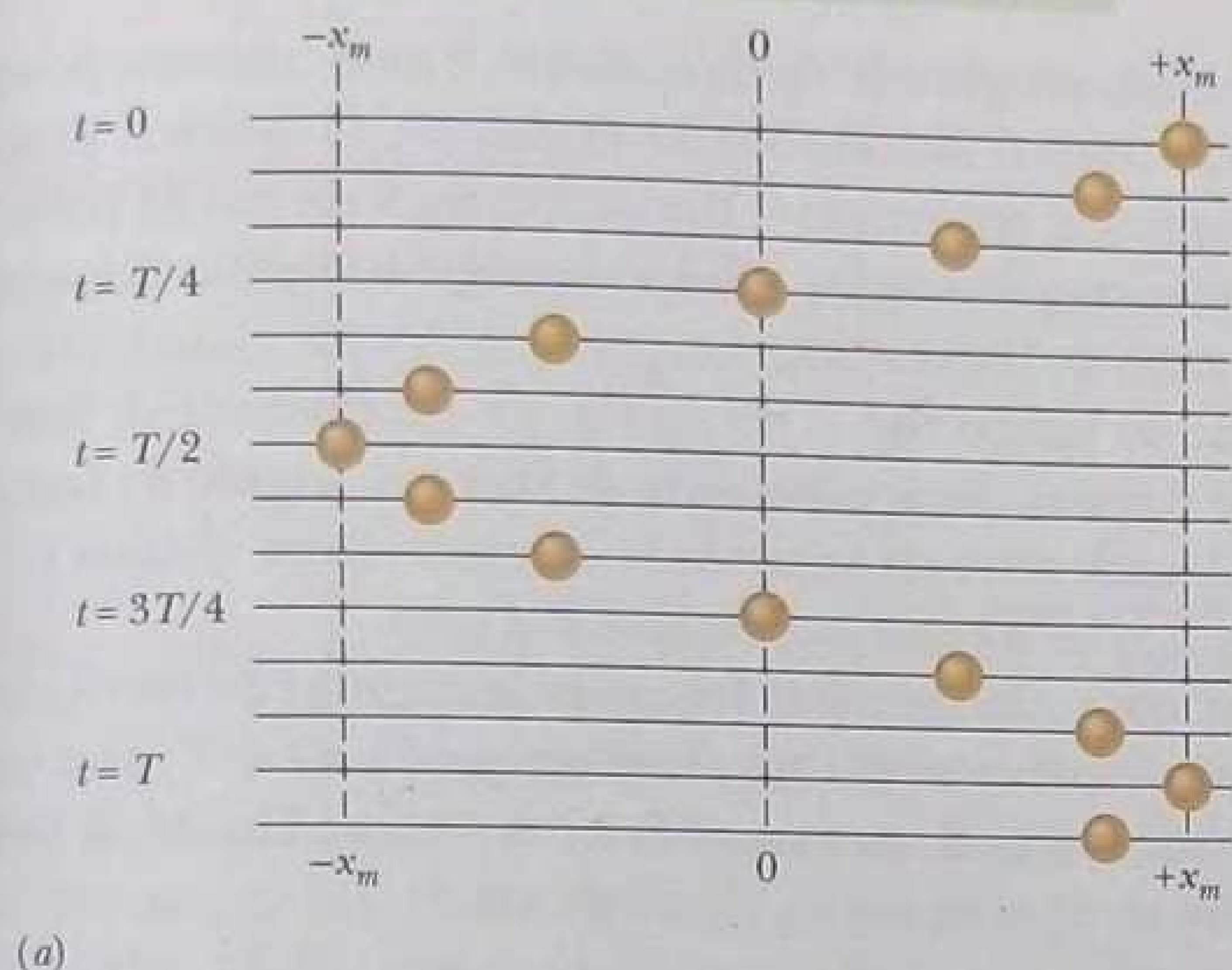
$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ oscilação por segundo} = 1 \text{ s}^{-1}. \quad (15\text{-}1)$$

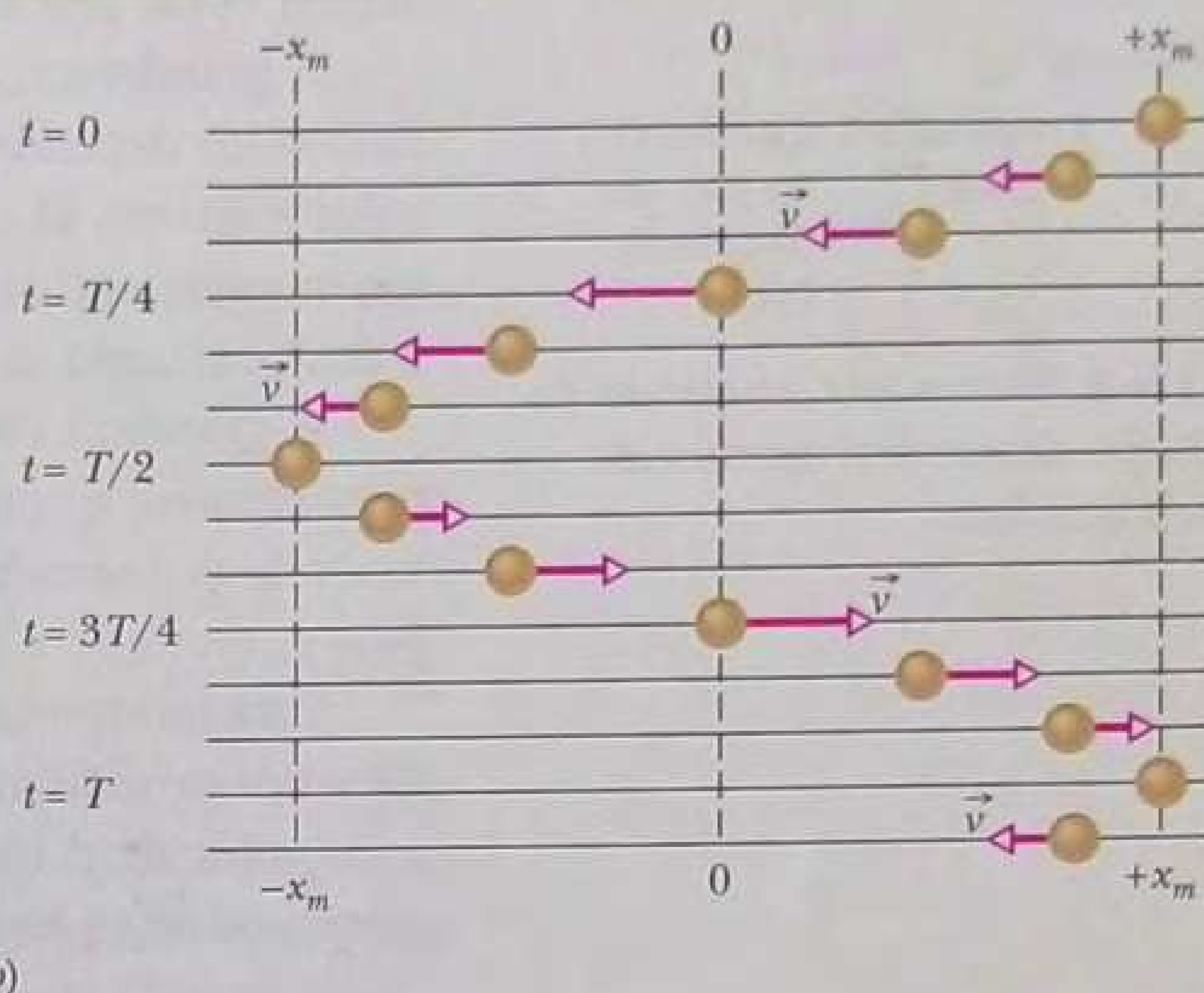
Uma grandeza relacionada à frequência é o **período** T, que é o tempo necessário para completar uma oscilação completa (ou **ciclo**):

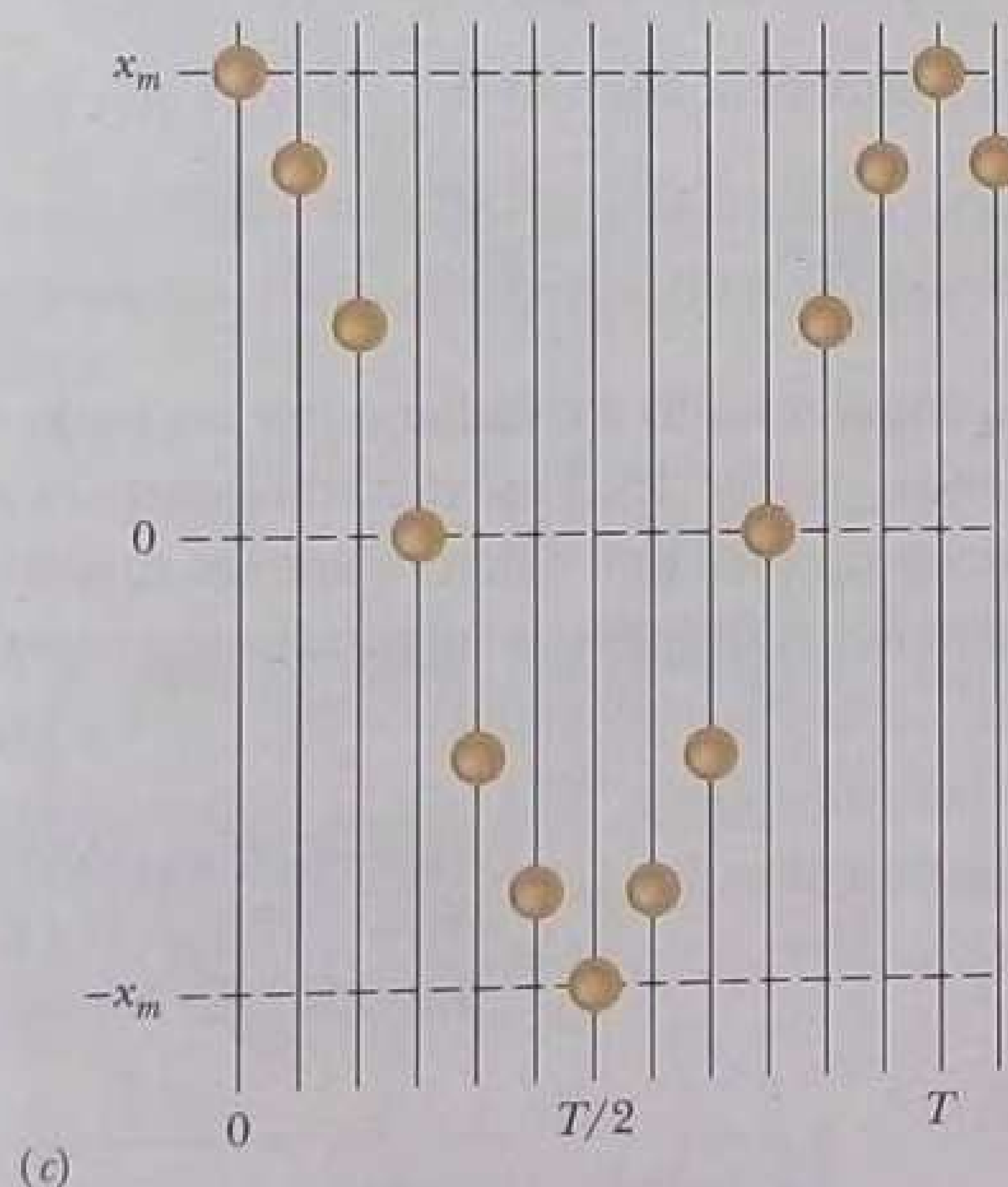
$$T = \frac{1}{f}. \quad (15\text{-}2)$$

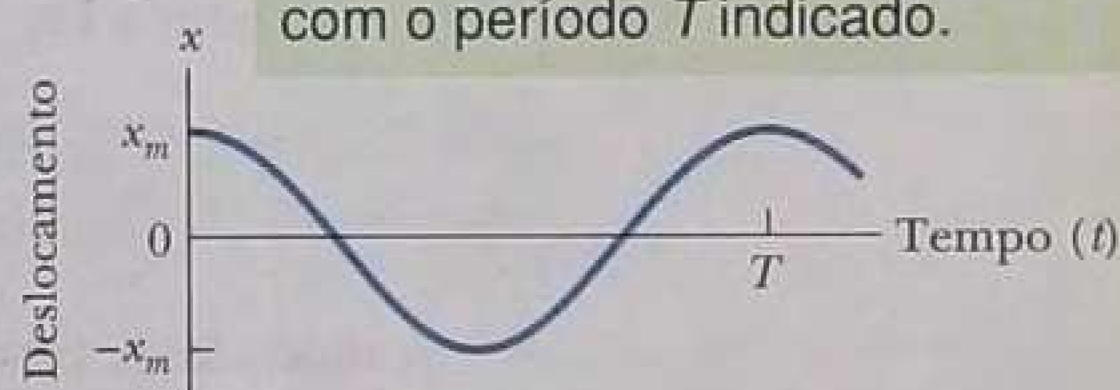
Todo movimento que se repete a intervalos regulares é chamado de **movimento periódico** ou **movimento harmônico**. No momento, estamos interessados em um movimento que se repete de um modo particular, o que está representado na











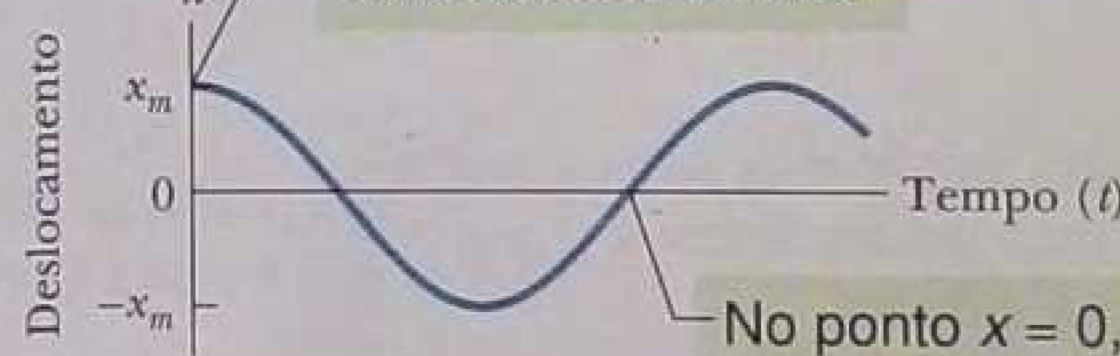


Figura 15-1 (*a*) Uma sequência de "instantâneos" (tirados a intervalos regulares) que mostram a posição de uma partícula enquanto oscila em torno da origem de um eixo x, entre $+x_m$ e $-x_m$. (*b*) O comprimento dos vetores é proporcional à velocidade escalar instantânea da partícula. A velocidade escalar é máxima quando a partícula se encontra na origem e é nula quando está em $\pm x_m$. Se o tempo t é escolhido como zero quando a partícula está em $+x_m$, a partícula retorna para $+x_m$ em $t = T$, onde T é o período do movimento. Em seguida, o movimento é repetido. (*c*) Fazendo o gráfico girar 90°, vemos que a posição da partícula varia com o tempo de acordo com uma função do tipo cosseno, como a que aparece em (*d*). (*e*) A velocidade (inclinação da curva) varia com o tempo.

Fig. 15-1*a*. Nesse tipo de movimento, o deslocamento x da partícula em relação à origem é dado por uma função do tempo da forma

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(deslocamento)}, \tag{15-3}$$

onde x_m, ω e ϕ são constantes. Este tipo de movimento é chamado de **movimento harmônico simples** (MHS), uma expressão que significa que o movimento periódico

Deslocamento no instante t

Fase

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

Amplitude

Tempo

Frequência angular

Constante de fase ou ângulo de fase

Figura 15-2 Nomes das grandezas da Eq. 15-3, que descreve o movimento harmônico simples.

é uma função senoidal do tempo. O gráfico da Eq. 15-3, na qual a função senoidal é uma função cosseno, aparece na Fig. 15-1*d*. (O gráfico pode ser obtido fazendo a Fig. 15-1*a* girar 90° no sentido anti-horário.) As grandezas que determinam a forma do gráfico são mostradas na Fig. 15-2 com os respectivos nomes. Vamos agora definir essas grandezas.

A grandeza x_m, denominada **amplitude** do movimento, é uma constante positiva cujo valor depende do modo como o movimento foi produzido. O índice m indica o valor *máximo*, já que a amplitude representa o deslocamento máximo da partícula em um dos sentidos. A função cosseno da Eq. 15-3 varia entre os limites ± 1; assim, o deslocamento $x(t)$ varia entre os limites $\pm x_m$.

A grandeza dependente do tempo $(\omega t + \phi)$ da Eq. 15-3 é chamada de **fase** do movimento e a constante ϕ é chamada de **constante de fase** (ou **ângulo de fase**). O valor de ϕ depende do deslocamento e da velocidade da partícula no instante $t = 0$. Nos gráficos de $x(t)$ da Fig. 15-3*a*, a constante de fase ϕ é zero.

Para interpretar a constante ω, denominada **frequência angular** do movimento, notamos primeiramente que o deslocamento $x(t)$ deve ser igual a $x(t + T)$ para qualquer valor de t. Para simplificar a análise, vamos fazer $\phi = 0$ na Eq. 15-3. Nesse caso, podemos escrever

$$x_m \cos \omega t = x_m \cos \omega(t + T). \tag{15-4}$$

A função cosseno se repete pela primeira vez quando o argumento (a fase) aumenta de 2π rad; assim, a Eq. 15-4 nos dá

$$\omega(t + T) = \omega t + 2\pi$$

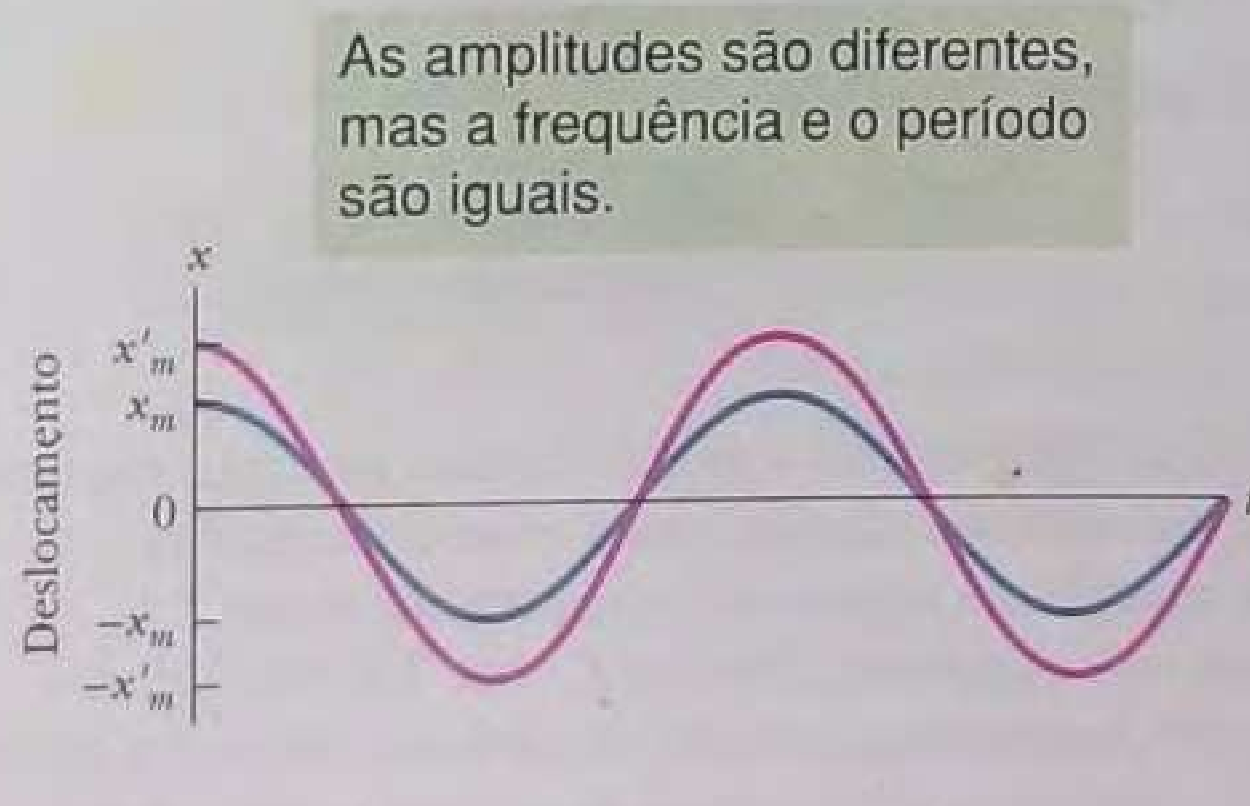
ou

$$\omega T = 2\pi.$$

De acordo com a Eq. 15-2, a frequência angular é

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \tag{15-5}$$

A unidade de frequência angular no SI é o radiano por segundo. (Por coerência, ϕ deve ser expresso em radianos.) A Fig. 15-3 mostra comparações entre as funções $x(t)$ de movimentos harmônicos simples que diferem apenas quanto à amplitude, o período (e, portanto, a frequência e a frequência angular) ou a constante de fase.



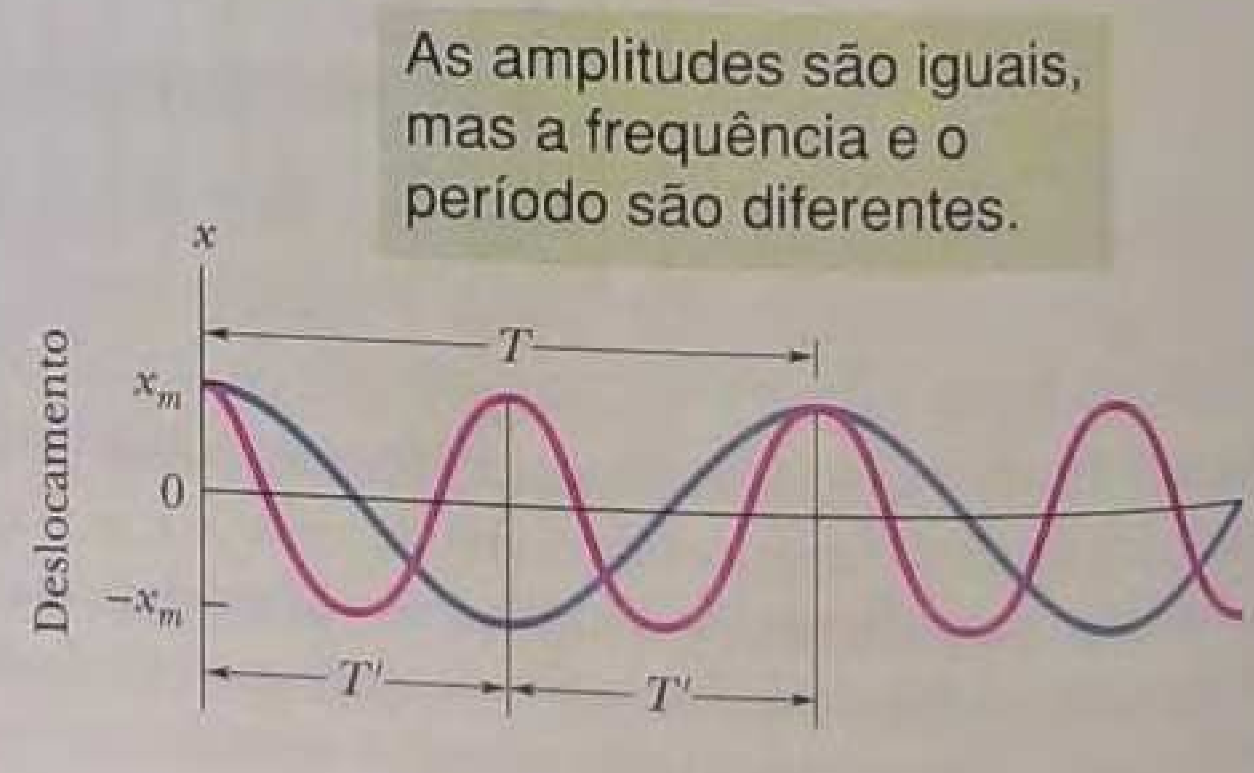
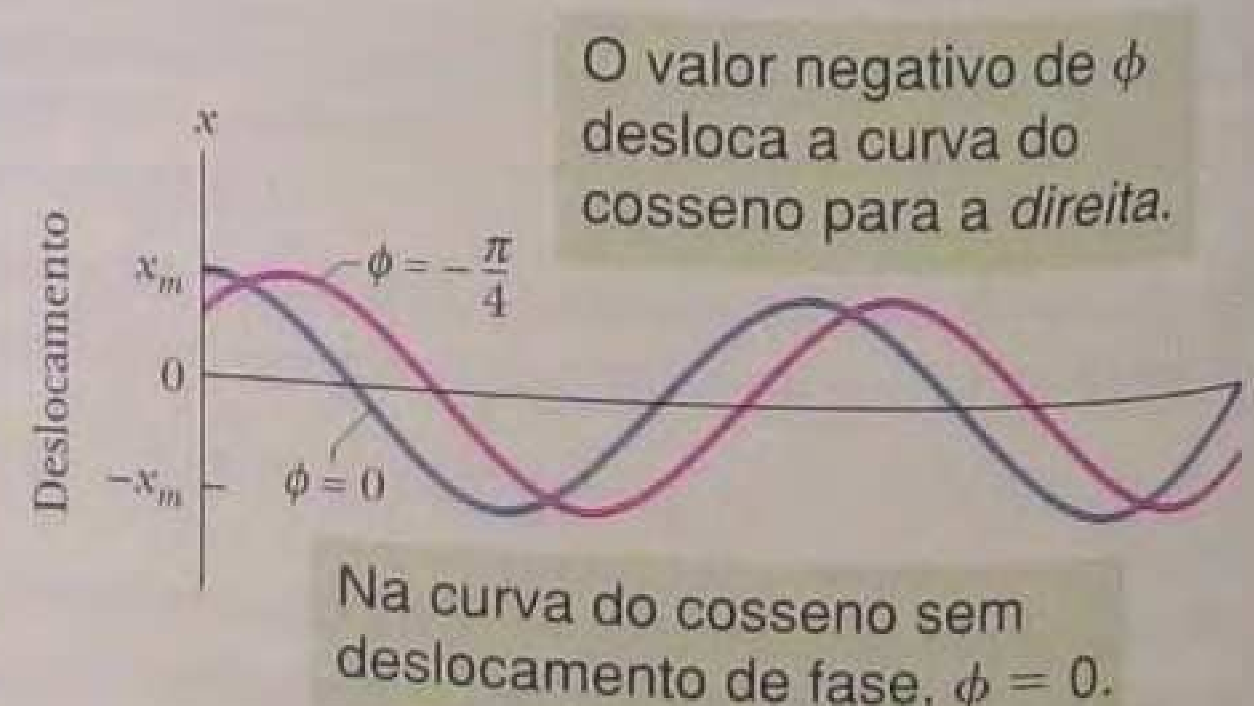


Figura 15-3 Nos três casos, a curva azul é obtida da Eq. 15-3 com $\phi = 0$. (*a*) A curva vermelha difere da curva azul *apenas* pelo fato de que a amplitude x'_m da curva vermelha é maior (os deslocamentos da curva vermelha para cima e para baixo são maiores). (*b*) A curva vermelha difere da curva azul *apenas* pelo fato de que o período da curva vermelha é $T' = T/2$ (a curva vermelha está comprimida horizontalmente). (*c*) A curva vermelha difere da curva azul *apenas* pelo fato de que, para a curva vermelha, $\phi = -\pi/4$ rad em vez de zero (o valor negativo de ϕ desloca a curva para a direita).



TESTE 1

Uma partícula em oscilação harmônica simples de período T (como a da Fig. 15-1) está em $-x_m$ no instante $t = 0$. A partícula está em $-x_m$, em $+x_m$, em 0, entre $-x_m$ e 0 ou entre 0 e $+x_m$ no instante (a) $t = 2{,}00T$, (b) $t = 3{,}50T$ e (c) $t = 5{,}25T$?

A Velocidade do MHS

Derivando a Eq. 15-3, obtemos uma expressão para a velocidade de uma partícula em movimento harmônico simples:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[x_m \cos(\omega t + \phi)]$$

ou

$$v(t) = -\omega x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad \text{(velocidade).} \qquad (15\text{-}6)$$

A Fig. 15-4*a* é um gráfico da Eq. 15-3 com $\phi = 0$. A Fig. 15-4*b* mostra a Eq. 15-6, também com $\phi = 0$. Analogamente à amplitude x_m da Eq. 15-3, a grandeza positiva ωx_m da Eq. 15-6 é chamada de **amplitude da velocidade** v_m. Como se pode ver na Fig. 15-4*b*, a velocidade da partícula em oscilação varia entre $\pm v_m = \pm\omega x_m$. Note também na figura que a curva de $v(t)$ está *deslocada* (para a esquerda) de um quarto de período em relação à curva de $x(t)$; quando o módulo do deslocamento é máximo [isto é, quando $x(t) = x_m$], o módulo da velocidade é mínimo [isto é, $v(t) = 0$]. Quando o módulo do deslocamento é mínimo (isto é, zero), o módulo da velocidade é máximo (isto é, $v_m = \omega x_m$).

A Aceleração do MHS

Conhecendo a velocidade $v(t)$ do movimento harmônico simples, podemos obter uma expressão para a aceleração da partícula derivando a velocidade. Derivando a Eq. 15-6, obtemos:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[-\omega x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)]$$

ou

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(aceleração).} \qquad (15\text{-}7)$$

A Fig. 15-4*c* é um gráfico da Eq. 15-7 para o caso em que $\phi = 0$. A grandeza positiva $\omega^2 x_m$ da Eq. 15-7 é chamada de **amplitude da aceleração** a_m, ou seja, a aceleração da partícula varia entre os limites $\pm a_m = \pm\omega^2 xm$, como mostra a Fig. 15-4*c*.

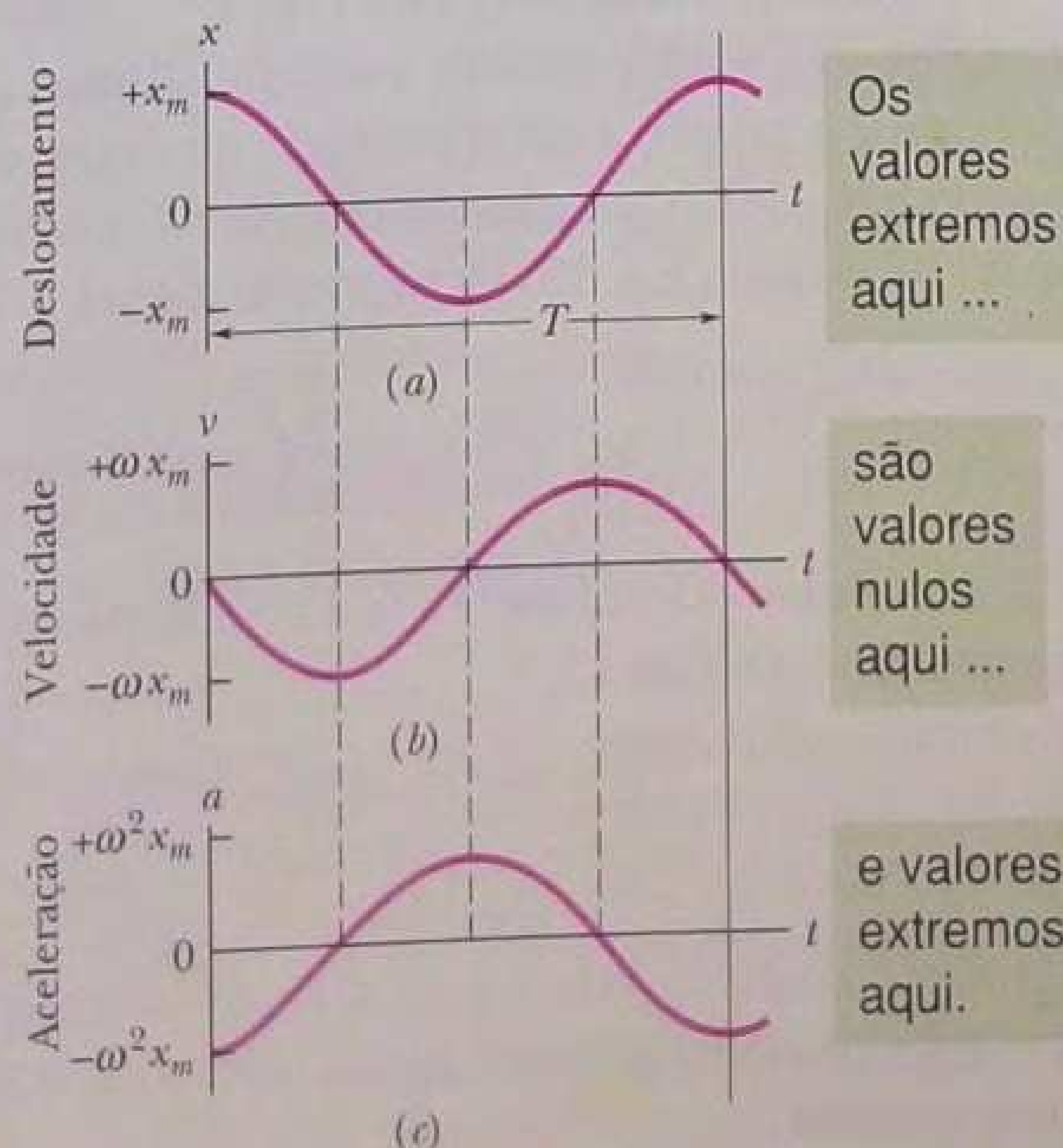


Figura 15-4 (*a*) O deslocamento $x(t)$ de uma partícula oscilando em um MHS com ângulo de fase ϕ igual a zero. O período T corresponde a uma oscilação completa. (*b*) A velocidade $v(t)$ da partícula. (*c*) A aceleração $a(t)$ da partícula.

Observe também que a curva da aceleração $a(t)$ está deslocada (para a esquerda) de $T/4$ em relação à curva da velocidade $v(t)$.

Podemos combinar as Eqs. 15-3 e 15-7 para obter

$$a(t) = -\omega^2 x(t), \tag{15-8}$$

que é a relação característica do movimento harmônico simples:

> No MHS, a aceleração é proporcional ao negativo do deslocamento e as duas grandezas estão relacionadas pelo quadrado da frequência angular.

Assim, como mostra a Fig. 15-4, quando o deslocamento está passando pelo maior valor positivo, a aceleração possui o maior valor negativo e vice-versa. Quando o deslocamento é nulo, a aceleração também é nula.

15-3 A Lei do Movimento Harmônico Simples

Uma vez conhecida a forma como a aceleração de uma partícula varia com o tempo, podemos usar a segunda lei de Newton para determinar qual é a força que deve agir sobre a partícula para que ela adquira essa aceleração. Combinando a segunda lei de Newton com a Eq. 15-8, encontramos, para o movimento harmônico simples, a seguinte relação:

$$F = ma = -(m\omega^2)x. \tag{15-9}$$

Este resultado, uma força restauradora proporcional ao deslocamento, já foi encontrado em outro contexto: é a expressão matemática da lei de Hooke,

$$F = -kx, \tag{15-10}$$

para uma mola, e nesse caso a constante elástica é dada por

$$k = m\omega^2. \tag{15-11}$$

Podemos, na verdade, tomar a Eq. 15-10 como uma definição alternativa do movimento harmônico simples. Em palavras:

> Movimento harmônico simples é o movimento executado por uma partícula sujeita a uma força de módulo proporcional ao deslocamento da partícula e orientada no sentido oposto.

O sistema massa–mola da Fig. 15-5 constitui um **oscilador harmônico linear simples** (ou, simplesmente, oscilador linear); o termo "linear" indica que F é proporcional a x e não a outra potência qualquer de x. A frequência angular ω do movimento harmônico simples do bloco está relacionada à constante elástica k e à massa m do bloco pela Eq. 15-11, segundo a qual

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(frequência angular)}. \tag{15-12}$$

Combinando as Eqs. 15-5 e 15-12, podemos escrever, para o **período** do oscilador linear da Fig. 15-5,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(período)}. \tag{15-13}$$

De acordo com as Eqs. 15-12 e 15-13, uma grande frequência angular (e, portanto, um pequeno período) está associada a uma mola rígida (k elevado) e um bloco leve (m pequeno).

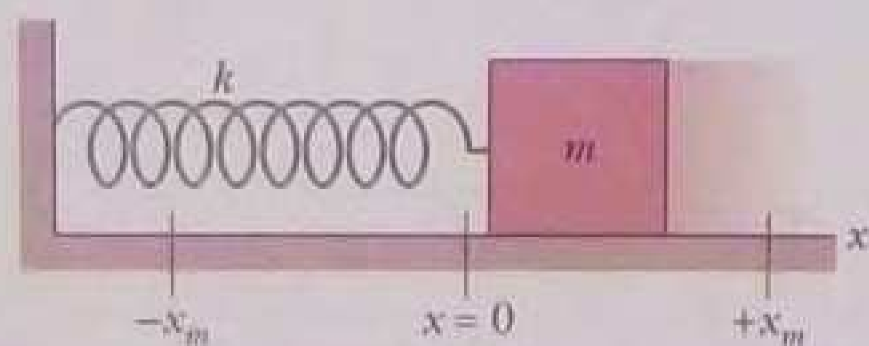


Figura 15-5 Um oscilador harmônico linear simples. Não há atrito com a superfície. Como a partícula da Fig. 15-1, o bloco se move em movimento harmônico simples quando é puxado ou empurrado a partir da posição $x = 0$ e depois liberado. O deslocamento é dado pela Eq. 15-3.

Todo sistema oscilatório, seja ele um trampolim ou uma corda de violino, possui uma certa "elasticidade" e uma certa "inércia" e, portanto, se parece com um oscilador linear. No oscilador linear da Fig. 15-5, esses elementos estão concentrados em partes diferentes do sistema: a elasticidade está inteiramente na mola, cuja massa desprezamos, e a inércia está inteiramente no bloco, cuja elasticidade é ignorada. Em uma corda de violino, porém, os dois elementos estão presentes na corda, como veremos no Capítulo 16.

TESTE 2

Qual das seguintes relações a seguir entre a força F que age obre uma partícula e a posição x da partícula resulta em um movimento harmônico simples: (a) $F = -5x$, (b) $F = -400x^2$, (c) $F = 10x$ ou (d) $F = 3x^2$?

Exemplo

MHS massa–mola: amplitude, aceleração, constante de fase

Um bloco cuja massa m é 680 g está preso a uma mola cuja constante elástica k é 65 N/m. O bloco é puxado sobre uma superfície sem atrito por uma distância $x = 11$ cm a partir da posição de equilíbrio em $x = 0$ e liberado a partir do repouso no instante $t = 0$.

(a) Determine a frequência angular, a frequência e o período do movimento.

IDEIA-CHAVE

O sistema massa–mola é um oscilador harmônico linear simples no qual o bloco executa um MHS.

Cálculos A frequência angular é dada pela Eq. 15-12:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{65\ \text{N/m}}{0{,}68\ \text{kg}}} = 9{,}78\ \text{rad/s}$$

$$\approx 9{,}8\ \text{rad/s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

De acordo com a Eq. 15-5, a frequência é

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9{,}78\ \text{rad/s}}{2\pi\ \text{rad}} = 1{,}56\ \text{Hz} \approx 1{,}6\ \text{Hz.} \quad \text{(Resposta)}$$

De acordo com a Eq. 15-2, o período é

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1{,}56\ \text{Hz}} = 0{,}64\ \text{s} = 640\ \text{ms.} \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Determine a amplitude das oscilações.

IDEIA-CHAVE

Na ausência de atrito, a energia mecânica do sistema massa–mola é conservada.

Raciocínio O bloco é liberado a 11 cm de distância da posição de equilíbrio, com energia cinética nula e o máximo de energia potencial elástica. Assim, o bloco terá energia cinética nula sempre que estiver novamente a 11 cm de distância da posição de equilíbrio, o que significa que jamais se afastará mais que 11 cm de posição de equilíbrio. Assim, a amplitude das oscilações é 11 cm:

$$x_m = 11\ \text{cm.} \qquad \text{(Resposta)}$$

(c) Determine a velocidade máxima v_m do bloco e o local onde se encontra o bloco quando tem essa velocidade.

IDEIA-CHAVE

A velocidade máxima v_m é a amplitude da velocidade ωx_m na Eq. 15-6.

Cálculo Temos:

$$v_m = \omega x_m = (9{,}78\ \text{rad/s})(0{,}11\ \text{m})$$

$$= 1{,}1\ \text{m/s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

A velocidade é máxima quando o bloco está passando pela origem; observe as Figs. 15-4*a* e 15-4*b*, onde se pode constatar que a velocidade é máxima em $x = 0$.

(d) Determine o módulo a_m da aceleração máxima do bloco.

IDEIA-CHAVE

O módulo a_m da aceleração máxima é a amplitude da aceleração $\omega^2 x_m$ na Eq. 15-7.

Cálculo Temos:

$$a_m = \omega^2 x_m = (9{,}78\ \text{rad/s})^2(0{,}11\ \text{m})$$

$$= 11\ \text{m/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

A aceleração é máxima quando o bloco está nas extremidades da trajetória. Nesses pontos, a força que age sobre o bloco possui o módulo máximo; observe as Figs. 15-4*a* e 15-4*c*, onde se pode constatar que o módulo do deslocamento e da aceleração é máximo nos mesmos instantes.

(e) Determine a constante de fase ϕ do movimento?

Cálculos A Eq. 15-3 fornece o deslocamento do bloco em função do tempo. Sabemos que no instante $t = 0$ o bloco está em $x = x_m$. Substituindo essas *condições iniciais*, como são chamadas, na Eq. 15-3 e cancelando x_m, obtemos

$$1 = \cos \phi. \qquad (15\text{-}14)$$

Tomando o inverso da função cosseno, obtemos

$$\phi = 0 \text{ rad.} \qquad \text{(Resposta)}$$

(Qualquer ângulo que seja um múltiplo inteiro de 2π rad também satisfaz a Eq. 15-14; escolhemos o menor ângulo.)

(f) Determine a função deslocamento $x(t)$ do sistema massa–mola.

Cálculo A forma geral da função $x(t)$ é dada pela Eq. 15-3. Substituindo as grandezas conhecidas, obtemos

$$\begin{aligned} x(t) &= x_m \cos(\omega t + \phi) \\ &= (0{,}11 \text{ m}) \cos[(9{,}8 \text{ rad/s})t + 0] \\ &= 0{,}11 \cos(9{,}8t), \qquad \text{(Resposta)} \end{aligned}$$

onde x está em metros e t em segundos.

Exemplo

Cálculo da constante de fase do MHS a partir do deslocamento e da velocidade

Em $t = 0$, o deslocamento $x(0)$ do bloco de um oscilador linear como o da Fig. 15-5 é $-8{,}50$ cm. [Leia $x(0)$ como "x no instante zero".] A velocidade do bloco $v(0)$ nesse instante é $-0{,}920$ m/s e a aceleração $a(0)$ é $+47{,}0$ m/s^2.

(a) Determine a frequência angular ω do sistema.

IDEIA-CHAVE

Se o bloco está executando um MHS, as Eqs. 15-3, 15-6 e 15-7 fornecem o deslocamento, a velocidade e a aceleração, respectivamente, e todas contêm a frequência angular ω.

Cálculos Vamos fazer $t = 0$ nas três equações para ver se uma delas nos fornece o valor de ω. Temos:

$$x(0) = x_m \cos \phi, \qquad (15\text{-}15)$$

$$v(0) = -\omega x_m \operatorname{sen} \phi, \qquad (15\text{-}16)$$

e

$$a(0) = -\omega^2 x_m \cos \phi. \qquad (15\text{-}17)$$

A Eq. 15-15 não contém ω. Nas Eqs. 15-16 e 15-17, conhecemos o valor do lado esquerdo, mas não conhecemos x_m e ϕ. Entretanto, dividindo a Eq. 15-17 pela Eq. 15-15, eliminamos x_m e ϕ e podemos calcular o valor de ω:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{-\frac{a(0)}{x(0)}} = \sqrt{-\frac{47{,}0 \text{ m/s}^2}{-0{,}0850 \text{ m}}} \\ &= 23{,}5 \text{ rad/s.} \qquad \text{(Resposta)} \end{aligned}$$

(b) Determine a constante de fase ϕ e a amplitude x_m das oscilações.

Cálculos: Conhecemos ω e queremos determinar ϕ e x_m. Dividindo a Eq. 15-16 pela Eq. 15-15, eliminamos uma das incógnitas e obtemos uma equação para a outra que envolve uma única função trigonométrica:

$$\frac{v(0)}{x(0)} = \frac{-\omega x_m \operatorname{sen} \phi}{x_m \cos \phi} = -\omega \tan \phi.$$

Explicitando $\tan \phi$, temos:

$$\begin{aligned} \tan \phi &= -\frac{v(0)}{\omega x(0)} = -\frac{-0{,}920 \text{ m/s}}{(23{,}5 \text{ rad/s})(-0{,}0850 \text{ m})} \\ &= -0{,}461. \end{aligned}$$

Essa equação possui duas soluções:

$$\phi = -25° \quad \text{e} \quad \phi = 180° + (-25°) = 155°.$$

Normalmente, apenas a primeira destas soluções é mostrada pelas calculadoras, mas pode não ser uma solução fisicamente possível. Para escolher a solução correta, testamos as duas usando-as para calcular valores da amplitude x_m. De acordo com a Eq. 15-15, para $\phi = -25°$,

$$x_m = \frac{x(0)}{\cos \phi} = \frac{-0{,}0850 \text{ m}}{\cos(-25°)} = -0{,}094 \text{ m}.$$

Para $\phi = 155°$, $x_m = 0{,}094$ m. Como a amplitude do MHS deve ser uma constante positiva, a constante de fase e a amplitude corretas são

$$\phi = 155° \quad \text{e} \quad x_m = 0{,}094 \text{ m} = 9{,}4 \text{ cm.} \qquad \text{(Resposta)}$$

15-4 A Energia do Movimento Harmônico Simples

Vimos no Capítulo 8 que a energia de um oscilador linear é transferida repetidamente de energia cinética para energia potencial e vice-versa, enquanto a soma das duas, a energia mecânica E do oscilador, permanece constante. Vamos agora examinar essa situação em termos quantitativos.

A energia potencial de um oscilador linear como o da Fig. 15-5 está inteiramente associada à mola. Seu valor depende do grau de alongamento ou compressão da mola, ou seja, de $x(t)$. Podemos usar as Eqs. 8-11 e 15-3 para obter a seguinte expressão para a energia potencial:

$$U(t) = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi). \qquad (15\text{-}18)$$

Atenção: a notação $\cos^2 A$ (usada na Eq. 15-18) significa $(\cos A)^2$ e *não é o mesmo* que $\cos A^2$, que significa $\cos(A^2)$.

A energia cinética do sistema da Fig. 15-5 está inteiramente associada ao bloco. Seu valor depende da rapidez com a qual o bloco está se movendo, ou seja, de $v(t)$. Podemos usar a Eq. 15-6 para obter a seguinte expressão para a energia cinética:

$$K(t) = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi). \qquad (15\text{-}19)$$

Usando a Eq. 15-12 para substituir ω^2 por k/m, podemos escrever a Eq. 15-19 na forma

$$K(t) = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}kx_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi). \qquad (15\text{-}20)$$

De acordo com as Eqs. 15-18 e 15-20, a energia mecânica é dada por

$$\begin{aligned} E &= U + K \\ &= \tfrac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \tfrac{1}{2}kx_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) \\ &= \tfrac{1}{2}kx_m^2 [\cos^2(\omega t + \phi) + \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi)]. \end{aligned}$$

Para qualquer ângulo α,

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1.$$

Assim, a grandeza entre colchetes é igual a 1 e temos

$$E = U + K = \tfrac{1}{2}kx_m^2. \qquad (15\text{-}21)$$

Isso mostra que a energia mecânica de um oscilador linear é, de fato, constante e independente do tempo. A energia potencial e a energia cinética de um oscilador linear são mostradas em função do tempo t na Fig. 15-6*a* e em função do deslocamento x na Fig. 15-6*b*.

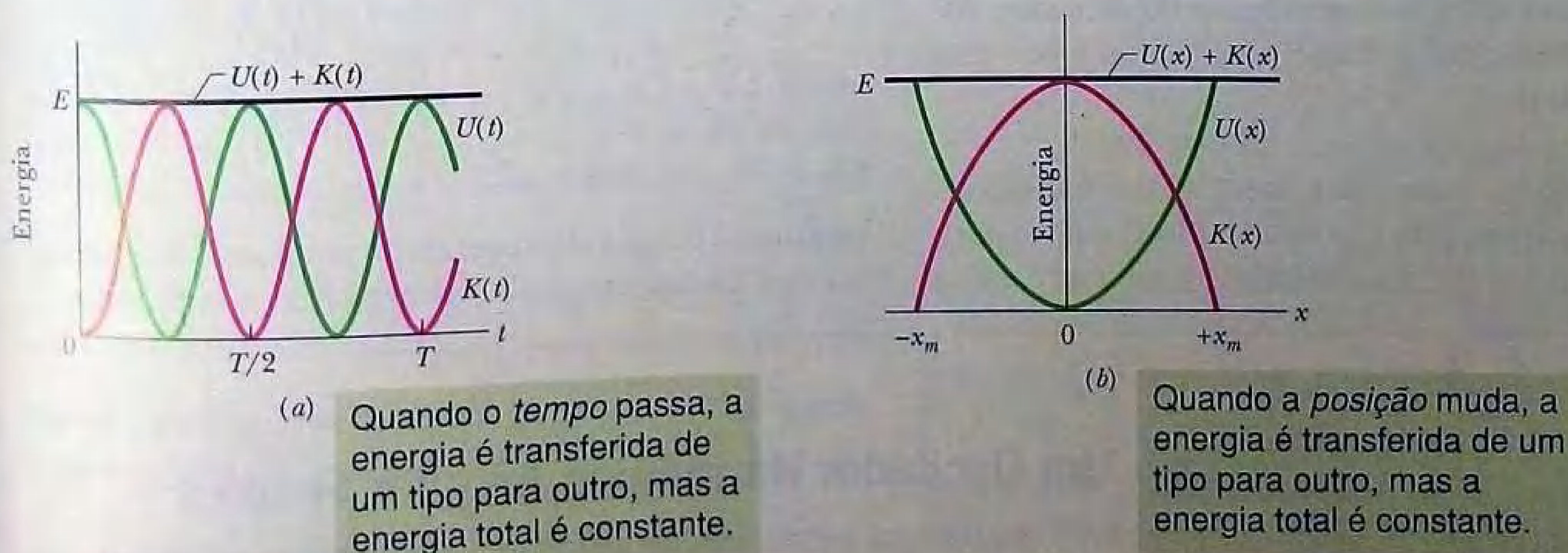


Figura 15-6 (*a*) Energia potencial $U(t)$, energia cinética $K(t)$ e energia mecânica E em função do tempo t para um oscilador harmônico linear. Observe que todas as energias são positivas e que a energia potencial e a energia cinética passam por dois máximos em cada período. (*b*) Energia potencial $U(x)$, energia cinética $K(x)$ e energia mecânica E em função da posição x para um oscilador harmônico linear de amplitude x_m. Para $x = 0$, a energia é toda cinética; para $x = \pm x_m$, é toda potencial.

Agora podemos entender por que um sistema oscilatório normalmente contém um elemento de elasticidade e um elemento de inércia: o primeiro armazena energia potencial e o segundo armazena energia cinética.



TESTE 3

Na Fig. 15-5, o bloco possui uma energia cinética de 3 J e a mola possui uma energia potencial elástica de 2 J quando o bloco está em $x = +2{,}0$ cm. (a) Qual é a energia cinética do bloco quando está em $x = 0$? Qual é a energia potencial elástica da mola quando o bloco está em (b) $x = -2{,}0$ cm e (c) $x = -x_m$?

Exemplo

Energia potencial e energia cinética do MHS: amortecedores de massa

Muitos edifícios altos possuem *amortecedores de massa*, cuja finalidade é evitar que os edifícios oscilem excessivamente por causa do vento. Em muitos casos, o amortecedor é um grande bloco instalado no alto do edifício, que oscila na extremidade de uma mola, movendo-se em um trilho lubrificado. Quando o edifício se inclina em uma direção (para a direita, por exemplo), o bloco se move na mesma direção, mas com um certo retardo, de modo que, quando finalmente oscila para a direita, o edifício está se inclinando para a esquerda. Assim, o movimento do bloco está sempre defasado em relação ao movimento do edifício.

Suponha que o bloco possui uma massa $m = 2{,}72 \times 10^5$ kg e foi projetado para oscilar em uma frequência $f = 10{,}0$ Hz e com uma amplitude $x_m = 20{,}0$ cm.

(a) Qual é a energia mecânica total E do sistema massa–mola?

IDEIA-CHAVE

A energia mecânica E (a soma da energia cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ do bloco com a energia potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$ da mola) é constante durante o movimento do oscilador. Assim, podemos escolher qualquer posição do bloco para calcular o valor de E.

Cálculos Como foi dada a amplitude x_m das oscilações, vamos calcular o valor de E quando o bloco está na posição $x = x_m$ com $v = 0$. Para determinar o valor de U nesse ponto, precisamos calcular primeiro o valor da constante elástica k. De acordo com a Eq. 15-12 ($\omega = \sqrt{k/m}$) e a Eq. 15-5 ($\omega = 2\pi f$), temos:

$$\begin{aligned} k &= m\omega^2 = m(2\pi f)^2 \\ &= (2{,}72 \times 10^5 \text{ kg})(2\pi)^2(10{,}0 \text{ Hz})^2 \\ &= 1{,}073 \times 10^9 \text{ N/m}. \end{aligned}$$

Podemos agora calcular E:

$$\begin{aligned} E &= K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 \\ &= 0 + \tfrac{1}{2}(1{,}073 \times 10^9 \text{ N/m})(0{,}20 \text{ m})^2 \\ &= 2{,}147 \times 10^7 \text{ J} \approx 2{,}1 \times 10^7 \text{ J}. \qquad \text{(Resposta)} \end{aligned}$$

(b) Qual é a velocidade do bloco ao passar pelo ponto de equilíbrio?

Cálculos Estamos interessados em calcular a velocidade no ponto $x = 0$, no qual a energia potencial é $U = \frac{1}{2}kx^2 = 0$ e a energia mecânica total é igual à energia cinética. Sendo assim, podemos escrever

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$2{,}147 \times 10^7 \text{ J} = \tfrac{1}{2}(2{,}72 \times 10^5 \text{ kg})v^2 + 0,$$

ou

$$v = 12{,}6 \text{ m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como nesse ponto toda a energia do sistema foi transferida para energia cinética, essa é a velocidade máxima v_m.

15-5 Um Oscilador Harmônico Angular Simples

A Fig. 15-7 mostra uma versão angular de um oscilador harmônico simples; nesse caso, o elemento de elasticidade está associado à torção de um fio suspenso e não ao alongamento e compressão de uma mola. O dispositivo recebe o nome de **pêndulo de torção**.

Quando fazemos girar o disco da Fig. 15-7, produzindo um deslocamento angular θ a partir da posição de equilíbrio (na qual a reta de referência está em $\theta = 0$), e o liberamos, o disco passa a oscilar em torno dessa posição em um **movimento**

harmônico angular simples. A rotação do disco de um ângulo θ em qualquer sentido produz um torque restaurador dado por

$$\tau = -\kappa\theta. \tag{15-22}$$

onde κ (letra grega *capa*) é uma constante, a chamada **constante de torção**, que depende do comprimento e diâmetro do fio e do material de que é feito.

A comparação da Eq. 15-22 com a Eq. 15-10 nos leva a suspeitar que a Eq. 15-22 é a forma angular da lei de Hooke e que podemos transformar a Eq. 15-13, que fornece o período do MHS linear, na equação para o período do MHS angular: substituímos a constante elástica k na Eq. 15-13 pela constante equivalente, a constante κ da Eq. 15-22, e substituímos a massa m da Eq. 15-13 pela grandeza equivalente, o momento de inércia I do disco. Essas substituições levam a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad \text{(pêndulo de torção).} \tag{15-23}$$

que é a equação correta para o período de um oscilador harmônico angular simples ou pêndulo de torção.

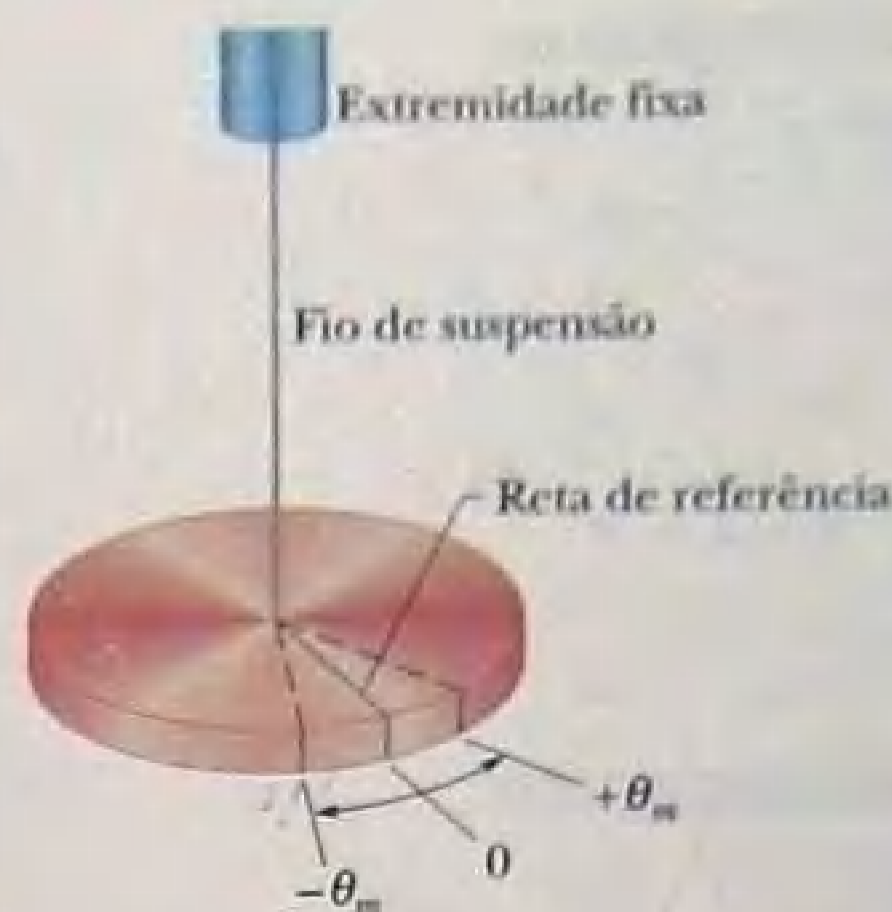


Figura 15-7 O pêndulo de torção é a versão angular do oscilador harmônico linear simples. O disco oscila em um plano horizontal; a reta de referência oscila com amplitude angular θ_m. A torção do fio de suspensão armazena energia potencial de forma semelhante a uma mola e produz o torque restaurador.

Exemplo

Momento de inércia e período de um oscilador harmônico angular simples

A Fig. 15-8*a* mostra uma barra fina cujo comprimento L é 12,4 cm e cuja massa m é 135 g, suspensa em fio longo pelo ponto médio. O período T_a do MHS angular da barra é medido como 2,53 s. Um objeto de forma irregular, que vamos chamar de objeto X, é pendurado no mesmo fio, como na Fig. 15-8*b*, e o período T_b é medido como 4,76 s. Qual é o momento de inércia do objeto X em relação ao eixo de suspensão?

IDEIA-CHAVE

O momento de inércia tanto da barra quanto do objeto X está relacionado ao período através da Eq. 15-23.

Cálculos Na Tabela 10-2*e*, o momento de inércia de uma barra em torno de um eixo perpendicular passando pelo ponto médio é dado por $\frac{1}{12}mL^2$. Assim, para a barra da Fig. 15-8*a*, temos:

$$I_a = \tfrac{1}{12}mL^2 = (\tfrac{1}{12})(0{,}135\text{ kg})(0{,}124\text{ m})^2$$
$$= 1{,}73 \times 10^{-4}\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Vamos agora escrever a Eq. 15-23 duas vezes, uma para a barra e outra para o objeto X:

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{I_a}{\kappa}} \quad \text{e} \quad T_b = 2\pi\sqrt{\frac{I_b}{\kappa}}.$$

A constante κ, que é uma propriedade do fio, é a mesma nos dois casos; apenas os períodos e os momentos de inércia são diferentes.

Vamos elevar as duas equações ao quadrado, dividir a segunda pela primeira e explicitar I_b na equação resultante. O resultado é o seguinte:

$$I_b = I_a\frac{T_b^2}{T_a^2} = (1{,}73 \times 10^{-4}\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\frac{(4{,}76\text{ s})^2}{(2{,}53\text{ s})^2}$$
$$= 6{,}12 \times 10^{-4}\text{ kg}\cdot\text{m}^2. \quad \text{(Resposta)}$$

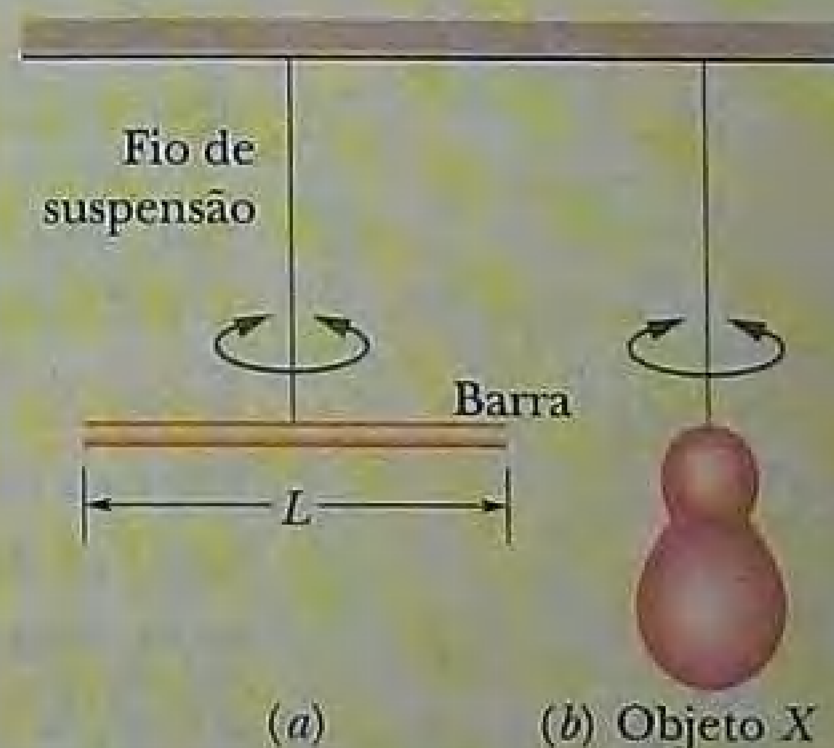


Figura 15-8 Dois pêndulos de torção, compostos (a) por um fio e uma barra e (*b*) pelo mesmo fio e um objeto de forma irregular.

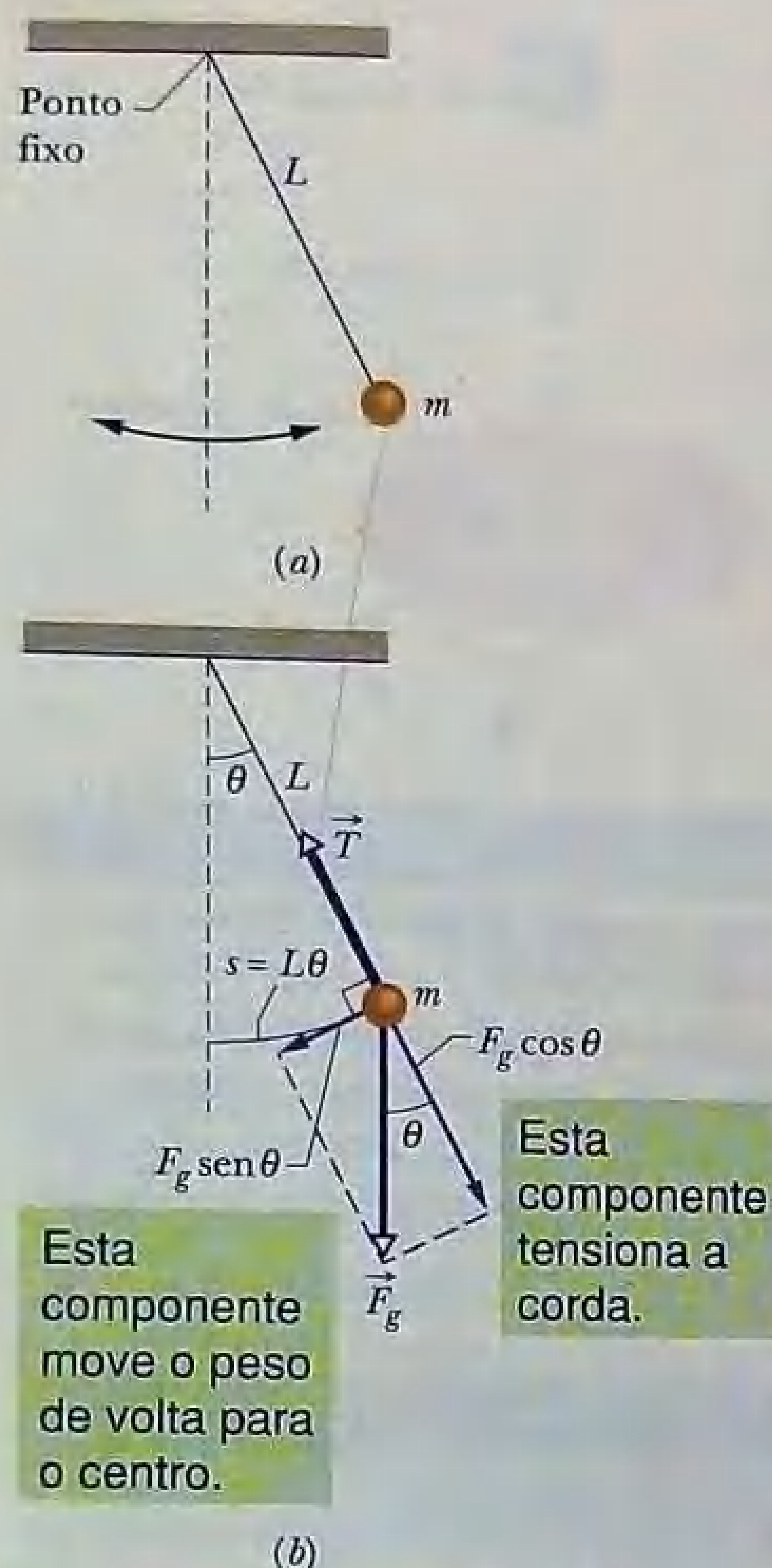


Figura 15-9 (*a*) Um pêndulo simples. (*b*) As forças que agem sobre o peso são a força gravitacional $\vec{F}_g$ e a tensão $\vec{T}$ do fio. A componente tangencial F_g sen θ da força gravitacional é a força restauradora que tende a levar o pêndulo de volta para a posição central.

15-6 Pêndulos

Voltamos agora nossa atenção para uma classe de osciladores harmônicos simples nos quais a força de retorno está associada à gravitação e não às propriedades elásticas de um fio ou de uma mola.

O Pêndulo Simples

Se uma maçã é posta para balançar na extremidade de um fio longo, ela descreve um movimento harmônico simples? Caso a resposta seja afirmativa, qual é o período T do movimento? Para responder a essas perguntas, considere um **pêndulo simples**, composto por uma partícula de massa m (chamada de *peso* do pêndulo) suspensa por uma das extremidades de um fio inextensível, de massa desprezível e comprimento L, cuja outra extremidade está fixa, como na Fig. 15-9*a*. O peso está livre para oscilar no plano do papel, para a esquerda e para a direita de uma reta vertical que passa pelo ponto fixo do fio.

As forças que agem sobre o peso são a tração $\vec{T}$ exercida pelo fio e a força gravitacional $\vec{F}_g$, como mostra a Fig. 15-9*b*, onde o fio faz um ângulo θ com a vertical. Decompomos $\vec{F}_g$ em uma componente radial $F_g \cos\theta$ e uma componente F_g sen θ que é tangente à trajetória do peso. A componente tangencial produz um torque restaurador em relação ao ponto fixo do pêndulo porque sempre age no sentido oposto ao do deslocamento do peso, tendendo a levá-lo de volta ao ponto central. O ponto central ($\theta = 0$) é chamado de *posição de equilíbrio* porque o pêndulo ficaria em repouso neste ponto se parasse de oscilar.

De acordo com a Eq. 10-41 ($\tau = r_\perp F$), o torque restaurador pode ser escrito na forma

$$\tau = -L(F_g \operatorname{sen}\theta), \tag{15-24}$$

em que o sinal negativo indica que o torque age no sentido de reduzir θ e L é o braço de alavanca da componente F_g sen θ da força gravitacional em relação ao ponto fixo do pêndulo. Substituindo a Eq. 15-24 na Eq. 10-44 ($\tau = I\alpha$) e substituindo o módulo de $\vec{F}_g$ por mg, obtemos

$$-L(mg \operatorname{sen}\theta) = I\alpha, \tag{15-25}$$

em que I é o momento de inércia do pêndulo em relação ao ponto fixo e α é a aceleração angular do pêndulo em relação a esse ponto.

Podemos simplificar a Eq. 15-25 supondo que o ângulo θ é pequeno, pois nesse caso podemos substituir sen θ por θ (expresso em radianos). (Por exemplo: se θ = 5,00° = 0,0873 rad, sen θ = 0,0872, uma diferença de apenas 0,1%.) Usando essa aproximação e explicitando α, obtemos

$$\alpha = -\frac{mgL}{I}\,\theta. \tag{15-26}$$

A Eq. 15-26 é o equivalente angular da Eq. 15-8, a relação característica do MHS. Ela nos diz que a aceleração angular α do pêndulo é proporcional ao deslocamento angular θ com o sinal oposto. Assim, quando o peso do pêndulo se move para a direita, como na Fig. 15-9*a*, a aceleração *para a esquerda* aumenta até o peso parar e começar a se mover para a esquerda. Quando o peso está à esquerda da posição de equilíbrio, a aceleração para a direita tende a fazê-lo voltar para a direita e assim por diante, o que produz um MHS. Mais precisamente, o movimento de um *pêndulo simples no qual o ângulo de deslocamento é sempre pequeno* pode ser aproximado por um MHS. Podemos expressar esta restrição de outra forma: a **amplitude angular** θ_m do movimento (o ângulo máximo de deslocamento) deve ser pequena.

Comparando as Eqs. 15-26 e 15-8, notamos que a frequência angular do pêndulo é $\omega = \sqrt{mgL/I}$. Substituindo esta expressão de ω na Eq. 15-5 ($\omega = 2\pi/T$), vemos que o período do pêndulo pode ser escrito como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}. \tag{15-27}$$

Toda a massa de um pêndulo simples está concentrada na massa m do peso do pêndulo, que está a uma distância L do ponto fixo. Assim, podemos usar a Eq. 10-33 ($I = mr^2$) para escrever $I = mL^2$ como o momento de inércia do pêndulo. Substituindo este valor na Eq. 15-27 e simplificando, obtemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{(pêndulo simples, pequena amplitude).} \tag{15-28}$$

Neste capítulo, vamos supor que os ângulos de oscilação do pêndulo são sempre pequenos.

O Pêndulo Físico

Ao contrário do pêndulo simples, um pêndulo real, frequentemente chamado de **pêndulo físico**, pode ter uma distribuição complicada de massa. Um pêndulo físico também executa um MHS? Caso a resposta seja afirmativa, qual é o período?

A Fig. 15-10 mostra um pêndulo físico arbitrário deslocado de um ângulo θ em relação à posição de equilíbrio. A força gravitacional $\vec{F}_g$ está aplicada ao centro de massa C, a uma distância h do ponto fixo O. Comparando as Figs. 15-10 e 15-9*b*, vemos que existe apenas uma diferença importante entre um pêndulo físico arbitrário e um pêndulo simples. No caso do pêndulo físico, o braço de alavanca da componente restauradora F_g sen θ da força gravitacional é h e não o comprimento L do fio. Sob todos os outros aspectos, a análise do pêndulo físico é idêntica à análise do pêndulo simples até a Eq. 15-27. Assim, para pequenos valores de θ_m, o movimento é, aproximadamente, um MHS.

Substituindo L por h na Eq. 15-27, podemos escrever o período como

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad \text{(pêndulo físico, pequena amplitude).} \tag{15-29}$$

Como no pêndulo simples, I é o momento de inércia do pêndulo em relação ao ponto O. Embora I não seja mais igual a mL^2 (pois depende da forma do pêndulo físico), ainda é proporcional a m.

Um pêndulo físico não oscila se o ponto fixo é o centro de massa. Formalmente, isso corresponde a fazer $h = 0$ na Eq. 15-29. Nesse caso, temos $T = \infty$, o que significa que o pêndulo jamais chega a completar uma oscilação.

A todo pêndulo físico com um ponto fixo O que oscila com um período T corresponde um pêndulo simples de comprimento L_0 com o mesmo período T. Podemos usar a Eq. 15-28 para calcular o valor de L_0. O ponto do pêndulo físico que fica a uma distância L_0 do ponto O é chamado de *centro de oscilação* do pêndulo físico para o ponto de suspensão dado.

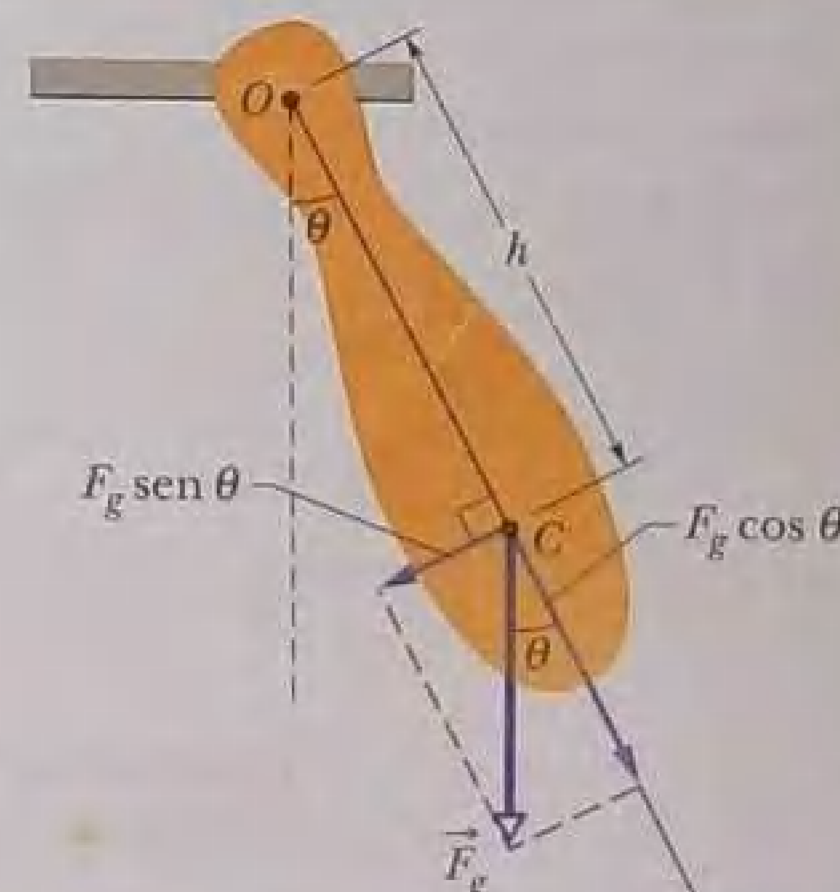


Figura 15-10 Um pêndulo físico. O torque restaurador é hF_g sen θ. Quando $\theta = 0$, o centro de massa C está situado diretamente abaixo do ponto de suspensão O.

Medição de g

Podemos usar um pêndulo físico para medir a aceleração de queda livre g em um ponto da superfície da Terra. (Milhares de medições deste tipo foram feitas como parte de estudos geofísicos.)

Para analisar um caso simples, tome o pêndulo como uma barra homogênea de comprimento L suspensa por uma das extremidades. Para essa configuração, h da Eq. 15-29, a distância entre o ponto fixo e o centro de massa, é $L/2$. De acordo com a Tabela 10-2*e*, o momento de inércia desse pêndulo em relação a um eixo perpendicular à barra passando pelo centro de massa é $\frac{1}{12}mL^2$. Aplicando o teorema dos eixos paralelos da Eq. 10-36 ($I = I_{CM} + Mh^2$), descobrimos que o momento de inércia em relação a um eixo perpendicular passando por uma das extremidades da barra é

$$I = I_{CM} + mh^2 = \tfrac{1}{12}mL^2 + m(\tfrac{1}{2}L)^2 = \tfrac{1}{3}mL^2. \tag{15-30}$$

Fazendo $h = L/2$ e $I = mL^2/3$ na Eq. 15-29 e explicitando g, obtemos

$$g = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}. \tag{15-31}$$

Assim, medindo L e o período T, podemos determinar o valor de g no local onde se encontra o pêndulo. (Para medidas de precisão, são necessários alguns refinamentos, como colocar o pêndulo em uma câmara evacuada.)

TESTE 4

Três pêndulos físicos, de massas m_0, $2m_0$ e $3m_0$, têm a mesma forma e tamanho e estão suspensos pelo mesmo ponto. Ordene as massas de acordo com o período de oscilação do pêndulo, começando pelo maior.

Exemplo

Período e comprimento de um pêndulo físico

Na Fig. 15-11a, uma régua de um metro oscila em torno de um ponto fixo em uma das extremidades, a uma distância h do centro de massa da régua.

(a) Qual é o período de oscilação T?

IDEIA-CHAVE

A régua não é um pêndulo simples porque a massa não está concentrada na extremidade oposta ao ponto fixo; a régua é, portanto, um pêndulo físico.

Cálculos O período de um pêndulo físico é dado pela Eq. 15-29, que exige o conhecimento do momento de inércia da régua em relação ao ponto fixo. Vamos tratar a régua como uma barra uniforme de comprimento L e massa m. Nesse caso, de acordo com a Eq. 15-30, $I = \frac{1}{3}mL^2$, a distância h da Eq. 15-29 é $I/2$. Substituindo esses valores na Eq. 15-29, obtemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg(\frac{1}{2}L)}} \tag{15-32}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \tag{15-33}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{(2)(1{,}00\text{ m})}{(3)(9{,}8\text{ m/s}^2)}} = 1{,}64\text{ s.} \quad \text{(Resposta)}$$

Observe que o resultado não depende da massa m do pêndulo.

(b) Qual é a distância L_0 entre o ponto fixo O da régua e o centro de oscilação?

Cálculos Estamos interessados em determinar o comprimento L_0 do pêndulo simples (desenhado na Fig. 15-11b)

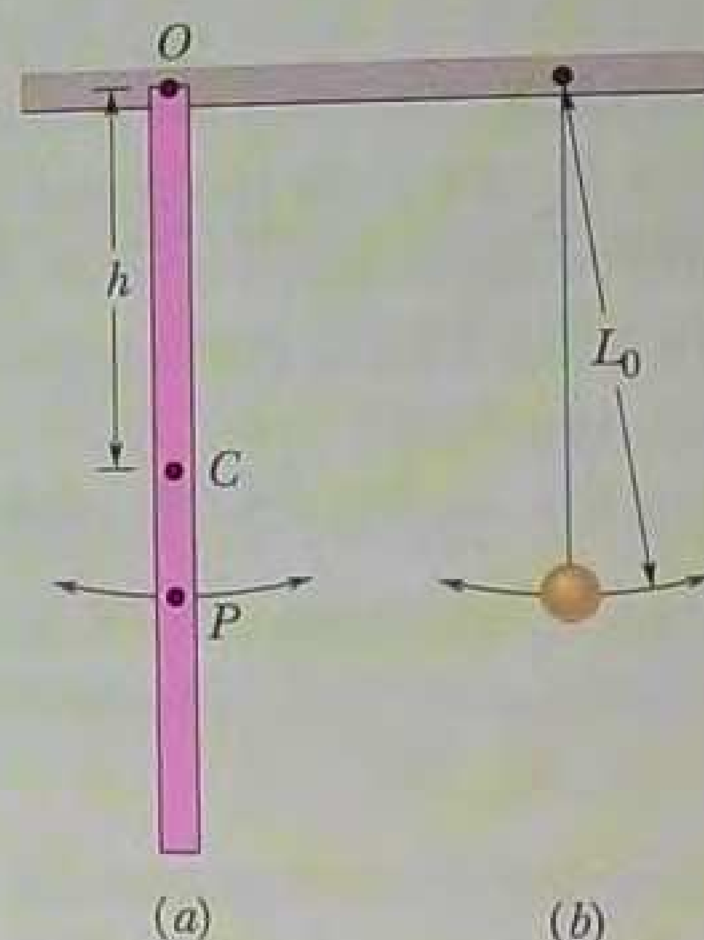


Figura 15-11 (a) Uma régua de um metro suspensa por uma das extremidades para formar um pêndulo físico. (b) Um pêndulo simples cujo comprimento L_0 é escolhido para que os períodos dos dois pêndulos sejam iguais. O ponto P do pêndulo (a) é o centro de oscilação.

que possui o mesmo período que o pêndulo físico (a régua) da Fig. 15-11a. Igualando as Eqs. 15-28 e 15-33, obtemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_0}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}. \tag{15-34}$$

Podemos ver, por inspeção, que

$$L_0 = \tfrac{2}{3}L \tag{15-35}$$

$$= (\tfrac{2}{3})(100\text{ cm}) = 66{,}7\text{ cm.} \quad \text{(Resposta)}$$

Na Fig. 15-11a, o ponto P está a essa distância do ponto fixo O. Assim, o ponto P é o centro de oscilação da barra para o ponto fixo dado. A posição do ponto P seria diferente se a régua estivesse suspensa por outro ponto.

15-7 Movimento Harmônico Simples e Movimento Circular Uniforme

Em 1610, usando o telescópio que acabara de construir, Galileu descobriu os quatro maiores satélites de Júpiter. Após algumas semanas de observação, constatou que os satélites estavam se deslocando de um lado para outro do planeta no que hoje chamaríamos de movimento harmônico simples; o ponto médio do movimento estava na posição do planeta. O registro das observações de Galileu, escrito de próprio punho, chegou aos nossos dias. A. P. French, do MIT, usou os dados colhidos por Galileu para determinar a posição da lua Calisto em relação a Júpiter. Nos resultados mostrados na Fig. 15-12, os pontos são baseados nas observações de Galileu e a curva representa um ajuste aos dados. A curva sugere que o movimento do satélite pode ser descrito aproximadamente pela Eq. 15-3, a função do MHS. De acordo com o gráfico, o período do movimento é de 16,8 dias.

Na realidade, Calisto se move com velocidade praticamente constante em uma órbita quase circular em torno de Júpiter. O verdadeiro movimento não é um movimento harmônico simples e sim um movimento circular uniforme. O que Galileu viu, e que o leitor pode ver com um bom binóculo e um pouco de paciência, foi a projeção do movimento circular uniforme em uma reta situada no plano do movimento. As notáveis observações de Galileu nos levam à conclusão de que o movimento harmônico simples é o movimento circular uniforme visto de perfil. Em uma linguagem mais formal:

> O movimento harmônico simples é a projeção do movimento circular uniforme em um diâmetro da circunferência ao longo da qual acontece o movimento circular.

A Fig. 15-13*a* mostra um exemplo. Uma *partícula de referência P'* executa um movimento circular uniforme com velocidade angular ω (constante) em uma *circunferência de referência*. O raio x_m da circunferência é o módulo do vetor posição da partícula. Em um instante t, a posição angular da partícula é $\omega t + \phi$, onde ϕ é a posição angular no instante $t = 0$.

A projeção da partícula P' no eixo x é um ponto P, que consideramos como uma segunda partícula. A projeção do vetor posição da partícula P' no eixo x fornece a localização $x(t)$ de P. Assim, temos:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi), \tag{15-36}$$

que é exatamente a Eq. 15-3. Nossa conclusão está correta. Se a partícula de referência P' executa um movimento circular uniforme, sua projeção, a partícula projetada P, executa um movimento harmônico simples em um diâmetro do círculo.

A Fig. 15-13*b* mostra a velocidade $\vec{v}$ da partícula de referência. De acordo com a Eq. 10-18 ($v = \omega r$), o módulo do vetor velocidade é ωx_m; sua projeção no eixo x é

$$v(t) = -\omega x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \tag{15-37}$$

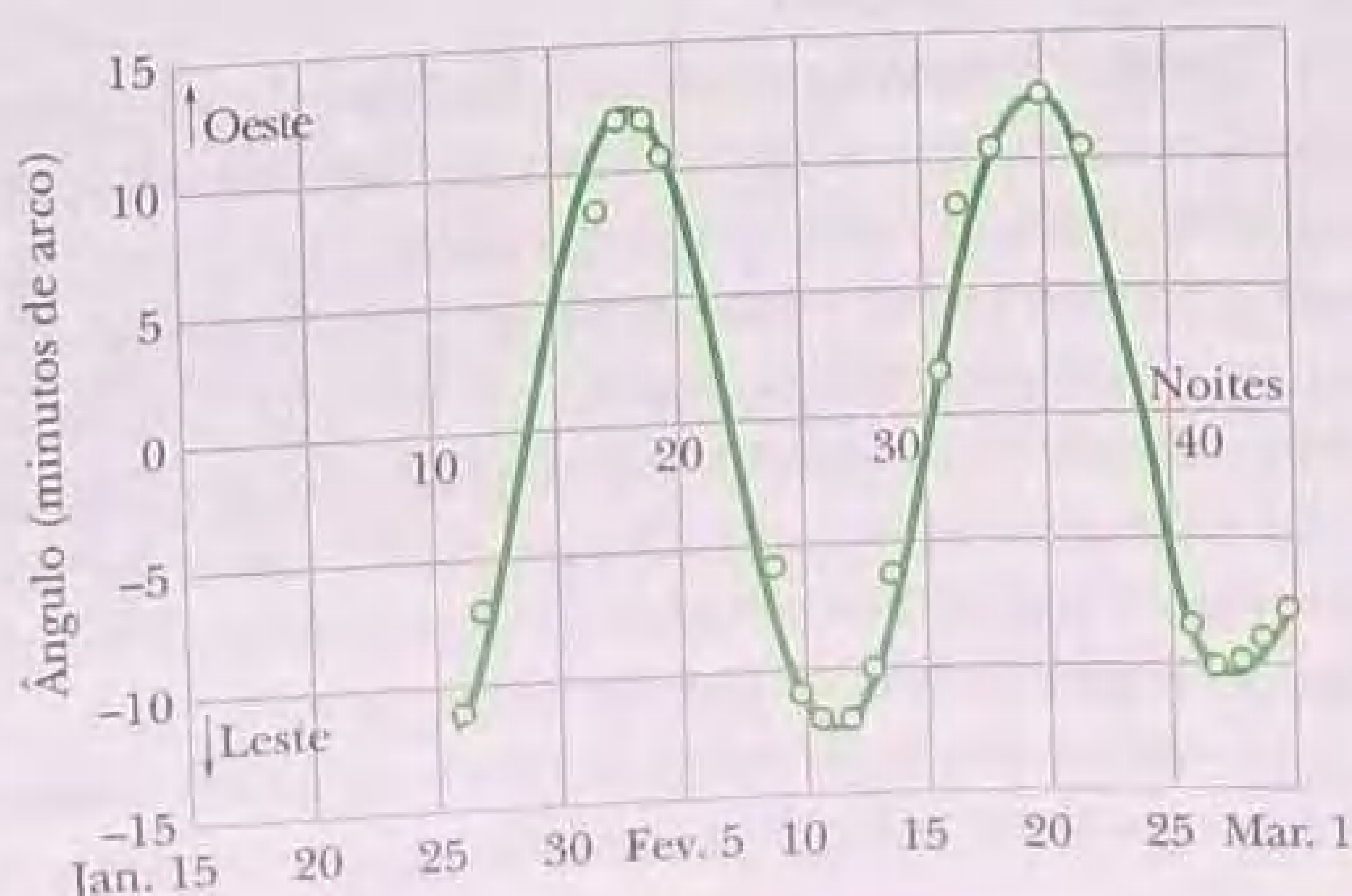


Figura 15-12 O ângulo entre Júpiter e o satélite Calisto do ponto de vista da Terra. Os pontos se baseiam nas observações de Galileu em 1610 e a curva representa um ajuste aos dados, que sugere um movimento harmônico simples. Para a distância média entre Júpiter e a Terra, 10 minutos de arco correspondem a cerca de 2×10^6 km. (Adaptado de A. P. French, *Newtonian Mechanics*, W.W. Norton & Company, New York, 1971, p. 288.)

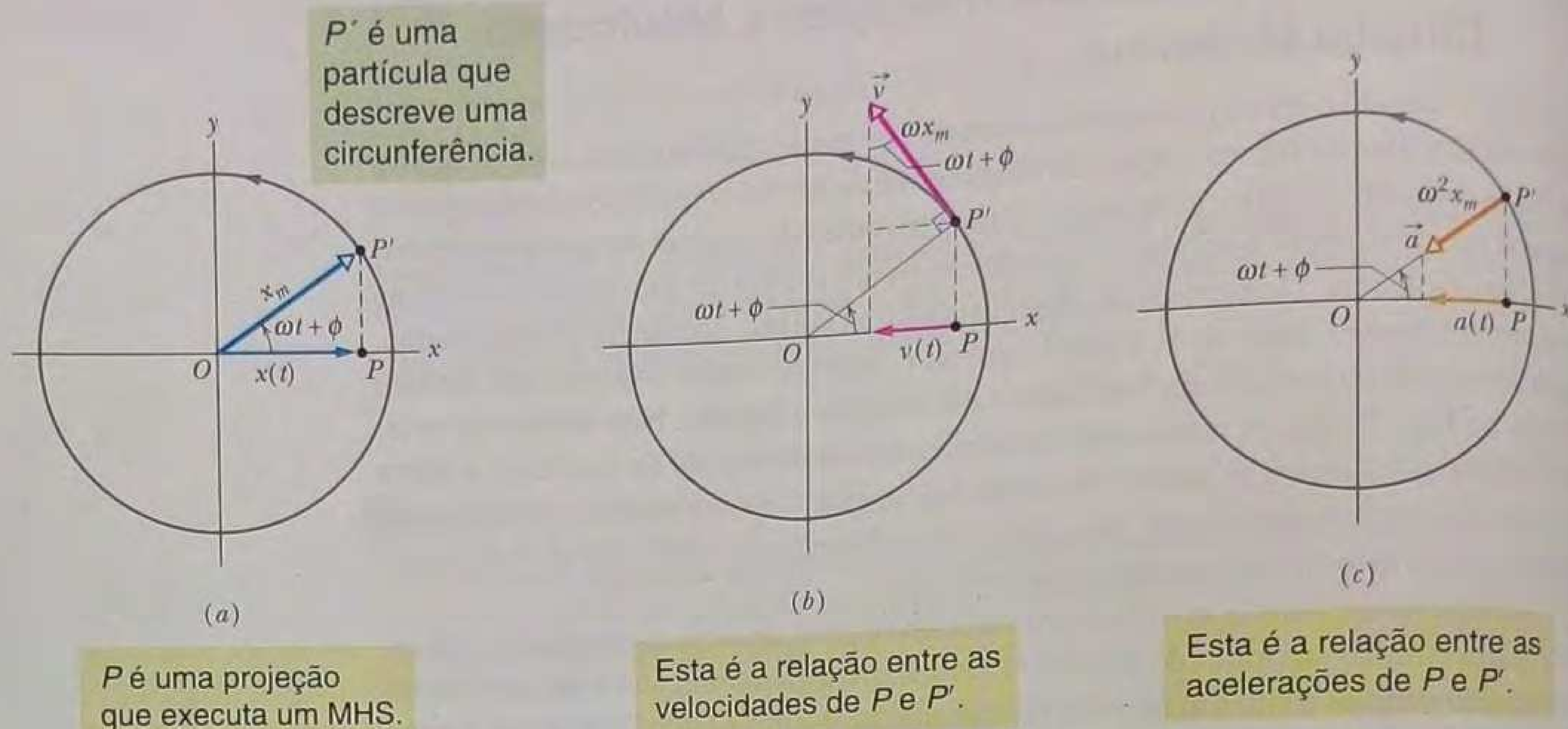


Figura 15-13 (*a*) Uma partícula de referência P' descrevendo um movimento circular uniforme em uma circunferência de raio x_m. A projeção P da posição da partícula no eixo x executa um movimento harmônico simples. (*b*) A projeção da velocidade $\vec{v}$ da partícula de referência é a velocidade do MHS. (*c*) A projeção da aceleração radial $\vec{a}$ da partícula de referência é a aceleração do MHS.

que é exatamente a Eq. 15-6. O sinal negativo aparece porque a componente da velocidade de P na Fig. 15-13*b* aponta para a esquerda, no sentido negativo do eixo x.

A Fig. 15-13*c* mostra a aceleração radial $\vec{a}$ da partícula de referência. De acordo com a Eq. 10-23 ($a_r = \omega^2 r$), o módulo do vetor aceleração radial é $\omega^2 x_m$; sua projeção no eixo x é

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi), \tag{15-38}$$

que é exatamente a Eq. 15-7. Assim, tanto para o deslocamento como para a velocidade e para a aceleração, a projeção do movimento circular uniforme é de fato um movimento harmônico simples.

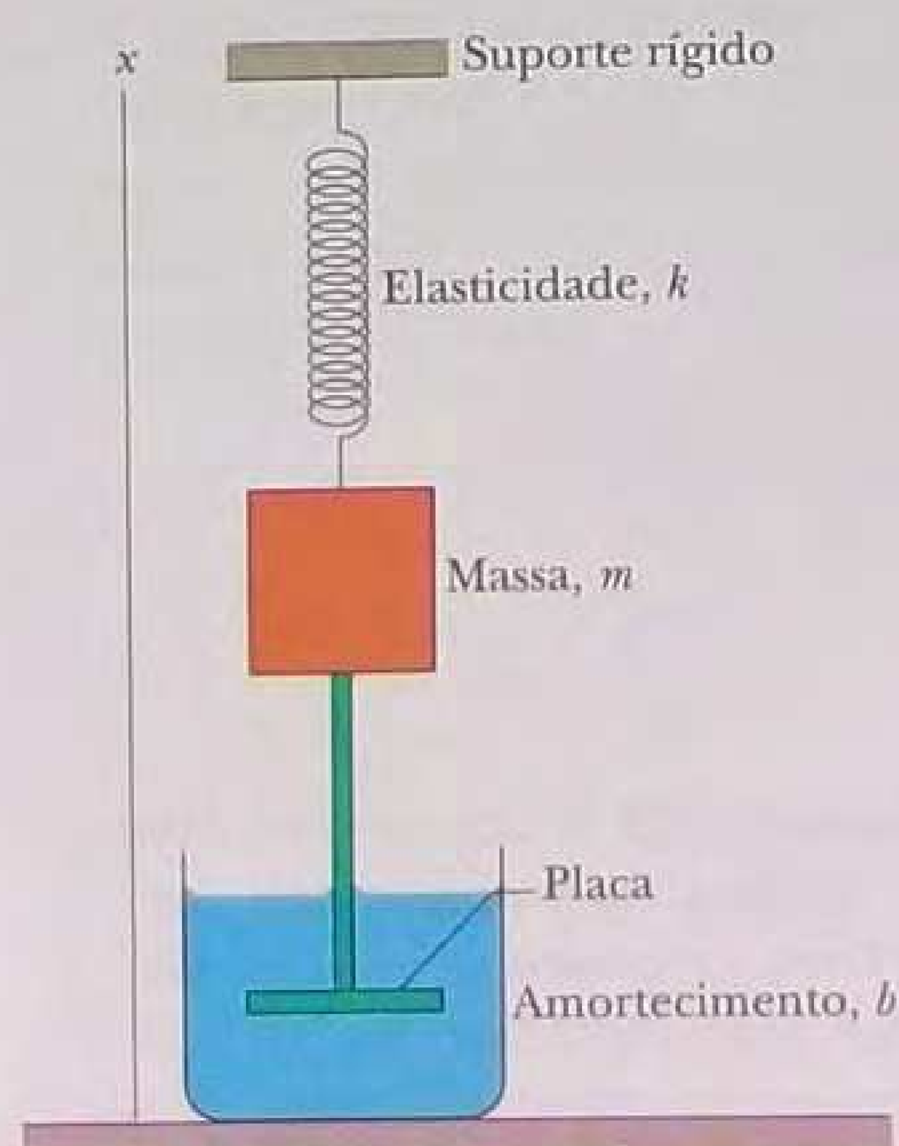


Figura 15-14 Um oscilador harmônico simples amortecido ideal. Uma placa imersa em um líquido exerce uma força de amortecimento sobre o bloco enquanto o bloco oscila paralelamente ao eixo x.

15-8 Movimento Harmônico Simples Amortecido

Um pêndulo oscila apenas por um curto período de tempo debaixo d'água, pois a água exerce sobre o pêndulo uma força de arrasto que elimina rapidamente o movimento. Um pêndulo oscilando no ar funciona melhor, mas, ainda assim, o movimento ocorre durante um tempo limitado, porque o ar exerce uma força de arrasto sobre o pêndulo (e uma força de atrito age no ponto de sustentação), roubando energia do movimento do pêndulo.

Quando o movimento de um oscilador é reduzido por uma força externa, dizemos que o oscilador e seu movimento são **amortecidos**. Um exemplo idealizado de um oscilador amortecido é mostrado na Fig. 15-14, na qual um bloco de massa m oscila verticalmente preso a uma mola de constante elástica k. Uma barra liga o bloco a uma placa horizontal imersa em um líquido. Vamos supor que a barra e a placa têm massa desprezível. Quando a placa se move para cima e para baixo, o líquido exerce uma força de arrasto sobre ela e, portanto, sobre todo o sistema. A energia mecânica do sistema massa–mola diminui com o tempo, à medida que a energia é transferida para energia térmica do líquido e da placa.

Vamos supor que o líquido exerce uma **força de amortecimento** $\vec{F}_a$ proporcional à velocidade $\vec{v}$ da placa e do bloco (uma hipótese que constitui uma boa aproxi-

mação se a placa se move lentamente). Nesse caso, para componentes ao longo do eixo x na Fig. 15-14, temos:

$$F_a = -bv, \tag{15-39}$$

onde b é uma **constante de amortecimento** que depende das características tanto da placa como do líquido e tem unidades de quilograma por segundo no SI. O sinal negativo indica que $\vec{F}_a$ se opõe ao movimento.

A força exercida pela mola sobre o bloco é $F_m = -kx$. Vamos supor que a força gravitacional a que o bloco está submetido é desprezível em comparação com F_a e F_m. Nesse caso, podemos escrever a segunda lei de Newton para as componentes ao longo do eixo x ($F_{res,x} = ma_x$) como

$$-bv - kx = ma. \tag{15-40}$$

Substituindo v por dx/dt, a por d^2x/dt^2 e reagrupando os termos, obtemos a equação diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0, \tag{15-41}$$

cuja solução é

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi), \tag{15-42}$$

onde x_m é a amplitude e ω' é a frequência angular do oscilador amortecido. A frequência angular é dada por

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \tag{15-43}$$

Se $b = 0$ (na ausência de amortecimento), a Eq. 15-43 se reduz à Eq. 15-12 ($\omega = \sqrt{k/m}$) para a frequência angular de um oscilador não amortecido e a Eq. 15-42 se reduz à Eq. 15-3 para o deslocamento de um oscilador não amortecido. Se a constante de amortecimento é pequena, mas diferente de zero (de modo que $b \ll \sqrt{km}$), $\omega' \approx \omega$.

Podemos considerar a Eq. 15-42 como uma função cosseno cuja amplitude, dada por $x_m e^{-bt/2m}$, diminui gradualmente com o tempo, como mostra a Fig. 15-15. Para um oscilador não amortecido, a energia mecânica é constante e é dada pela Eq. 15-21 ($E = \frac{1}{2}kx_m^2$). Se o oscilador é amortecido, a energia mecânica não é constante e diminui com o tempo. Se o amortecimento é pequeno, podemos determinar $E(t)$ substituindo x_m na Eq. 15-21 por $x_m e^{-bt/2m}$, a amplitude das oscilações amortecidas. Fazendo isso, obtemos a equação

$$E(t) \approx \tfrac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m}, \tag{15-44}$$

que nos diz que, como a amplitude, a energia mecânica diminui exponencialmente com o tempo.

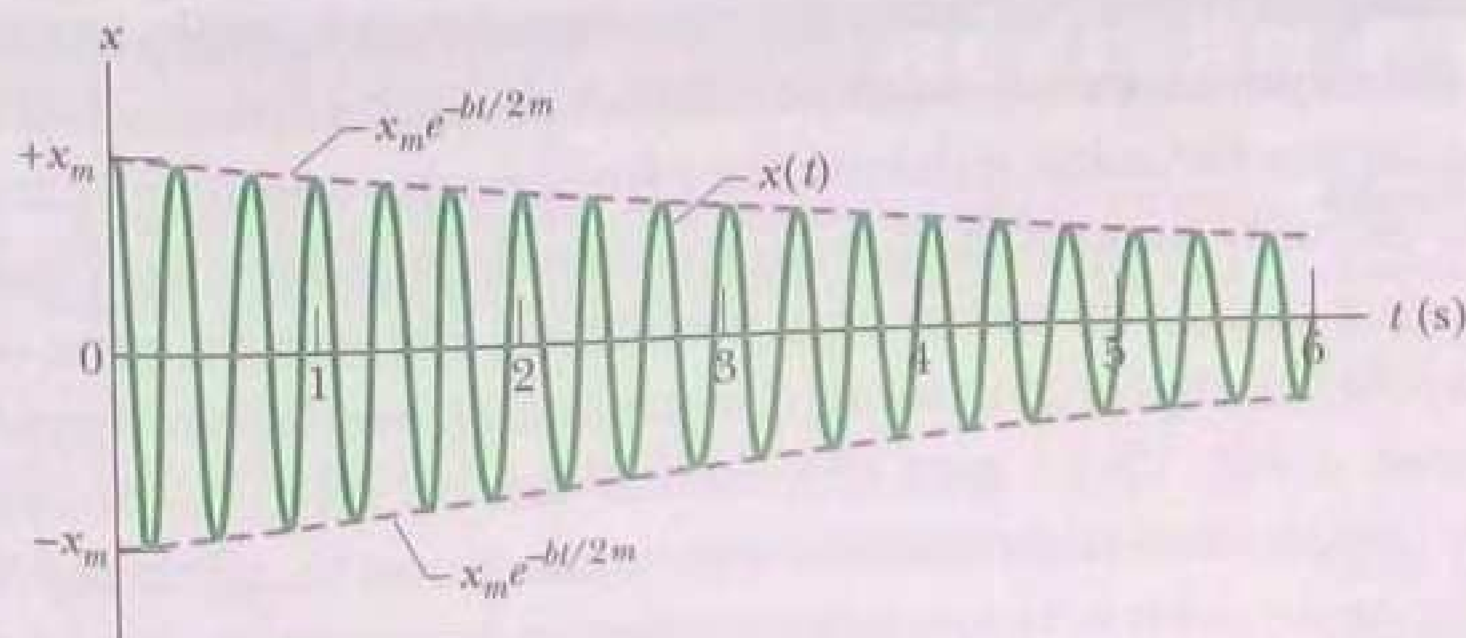


Figura 15-15 A função deslocamento $x(t)$ do oscilador amortecido da Fig. 15-14. A amplitude, que é dada por $x_m e^{-bt/2m}$, diminui exponencialmente com o tempo.

✓ TESTE 5

A tabela mostra três conjuntos de valores para a constante elástica, a constante de amortecimento e a massa do oscilador amortecido da Fig. 15-14. Ordene os conjuntos de acordo com o tempo necessário para que a energia mecânica se reduza a um quarto do valor inicial, em ordem decrescente.

Conjunto 1	$2k_0$	b_0	m_0
Conjunto 2	k_0	$6b_0$	$4m_0$
Conjunto 3	$3k_0$	$3b_0$	m_0

Exemplo

Tempo de decaimento da amplitude e da energia do oscilador harmônico amortecido

Para o oscilador amortecido da Fig. 15-14, $m = 250$ g, $k = 85$ N/m e $b = 70$ g/s.

(a) Qual é o período do movimento?

IDEIA-CHAVE

Como $b << \sqrt{km} = 4{,}6$ kg/s, o período é aproximadamente o de um oscilador não amortecido.

Cálculo De acordo com a Eq. 15-13, temos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}25\text{ kg}}{85\text{ N/m}}} = 0{,}34\text{ s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é o tempo necessário para que a amplitude das oscilações amortecidas se reduza à metade do valor inicial?

IDEIA-CHAVE

De acordo com a Eq. 15-42, a amplitude em um instante t qualquer é dada por $x_m e^{-bt/2m}$.

Cálculos A amplitude é x_m no instante $t = 0$; assim, devemos encontrar o valor de t para o qual

$$x_m e^{-bt/2m} = \tfrac{1}{2}x_m.$$

Cancelando x_m e tomando o logaritmo natural da equação restante, temos $\ln(\frac{1}{2})$ do lado direito e

$$\ln(e^{-bt/2m}) = -bt/2m$$

do lado esquerdo. Assim,

$$t = \frac{-2m\ln\frac{1}{2}}{b} = \frac{-(2)(0{,}25\text{ kg})(\ln\frac{1}{2})}{0{,}070\text{ kg/s}}$$
$$= 5{,}0\text{ s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Como $T = 0{,}34$ s, isso corresponde a cerca de 15 períodos de oscilação.

(c) Quanto tempo é necessário para que a energia mecânica se reduza à metade do valor inicial?

IDEIA-CHAVE

De acordo com a Eq. 15-44, a energia mecânica no instante t é $\frac{1}{2}kx_m^2e^{-bt/m}$.

Cálculos A energia mecânica é $\frac{1}{2}kx_m^2$ no instante $t = 0$; assim, devemos encontrar o valor de t para o qual

$$\tfrac{1}{2}kx_m^2\, e^{-bt/m} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}kx_m^2).$$

Dividindo ambos os membros da equação por $\frac{1}{2}kx_m^2$ e explicitando t como no item anterior, obtemos

$$t = \frac{-m\ln\frac{1}{2}}{b} = \frac{-(0{,}25\text{ kg})(\ln\frac{1}{2})}{0{,}070\text{ kg/s}} = 2{,}5\text{ s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Este valor é exatamente metade do tempo calculado no item (b), ou cerca de 7,5 períodos de oscilação. A Fig. 15-15 foi desenhada para ilustrar este exemplo.

15-9 Oscilações Forçadas e Ressonância

Uma pessoa que se balança em um balanço sem que ninguém a empurre constitui um exemplo de *oscilações livres*. Quando alguém empurra o balanço periodicamente, dizemos que o balanço está executando *oscilações forçadas*. No caso de um sistema que executa oscilações forçadas, existem *duas* frequências angulares características: (1) a *frequência angular natural* ω, que é a frequência angular com a qual o sistema oscilaria livremente depois de sofrer uma perturbação brusca de curta duração; (2) a frequência angular ω_e da força externa que produz as oscilações forçadas.

Podemos usar a Fig. 15-14 para representar um oscilador harmônico simples forçado ideal se supusermos que a estrutura indicada como "suporte rígido" se move para cima e para baixo com uma frequência angular variável ω_e. Um oscilador forçado desse tipo oscila com a frequência angular ω_e da força externa e seu deslocamento $x(t)$ é dado por

$$x(t) = x_m \cos(\omega_e t + \phi), \quad (15\text{-}45)$$

onde x_m é a amplitude das oscilações.

A amplitude do deslocamento x_m é uma função complicada de ω e ω_e. A amplitude da velocidade v_m das oscilações é mais simples de descrever; é máxima para

$$\omega_e = \omega \quad \text{(ressonância)}, \quad (15\text{-}46)$$

uma situação conhecida como **ressonância**. A Eq. 15-46 expressa também, *aproximadamente*, a situação para a qual a amplitude do deslocamento, x_m, é máxima. Assim, se empurramos um balanço com a frequência angular natural de oscilação, as amplitudes do deslocamento e da velocidade atingem valores elevados, um fato que as crianças aprendem depressa por tentativa e erro. Quando empurramos o balanço com outra frequência angular, maior ou menor, as amplitudes do deslocamento e da velocidade são menores.

A Fig. 15-16 mostra a variação da amplitude do deslocamento de um oscilador com a frequência angular ω_e da força externa para três valores do coeficiente de amortecimento b. Observe que para os três valores, a amplitude é aproximadamente máxima para $\omega_e/\omega = 1$ (a condição de ressonância da Eq. 15-46). As curvas da Fig. 15-16 mostram que a um amortecimento menor está associado um *pico de ressonância* mais alto e mais estreito.

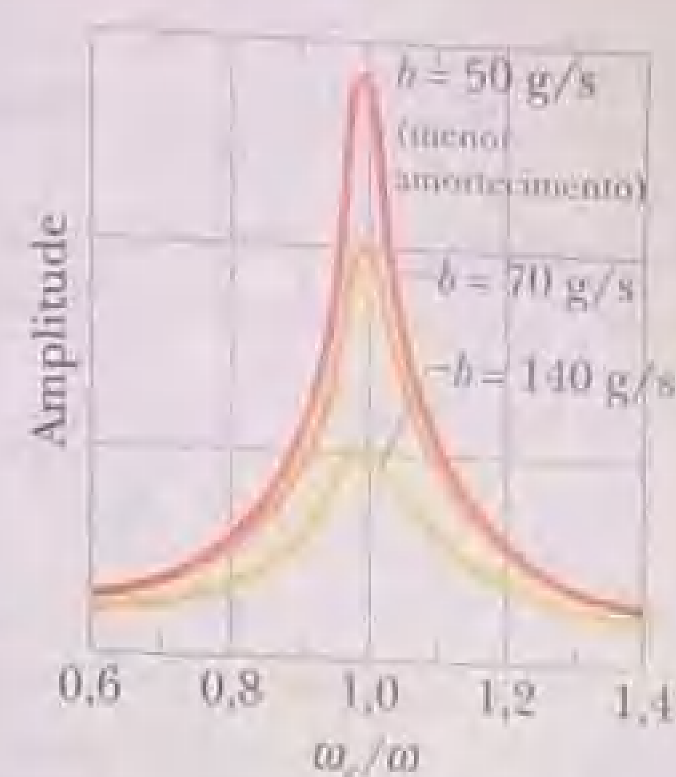


Figura 15-16 A amplitude do deslocamento x_m de um oscilador forçado varia quando a frequência angular ω_e da força externa varia. As curvas da figura correspondem a três valores diferentes da constante de amortecimento b.

Todas as estruturas mecânicas possuem uma ou mais frequências angulares naturais; se a estrutura é submetida a uma força externa cuja frequência coincide com uma dessas frequências angulares naturais, as oscilações resultantes podem fazer com que a estrutura se rompa. Assim, por exemplo, os projetistas de aeronaves devem se certificar de que nenhuma das frequências angulares naturais com as quais uma asa pode oscilar coincide com a frequência angular dos motores durante o voo. Uma asa que vibrasse violentamente para certas velocidades dos motores obviamente tornaria qualquer voo muito perigoso.

A ressonância parece ter sido uma das causas do desabamento de muitos edifícios na Cidade do México em setembro de 1985, quando um grande terremoto (8,1 na escala Richter) aconteceu na costa oeste do México. As ondas sísmicas do terremoto eram provavelmente fracas demais para causar grandes danos quando chegaram à Cidade do México, a cerca de 400 km de distância. Entretanto, a Cidade do México foi, em sua maior parte, construída no leito de um antigo lago, uma região onde o solo ainda é úmido e macio. Embora a amplitude das ondas sísmicas fosse pequena no solo firme a caminho da Cidade do México, aumentou consideravelmente no solo macio da cidade. A amplitude da aceleração das ondas chegou a $0{,}20g$ e a frequência angular se concentrou (surpreendentemente) em torno de 3 rad/s. Não só o solo oscilou violentamente, mas muitos edifícios de altura intermediária tinham frequências de ressonância da ordem de 3 rad/s. A maioria desses edifícios desabou durante os tremores (Fig. 15-17), enquanto edifícios mais baixos (com frequência angular de ressonância maior) e mais altos (com frequência angular de ressonância menor) permaneceram de pé.

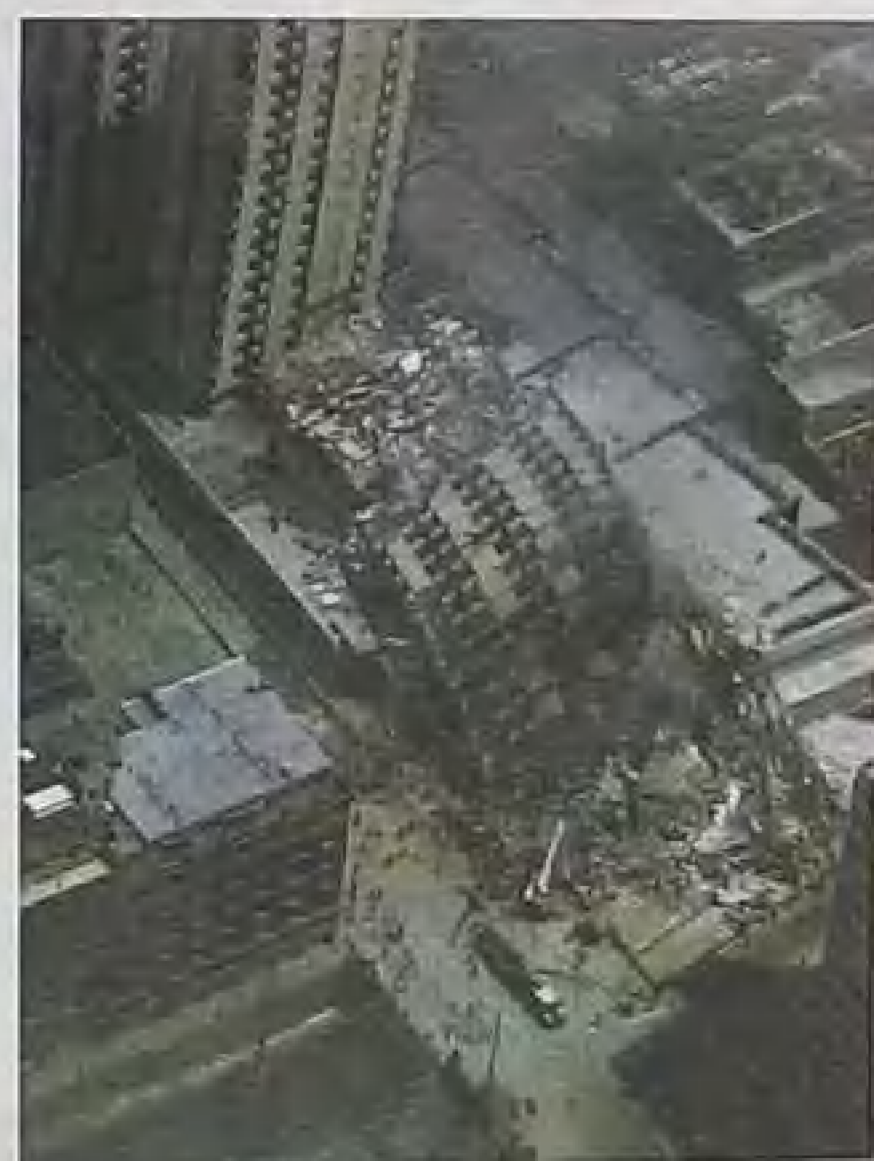


Figura 15-17 Em 1985, edifícios de altura intermediária desabaram na Cidade do México por causa de um terremoto que ocorreu longe da cidade. Edifícios mais altos e mais baixos permaneceram de pé. *(John T. Barr/ Getty Images News and Sport Services)*

REVISÃO E RESUMO

Frequência A *frequência f* de um movimento periódico, ou oscilatório, é o número de oscilações por segundo. No SI, é medida em hertz:

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ oscilação por segundo} = 1 \text{ s}^{-1}. \quad (15\text{-}1)$$

Período O *período T* é o tempo necessário para uma oscilação completa, ou **ciclo**, e está relacionado à frequência através da equação

$$T = \frac{1}{f}. \quad (15\text{-}2)$$

Movimento Harmônico Simples No *movimento harmônico simples* (MHS), o deslocamento $x(t)$ de uma partícula a partir da posição de equilíbrio é descrito pela equação

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(deslocamento)}, \quad (15\text{-}3)$$

onde x_m é a **amplitude** do deslocamento, $\omega t + \phi$ é a **fase** do movimento e ϕ é a **constante de fase**. A **frequência angular** ω está relacionada ao período e à frequência do movimento através da equação

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{(frequência angular).} \tag{15-5}$$

Derivando a Eq. 15-3, chega-se às equações da velocidade e da aceleração de uma partícula em MHS em função do tempo:

$$v = -\omega x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad \text{(velocidade)} \tag{15-6}$$

e

$$a = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{(aceleração).} \tag{15-7}$$

Na Eq. 15-6, a grandeza positiva ωx_m é a **amplitude da velocidade** do movimento, v_m. Na Eq. 15-7, a grandeza positiva $\omega^2 x_m$ é a **amplitude da aceleração** do movimento, a_m.

O Oscilador Linear Uma partícula de massa m que se move sob a influência de uma força restauradora dada pela lei de Hooke $F = -kx$ exibe um movimento harmônico simples, no qual

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(frequência angular)} \tag{15-12}$$

e

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(período).} \tag{15-13}$$

Um sistema desse tipo é chamado de **oscilador harmônico linear simples**.

Energia Uma partícula em movimento harmônico simples possui, em qualquer instante, uma energia cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ e uma energia potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$. Se não há atrito, a energia mecânica $E = K + U$ permanece constante mesmo que K e U variem.

Pêndulos Entre os dispositivos que executam um movimento harmônico simples estão o **pêndulo de torção** da Fig. 15-7, o **pêndulo simples** da Fig. 15-9 e o **pêndulo físico** da Fig. 15-10. Os períodos de oscilação para pequenas oscilações são, respectivamente,

$$T = 2\pi\sqrt{I/\kappa} \quad \text{(pêndulo de torção),} \tag{15-23}$$

$$T = 2\pi\sqrt{L/g} \quad \text{(pêndulo simples),} \tag{15-28}$$

$$T = 2\pi\sqrt{I/mgh} \quad \text{(pêndulo físico).} \tag{15-29}$$

Movimento Harmônico Simples e Movimento Circular Uniforme O movimento harmônico simples é a projeção do movimento circular uniforme em um diâmetro da circunferência na qual ocorre o movimento circular uniforme. A Fig. 15-13 mostra que as projeções de todos os parâmetros do movimento circular (posição, velocidade e aceleração) fornecem os valores correspondentes dos parâmetros do movimento harmônico simples.

Movimento Harmônico Amortecido A energia mecânica E de sistemas oscilatórios reais diminui durante as oscilações porque forças externas, como a força de arrasto, inibem as oscilações e transferem energia mecânica para energia térmica. Nesse caso, dizemos que o oscilador real e seu movimento são **amortecidos**. Se a **força de amortecimento** é dada por $\vec{F}_a = -b\vec{v}$, onde $\vec{v}$ é a velocidade do oscilador e b é uma **constante de amortecimento**, o deslocamento do oscilador é dado por

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi), \tag{15-42}$$

onde ω', a frequência angular do oscilador amortecido, é dada por

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \tag{15-43}$$

Se a constante de amortecimento é pequena ($b \ll \sqrt{km}$), $\omega' \approx \omega$, onde ω é a frequência angular do oscilador não amortecido. Para pequenos valores de b, a energia mecânica E do oscilador é dada por

$$E(t) \approx \tfrac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m}. \tag{15-44}$$

Oscilações Forçadas e Ressonância Se uma força externa de frequência angular ω_e age sobre um sistema oscilatório de *frequência angular natural* ω, o sistema oscila com frequência angular ω_e. A amplitude da velocidade v_m do sistema é máxima para

$$\omega_e = \omega, \tag{15-46}$$

uma situação conhecida como **ressonância**. A amplitude x_m do sistema é (aproximadamente) máxima na mesma situação.

PERGUNTAS

1 Qual dos seguintes intervalos se aplica ao ângulo ϕ do MHS da Fig. 15-18a:

(a) $-\pi < \phi < -\pi/2$,

(b) $\pi < \phi < 3\pi/2$,

(c) $-3\pi/2 < \phi < -\pi$?

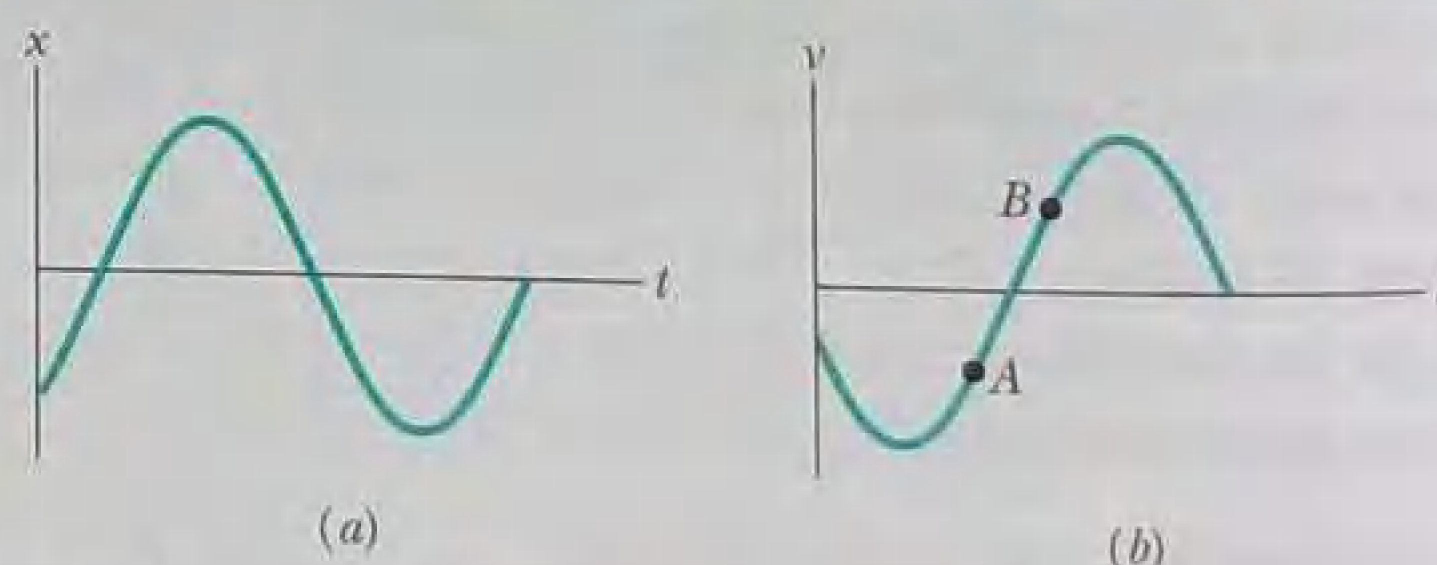


Figura 15-18 Perguntas 1 e 2.

2 A velocidade $v(t)$ de uma partícula que executa um MHS é mostrada no gráfico da Fig. 15-18b. A partícula está momentaneamente em repouso, está se deslocando em direção a $-x_m$ ou está se deslocando em direção a $+x_m$ (a) no ponto A do gráfico e (b) no ponto B do gráfico? A partícula está em $-x_m$, em $+x_m$, em 0, entre $-x_m$ e 0 ou entre 0 e $+x_m$ quando sua velocidade é representada (c) pelo ponto A e (d) pelo ponto B? A velocidade da partícula está aumentando ou diminuindo (e) no ponto A e (f) no ponto B?

3 O gráfico da Fig. 15-19 mostra a aceleração $a(t)$ de uma partícula que executa um MHS. (a) Qual dos pontos indicados corresponde à partícula na posição $-x_m$? (b) No ponto 4, a velocidade da partícula é positiva, negativa ou nula? (c) No ponto 5, a partícula está em $-x_m$, em $+x_m$, em 0, entre $-x_m$ e 0 ou entre 0 e $+x_m$?

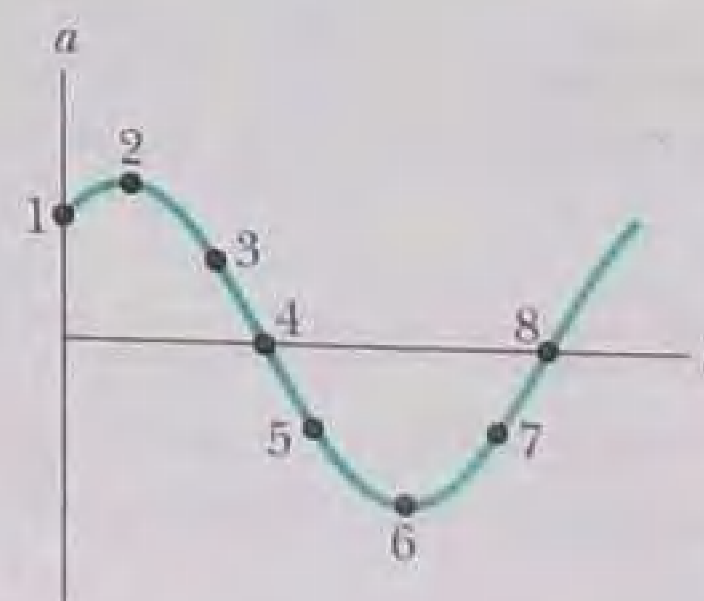


Figura 15-19 Pergunta 3.

4 Qual das seguintes relações entre a aceleração a e o deslocamento x de uma partícula corresponde a um MHS: (a) $a = 0{,}5x$, (b) $a = 400x^2$, (c) $a = -20x$, (d) $a = -3x^2$?

5 Você deve completar a Fig. 15-20a para que seja o gráfico da velocidade v em função do tempo t do oscilador massa–mola que é mostrado na Fig. 15-20b para $t = 0$. (a) Na Fig. 15-20a, em qual dos pontos indicados por letras ou em que região entre os pontos o eixo v (vertical) deve interceptar o eixo t? (Por exemplo: ele deve interceptar o eixo t no ponto A, ou, talvez, na região entre os pontos A e B?) (b) Se a velocidade do bloco é dada por $v = -v_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$, qual é o valor de ϕ? Suponha que é positivo, e se não puder especificar um valor (como $+\pi/2$ rad), especifique um intervalo (como $0 < \phi < \pi/2$).

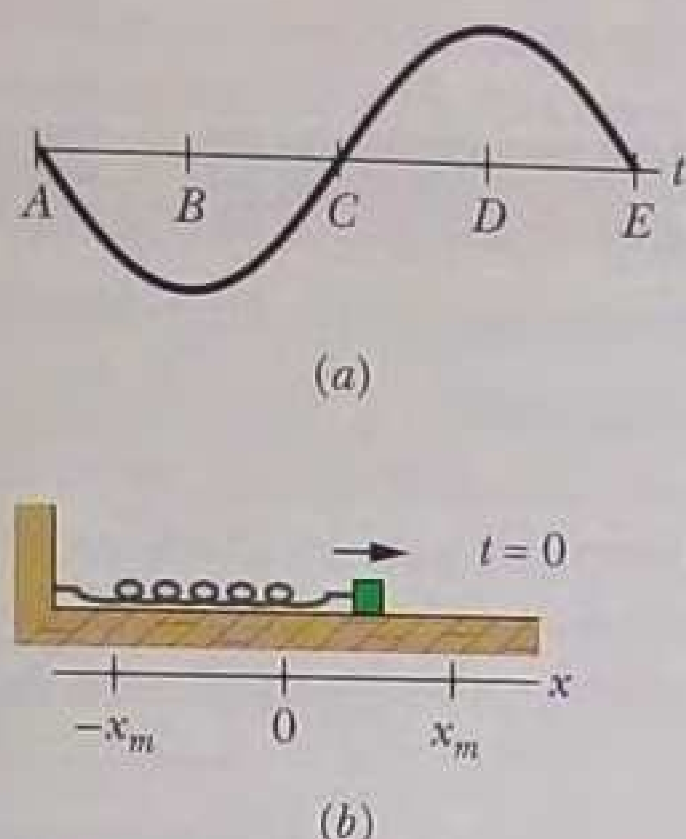


Figura 15-20 Pergunta 5.

6 Você deve completar a Fig. 15-21a para que seja o gráfico da aceleração a em função do tempo t do oscilador massa–mola que é mostrado na Fig. 15-21b para $t = 0$. (a) Na Fig. 15-21a, em qual dos pontos indicados por letras ou em que região entre os pontos o eixo v (vertical) deve interceptar o eixo t? (Por exemplo, ele deve interceptar o eixo t no ponto A, ou, talvez, na região entre os pontos A e B?). (b) Se a aceleração do bloco é dada por $a = -a_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$, qual é o valor de ϕ? Suponha que é positivo, e se não puder especificar um valor (como $+\pi/2$ rad), especifique um intervalo (como $0 < \phi < \pi/2$).

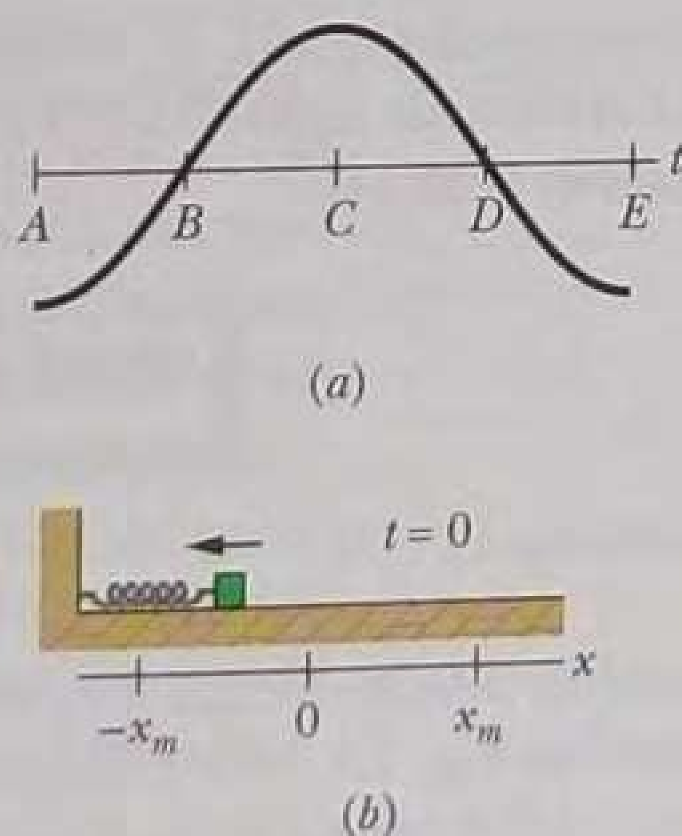


Figura 15-21 Pergunta 6.

7 A Fig. 15-22 mostra as curvas $x(t)$ obtidas em três experimentos fazendo um certo sistema massa–mola oscilar em um MHS. Ordene as curvas de acordo com (a) a frequência angular do sistema, (b) a energia potencial da mola no instante $t = 0$, (c) a energia cinética do bloco no instante $t = 0$, (d) a velocidade do bloco no instante $t = 0$ e (e) a energia cinética máxima do bloco, em ordem decrescente.

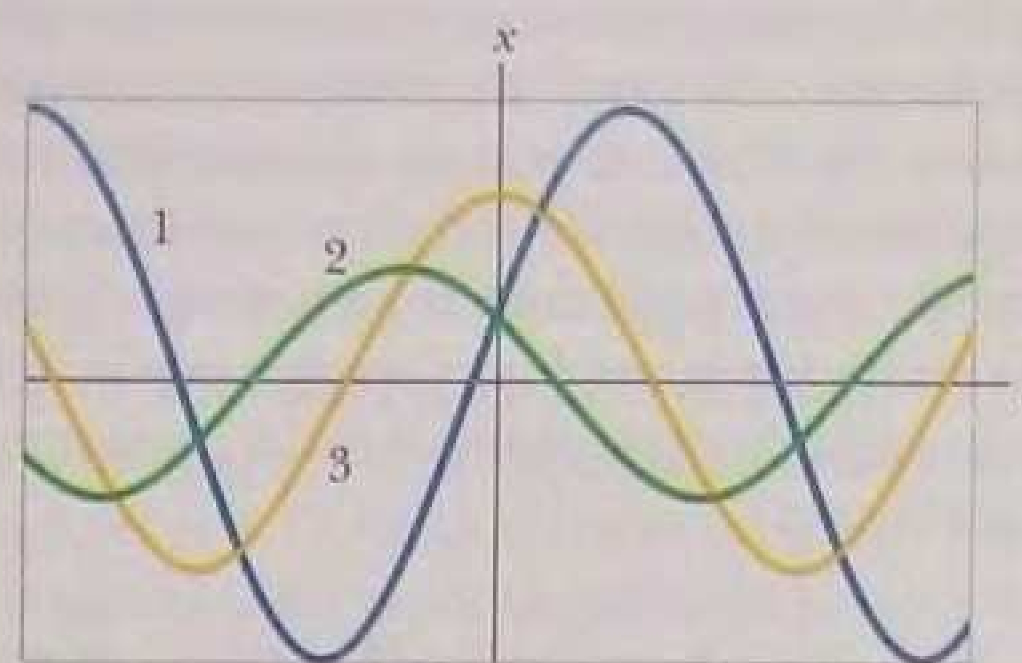


Figura 15-22 Pergunta 7.

8 A Fig. 15-23 mostra os gráficos da energia cinética K em função da posição x para três osciladores harmônicos que têm a mesma massa. Ordene os gráficos de acordo (a) com a constante elástica e (b) o período do oscilador, em ordem decrescente.

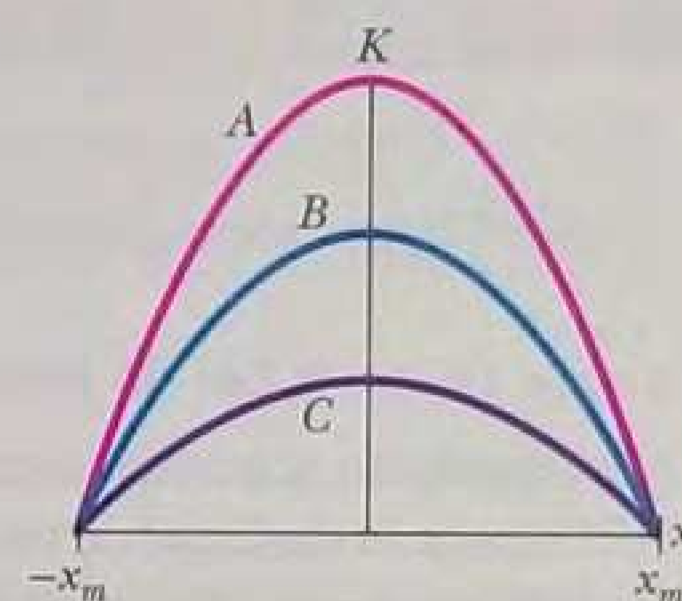


Figura 15-23 Pergunta 8.

9 A Fig. 15-24 mostra três pêndulos físicos formados por esferas uniformes iguais, rigidamente ligadas por barras iguais de massa desprezível. Os pêndulos são verticais e podem oscilar em torno do ponto de suspensão O. Ordene os pêndulos de acordo com o período das oscilações, em ordem decrescente.

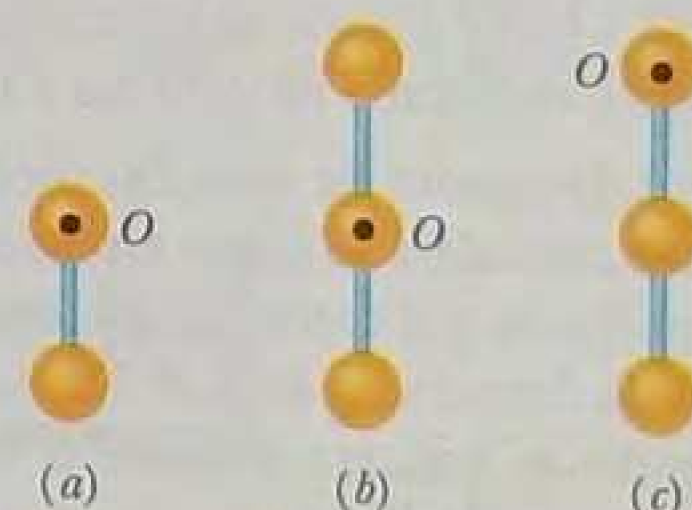


Figura 15-24 Pergunta 9.

10 Você deve construir o dispositivo de transferência de oscilação mostrado na Fig. 15-25. Ele é composto por dois sistemas massa–mola pendurados em uma barra flexível. Quando a mola do sistema 1 é distendida e depois liberada, o MHS resultante do sistema 1, de frequência f_1, faz a barra oscilar. A barra exerce uma força sobre o sistema 2, com a mesma frequência f_1. Você pode escolher entre quatro molas com constantes elásticas k de 1600, 1500, 1400 e 1200 N/m e entre quatro blocos com massas m de 800, 500, 400 e 200 kg. Determine mentalmente que mola deve ser ligada a que bloco nos dois sistemas para maximizar a amplitude das oscilações do sistema 2.

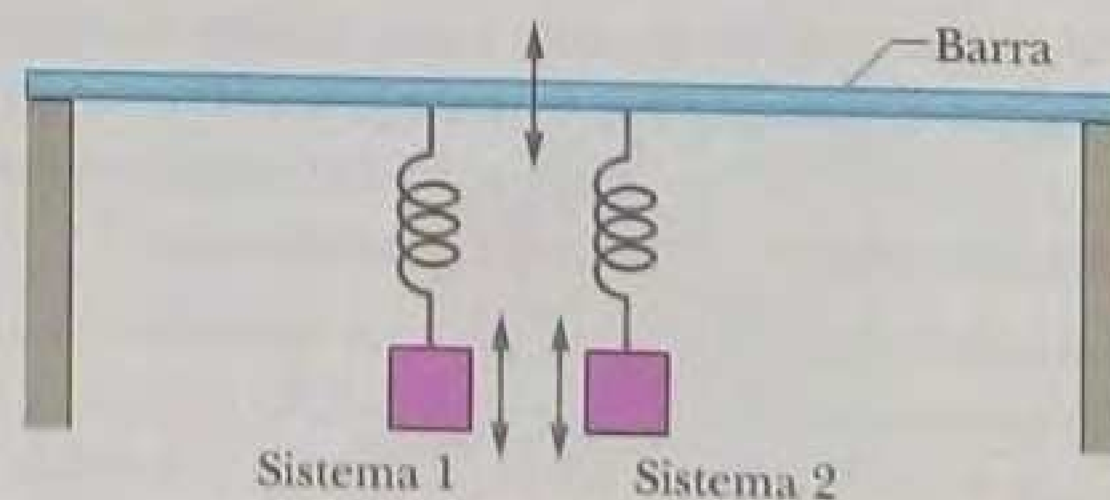


Figura 15-25 Pergunta 10.

11 Na Fig. 15-26, um sistema massa-mola é colocado em MHS em dois experimentos. No primeiro, o bloco é puxado até sofrer um deslocamento d_1 em relação à posição de equilíbrio e depois liberado. No segundo, é puxado até sofrer um deslocamento maior d_2 e depois liberado. (a) A amplitude, (b) o período, (c) a frequência, (d) a energia cinética máxima e (e) a energia potencial máxima do movimento no segundo experimento é maior, menor ou igual à do primeiro experimento?

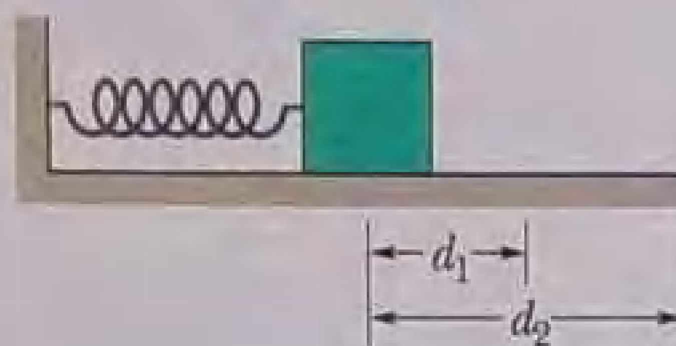


Figura 15-26 Pergunta 11.

12 A Fig. 15-27 mostra, para três situações, os deslocamentos $x(t)$ de um par de osciladores harmônicos simples (A e B) que são iguais em tudo, exceto na fase. Para cada par, qual o deslocamento de fase (em radianos e em graus) necessário para deslocar a curva A e fazê-la coincidir com a curva B? Das várias respostas possíveis, escolha o deslocamento com o menor valor absoluto.

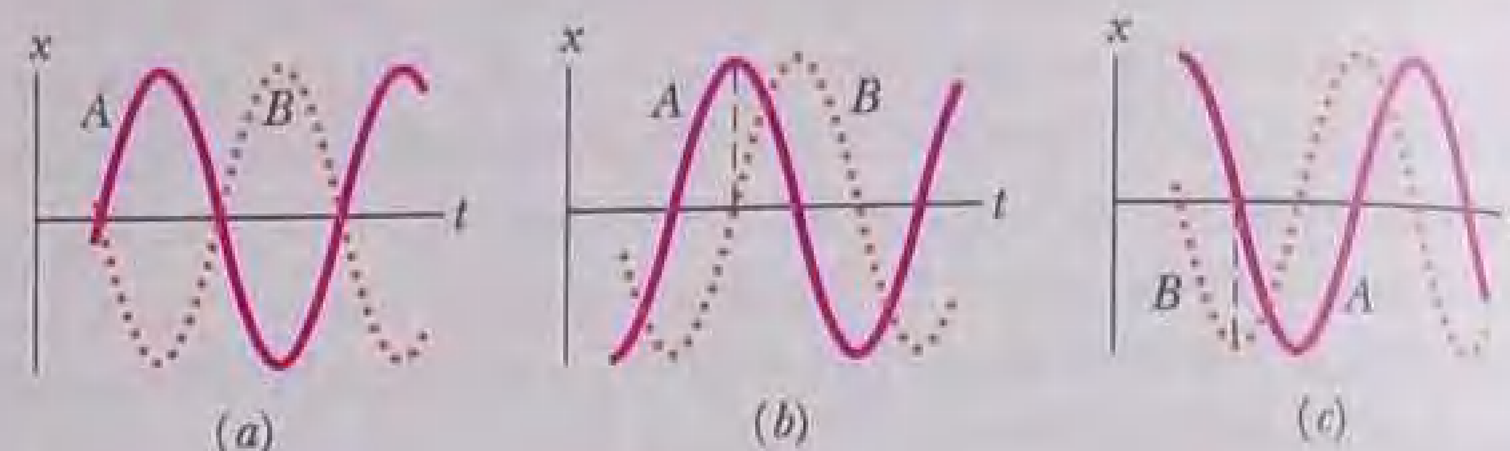


Figura 15-27 Pergunta 12.

PROBLEMAS

 O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Seção 15-3 A Lei do Movimento Harmônico Simples

•1 Um objeto que executa um movimento harmônico simples leva 0,25 s para se deslocar de um ponto de velocidade nula para o ponto seguinte do mesmo tipo. A distância entre esses pontos é 36 cm. Calcule (a) o período, (b) a frequência e (c) a amplitude do movimento.

•2 Um corpo de 0,12 kg executa um movimento harmônico simples de amplitude 8,5 cm e período 0,20 s. (a) Qual é o módulo da força máxima que age sobre o corpo? (b) Se as oscilações são produzidas por uma mola, qual é a constante elástica da mola?

•3 Qual é a aceleração máxima de uma plataforma que oscila com uma amplitude de 2,20 cm e uma frequência de 6,60 Hz?

•4 Do ponto de vista das oscilações verticais, um automóvel pode ser considerado como estando apoiado em quatro molas iguais. As molas de um carro são ajustadas de tal forma que as oscilações têm uma frequência de 3,00 Hz. (a) Qual é a constante elástica de cada mola se a massa do carro é 1450 kg e está igualmente distribuída pelas molas? (b) Qual é a frequência de oscilação se cinco passageiros pesando, em média, 73,0 kg, entram no carro e a distribuição de massa continua uniforme?

•5 Em um barbeador elétrico, a lâmina se move para a frente e para trás, ao longo de uma distância de 2,0 mm, em um movimento harmônico simples com uma frequência de 120 Hz. Determine (a) a amplitude, (b) a velocidade máxima da lâmina e (c) o módulo da aceleração máxima da lâmina.

•6 Uma partícula com uma massa de $1{,}00 \times 10^{-20}$ kg descreve um movimento harmônico simples com um período de $1{,}00 \times 10^{-5}$ s e uma velocidade máxima de $1{,}00 \times 10^3$ m/s. Calcule (a) a frequência angular e (b) o deslocamento máximo da partícula.

•7 Um alto-falante produz um som musical através das oscilações de um diafragma cuja amplitude é limitada a 1,00 μm. (a) Para que frequência o módulo a da aceleração do diafragma é igual a g? (b) Para frequências maiores, a é maior ou menor que g?

•8 Qual é a constante de fase do oscilador harmônico cuja função posição $x(t)$ aparece na Fig. 15-28 se a função posição é da forma $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$? A escala do eixo vertical é definida por x_s = 6,0 cm.

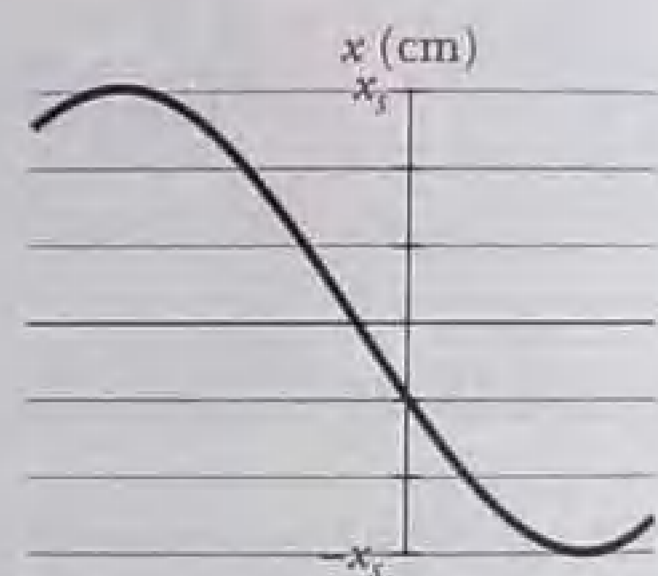


Figura 15-28 Problema 8.

•9 A função $x = (6{,}0 \text{ m}) \cos[(3\pi \text{ rad/s})t + \pi/3 \text{ rad}]$ descreve o movimento harmônico simples de um corpo. No instante t = 2,0 s, qual é (a) o deslocamento, (b) a velocidade, (c) a aceleração e (d) a fase do movimento? Qual é também (e) a frequência e (f) o período do movimento?

•10 Um sistema oscilatório massa–mola oscilante leva 0,75 s para começar a repetir seu movimento. Determine (a) o período, (b) a frequência em hertz e (c) a frequência angular em radianos por segundo.

•11 Na Fig. 15-29, duas molas iguais, de constante elástica 7580 N/m, estão ligadas a um bloco de massa 0,245 kg. Qual é a frequência de oscilação no piso sem atrito?

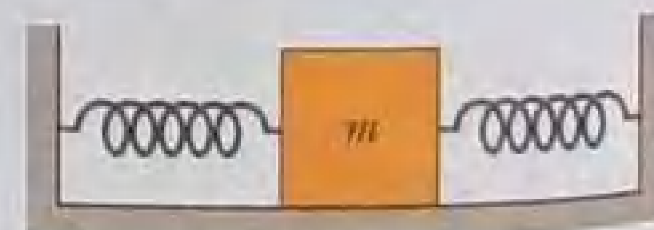


Figura 15-29 Problemas 11 e 21.

•12 Qual é a constante de fase do oscilador harmônico cuja função velocidade $v(t)$ aparece na Fig. 15-30 se a função posição $x(t)$ é da forma $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$? A escala do eixo vertical é definida por v_s = 4,0 cm/s.

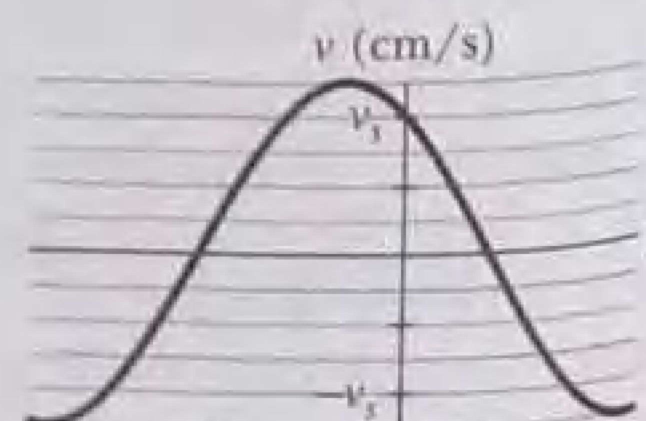


Figura 15-30 Problema 12.

•13 Um oscilador é formado por um bloco com uma massa de 0,500 kg ligado a uma mola. Quando é posto em oscilação com uma amplitude de 35,0 cm, o oscilador repete o movimento a cada 0,500 s. Determine (a) o período, (b) a frequência, (c) a frequência angular, (d) a constante elástica, (e) a velocidade máxima e (f) o módulo da força máxima que a mola exerce sobre o bloco.

••14 Um oscilador harmônico simples é formado por um bloco de massa 2,00 kg preso a uma mola de constante elástica 100 N/m. Em $t = 1,00$ s, a posição e a velocidade do bloco são $x = 0,129$ m e $v = 3,415$ m/s. (a) Qual é a amplitude das oscilações? Qual era (b) a posição e (c) a velocidade do bloco em $t = 0$ s?

••15 Duas partículas oscilam em movimento harmônico simples ao longo de um segmento retilíneo comum de comprimento A. As duas partículas têm um período de 1,5 s, mas existe uma diferença de fase de $\pi/6$ rad entre seus movimentos. (a) Qual é a distância entre as partículas (em termos de A) 0,50 s após a partícula atrasada passar por uma das extremidades da trajetória? (b) Nesse instante, as partículas estão se movendo no mesmo sentido, em sentidos opostos se aproximando uma da outra ou em sentidos opostos se afastando uma da outra?

••16 Duas partículas executam movimentos harmônicos simples de mesma amplitude e frequência ao longo de retas paralelas próximas. Elas passam uma pela outra, movendo-se em sentidos opostos, toda vez que seu deslocamento é metade da amplitude. Qual é a diferença de fase entre elas?

••17 Um oscilador é formado por um bloco preso a uma mola ($k = 400$ N/m). Em um certo instante t, a posição (medida a partir da posição de equilíbrio do sistema), a velocidade e a aceleração do bloco são $x = 0,100$ m, $v = -13,6$ m/s e $a = -123$ m/s^2. Calcule (a) a frequência de oscilação, (b) a massa do bloco e (c) a amplitude do movimento.

••18 Em um ancoradouro, as marés fazem com que a superfície do oceano suba e desça uma distância d (do nível mais alto ao nível mais baixo) em um movimento harmônico simples com um período de 12,5 h. Quanto tempo é necessário para que a água desça uma distância de $0,250d$ a partir do nível mais alto?

••19 Um bloco está apoiado em um êmbolo que se move verticalmente em um movimento harmônico simples. (a) Se o MHS tem um período de 1,0 s, para que valor da amplitude do movimento o bloco e o êmbolo se separam? (b) Se o êmbolo se move com uma amplitude de 5,0 cm, qual é a maior frequência para a qual o bloco e o êmbolo permanecem continuamente em contato?

••20 A Fig. 15-31a é um gráfico parcial da função posição $x(t)$ de um oscilador harmônico simples com uma frequência angular de 1,20 rad/s; a Fig. 15-31b é um gráfico parcial da função velocidade $v(t)$ correspondente. As escalas dos eixos verticais são definidas por $x_s = 5,0$ cm e $v_s = 5,0$ cm/s. Qual é a constante de fase do MHS se a função posição $x(t)$ é dada na forma $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$?

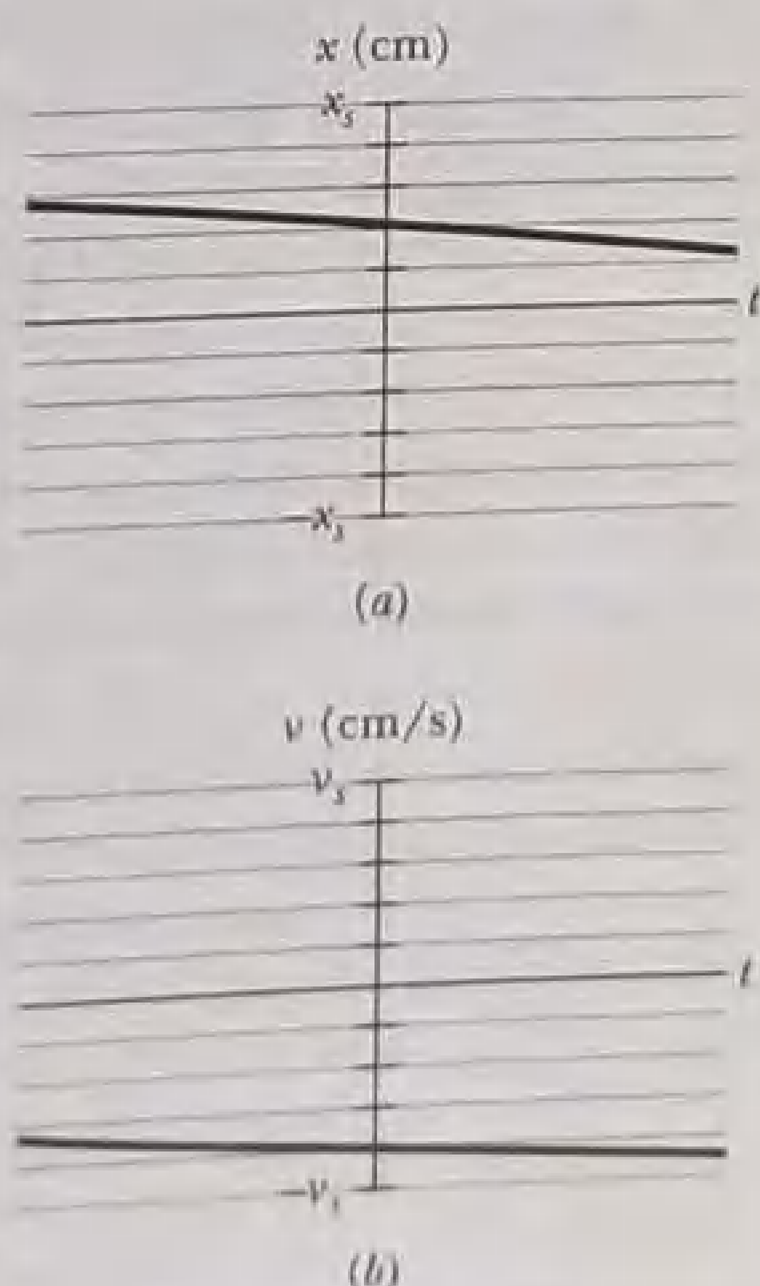


Figura 15-31 Problema 20.

••21 Na Fig. 15-29, duas molas estão presas a um bloco que pode oscilar em um piso sem atrito. Se a mola da esquerda é removida, o bloco oscila com uma frequência de 30 Hz. Se a mola removida é a da direita, o bloco oscila com uma frequência de 45 Hz. Com que frequência o bloco oscila se as duas molas estão presentes?

••22 A Fig. 15-32 mostra o bloco 1, de massa 0,200 kg, deslizando para a direita, em uma superfície elevada, com uma velocidade de 8,00 m/s. O bloco sofre uma colisão elástica com o bloco 2, inicialmente em repouso, que está preso a uma mola de constante elástica 1208,5 N/m. (Suponha que a mola não afeta a colisão.) Após a colisão, o bloco 2 inicia um MHS com um período de 0,140 s e o bloco 1 desliza para fora da extremidade oposta da superfície elevada, indo cair a uma distância horizontal d dessa superfície, depois de descer uma distância $h = 4,90$ m. Qual é o valor de d?

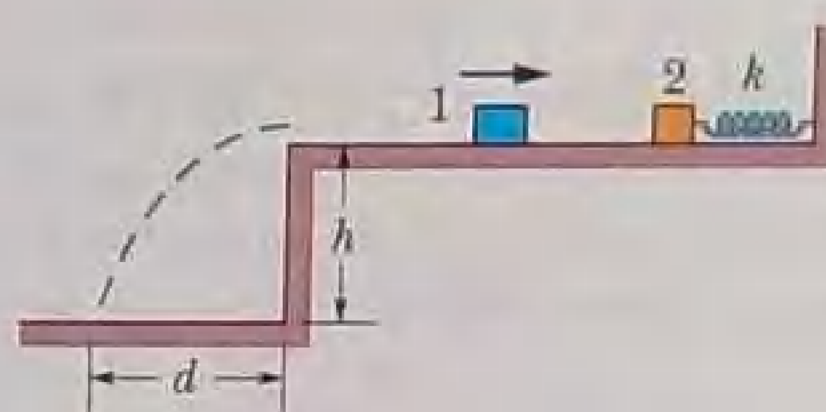


Figura 15-32 Problema 22.

••23 Um bloco está em uma superfície horizontal (uma mesa oscilante) que se move horizontalmente para a frente e para trás em um movimento harmônico simples com uma frequência de 2,0 Hz. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a superfície é 0,50. Qual o maior valor possível da amplitude do MHS para que o bloco não deslize pela superfície?

•••24 Na Fig. 15-33, duas molas são ligadas entre si e a um bloco de massa 0,245 kg que oscila em um piso sem atrito. As duas molas possuem uma constante elástica $k = 6430$ N/m. Qual é a frequência das oscilações?

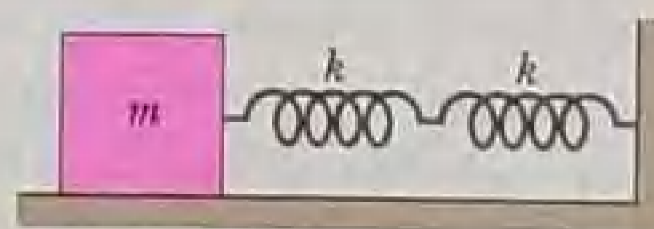


Figura 15-33 Problema 24.

•••25 Na Fig. 15-34, um bloco pesando 14,0 N, que pode deslizar sem atrito em um plano inclinado de ângulo $\theta = 40,0°$, está ligado ao alto do plano inclinado por uma mola de massa desprezível de 0,450 m de comprimento quando relaxada e cuja constante elástica é 120 N/m. (a) A que distância do alto do plano inclinado fica o ponto de equilíbrio do bloco? (b) Se o bloco é puxado ligeiramente para baixo ao longo do plano inclinado e depois liberado, qual é o período das oscilações resultantes?

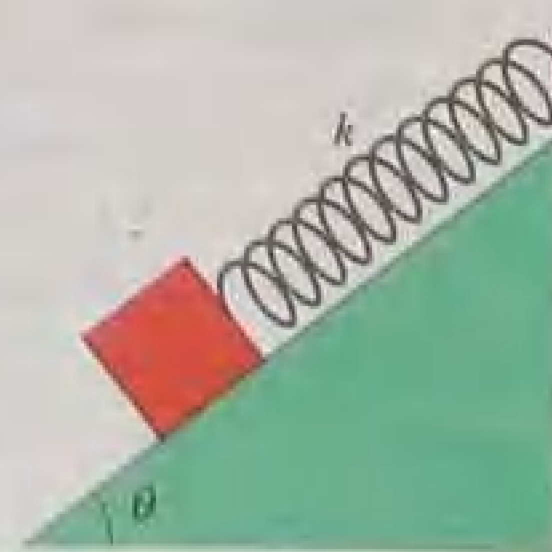


Figura 15-34 Problema 25.

•••**26** Na Figura 15-35, dois blocos (m = 1,8 kg e M = 10 kg) e uma mola (k = 200 N/m) estão dispostos em uma superfície horizontal sem atrito. O coeficiente de atrito estático entre os dois blocos é 0,40. Que amplitude do movimento harmônico simples do sistema blocos–mola faz com que o bloco menor fique na iminência de deslizar sobre o bloco maior?

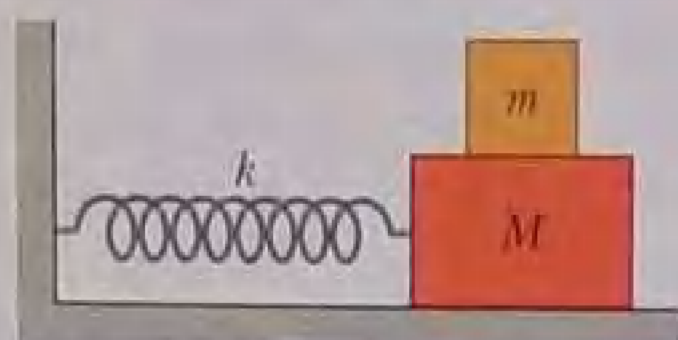


Figura 15-35 Problema 26.

Seção 15-4 A Energia do Movimento Harmônico Simples

•**27** Quando o deslocamento em um MHS é metade da amplitude x_m, que fração da energia total é (a) energia cinética e (b) energia potencial? (c) Para que deslocamento, como fração da amplitude, a energia do sistema é metade energia cinética e metade energia potencial?

•**28** A Fig. 15-36 mostra o poço de energia potencial unidimensional no qual se encontra uma partícula de 2,0 kg [a função $U(x)$ é da forma bx^2 e a escala do eixo vertical é definida por U_s = 2,0 J]. (a) Se a partícula passa pela posição de equilíbrio com uma velocidade de 85 cm/s, a partícula retorna antes de chegar ao ponto x = 15 cm? (b) Caso a resposta seja afirmativa, calcule a posição do ponto de retorno; caso a resposta seja negativa, calcule a velocidade da partícula no ponto x = 15 cm.

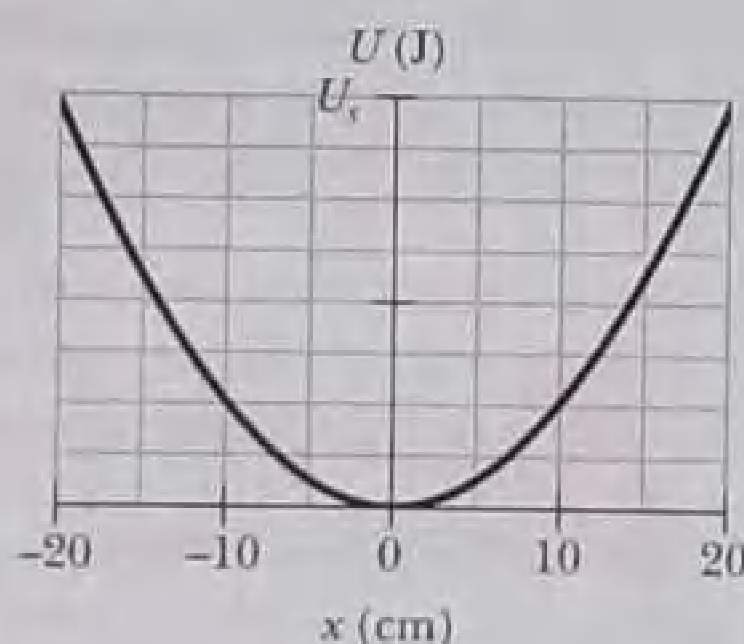


Figura 15-36 Problema 28.

•**29** Determine a energia mecânica de um sistema massa–mola com uma constante elástica de 1,3 N/cm e uma amplitude de oscilação de 2,4 cm.

•**30** Um sistema oscilatório massa–mola possui uma energia mecânica de 1,00 J, uma amplitude de 10,0 cm e uma velocidade máxima de 1,20 m/s. Determine (a) a constante elástica, (b) a massa do bloco e (c) a frequência de oscilação.

•**31** Um objeto de 5,00 kg que repousa em uma superfície horizontal sem atrito está preso a uma mola com k = 1000 N/m. O objeto é deslocado horizontalmente 50,0 cm a partir da posição de equilíbrio e recebe uma velocidade inicial de 10,0 m/s na direção da posição de equilíbrio. Qual é (a) a frequência do movimento, (b) a energia potencial inicial do sistema massa–mola, (c) a energia cinética inicial e (d) a amplitude do movimento?

•**32** A Fig. 15-37 mostra a energia cinética K de um oscilador harmônico simples em função da posição x. A escala vertical é definida por K_s = 4,0 J. Qual é a constante elástica?

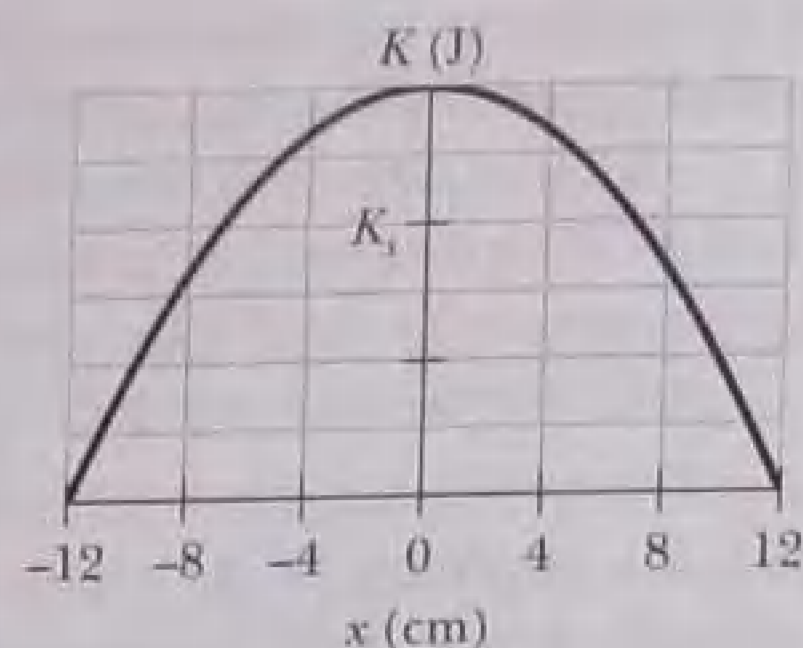


Figura 15-37 Problema 32.

••**33** Um bloco de massa M = 5,4 kg, em repouso em uma mesa horizontal sem atrito, está ligado a um suporte rígido através de uma mola de constante elástica k = 6000 N/m. Uma bala de massa m = 9,5 g e velocidade $\vec{v}$ de módulo 630 m/s atinge o bloco e fica alojada nele (Fig. 15-38). Supondo que a compressão da mola é desprezível até a bala se alojar no bloco, determine (a) a velocidade do bloco imediatamente após a colisão e (b) a amplitude do movimento harmônico simples resultante.

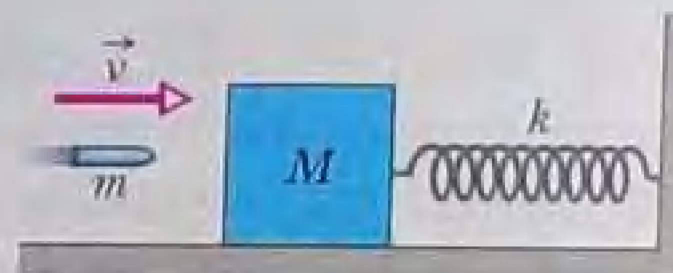


Figura 15-38 Problema 33.

••**34** Na Fig. 15-39, o bloco 2, de massa 2,0 kg, oscila na extremidade de uma mola em MHS com um período de 20 ms. A posição do bloco é dada por $x = (1{,}0 \text{ cm}) \cos(\omega t + \pi/2)$. O bloco 1, de massa 4,0 kg, desliza em direção ao bloco 2 com uma velocidade de módulo 6,0 m/s, dirigida ao longo do comprimento da mola. Os dois blocos sofrem uma colisão perfeitamente inelástica no instante t = 5,0 ms. (A duração da colisão é muito menor que o período do movimento.) Qual é a amplitude do MHS após a colisão?

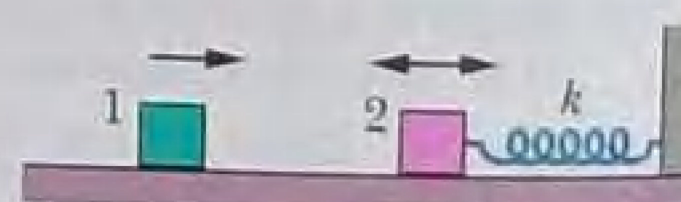


Figura 15-39 Problema 34.

••**35** Uma partícula de 10 g executa um MHS com uma amplitude de 2,0 mm, uma aceleração máxima de módulo 8,0 × 10^3 m/s^2 e uma constante de fase desconhecida ϕ. Qual é (a) o período do movimento, (b) a velocidade máxima da partícula e (c) a energia mecânica total do oscilador? Qual é o módulo da força que age sobre a partícula no ponto no qual (d) o deslocamento é máximo e (e) o deslocamento é metade do deslocamento máximo?

••**36** Se o ângulo de fase de um sistema massa–mola em MHS é $\pi/6$ rad e a posição do bloco é dada por $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$, qual é a razão entre a energia cinética e a energia potencial no instante t = 0?

•••**37** Uma mola de massa desprezível está pendurada no teto com um pequeno objeto preso à extremidade inferior. O objeto é inicialmente mantido em repouso em uma posição y_i tal que a mola se encontra no estado relaxado. Em seguida, o objeto é liberado e passa a oscilar para cima e para baixo, com a posição mais baixa 10 cm abaixo de y_i. (a) Qual é a frequência das oscilações? (b) Qual é a velocidade do objeto quando se encontra 8,0 cm abaixo da posição inicial? (c) Um objeto de massa 300 g é preso ao primeiro objeto, após o que o sistema passa a oscilar com metade da frequência original. Qual é a massa do primeiro objeto? (d) A que distância abai-

xo de y, está a nova posição de equilíbrio (repouso), com os dois objetos presos à mola?

Seção 15-5 Um Oscilador Harmônico Angular Simples

•38 Uma esfera maciça com uma massa de 95 kg e 15 cm de raio está suspensa por um fio vertical. Um torque de 0,20 N · m é necessário para fazer a esfera girar 0,85 rad e manter essa orientação. Qual é o período das oscilações quando a esfera é liberada?

••39 O balanço de um relógio antigo oscila com uma amplitude angular de π rad e um período de 0,500 s. Determine (a) a velocidade angular máxima do balanço, (b) a velocidade angular no instante em que o deslocamento é $\pi/2$ rad e (c) o módulo da aceleração angular no instante em que o deslocamento é $\pi/4$ rad.

Seção 15-6 Pêndulos

•40 Um pêndulo físico é formado por uma régua de um metro cujo ponto de suspensão é um pequeno furo feito na régua a uma distância d da marca de 50 cm. O período de oscilação é 2,5 s. Determine o valor de d.

•41 Na Fig. 15-40, o pêndulo é formado por um disco uniforme de raio r = 10,0 cm e 500 g de massa preso a uma barra homogênea de comprimento L = 500 mm e 270 g de massa. (a) Calcule o momento de inércia em relação ao ponto de suspensão. (b) Qual é a distância entre o ponto de suspensão e o centro de massa do pêndulo? (c) Calcule o período de oscilação.

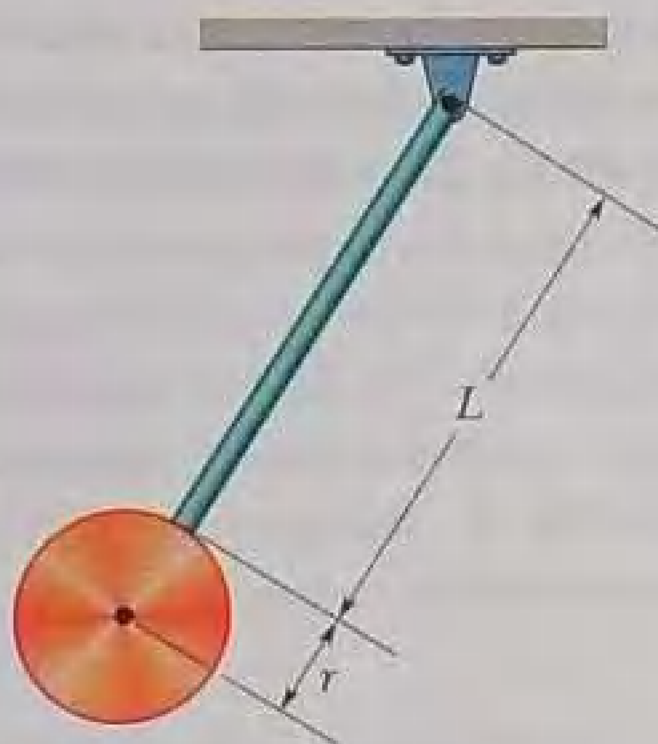


Figura 15-40 Problema 41.

•42 Suponha que um pêndulo simples é formado por um pequeno peso de 60,0 g pendurado na extremidade de uma corda de massa desprezível. Se o ângulo θ entre a corda e a vertical é dado por

$$\theta = (0{,}0800 \text{ rad}) \cos[(4{,}43 \text{ rad/s})t + \phi],$$

qual é (a) o comprimento da corda e (b) a energia cinética máxima do peso?

•43 (a) Se o pêndulo físico do exemplo que envolve a Fig. 15-11 é invertido e pendurado pelo ponto P, qual é o período de oscilação? (b) O período é maior, menor ou igual ao valor anterior?

•44 Um pêndulo físico é formado por duas réguas de um metro de comprimento unidas da forma indicada na Fig. 15-41. Qual é o período de oscilação do pêndulo em torno de um pino que passa pelo ponto A situado no centro da régua horizontal?



Figura 15-41 Problema 44.

•45 Uma artista de circo, sentada em um trapézio, está balançando com um período de 8,85 s. Quando fica de pé, elevando assim de 35,0 cm o centro de massa do sistema *trapézio + trapezista*, qual é o novo período do sistema? Trate o sistema *trapézio + trapezista* como um pêndulo simples.

•46 No exemplo que envolve a Fig. 15-11, vimos que um pêndulo físico em forma de régua possui um centro de oscilação a uma distância $2L/3$ do ponto de suspensão. Mostre que a distância entre o ponto de suspensão e o centro de oscilação para um pêndulo de qualquer formato é I/mh, onde I é o momento de inércia, m é a massa e h é a distância entre o ponto de suspensão e o centro de massa do pêndulo.

•47 Na Fig. 15-42, um pêndulo físico é formado por um disco uniforme (de raio R = 2,35 cm) sustentado em um plano vertical por um pino situado a uma distância d = 1,75 cm do centro do disco. O disco é deslocado de um pequeno ângulo e liberado. Qual é o período do movimento harmônico simples resultante?

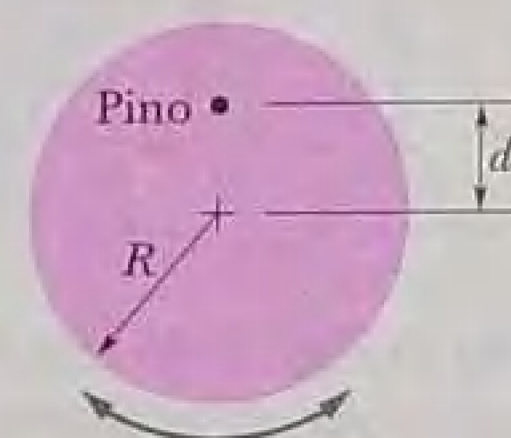


Figura 15-42 Problema 47.

••48 Um bloco retangular, com faces de largura a = 35 cm e comprimento b = 45 cm, é suspenso por uma barra fina que passa por um pequeno furo no interior do bloco e colocado para oscilar como um pêndulo, com uma amplitude suficientemente pequena para que se trate de um MHS. A Fig. 15-43 mostra uma possível posição do furo, a uma distância r do centro do bloco, sobre a reta que liga o centro a um dos vértices. (a) Plote o período do pêndulo em função da distância r de modo que o mínimo da curva fique evidente. (b) O mínimo acontece para que valor de r? Na realidade, existe um lugar geométrico em torno do centro do bloco para o qual o período de oscilação possui o mesmo valor mínimo. (c) Qual é a forma desse lugar geométrico?

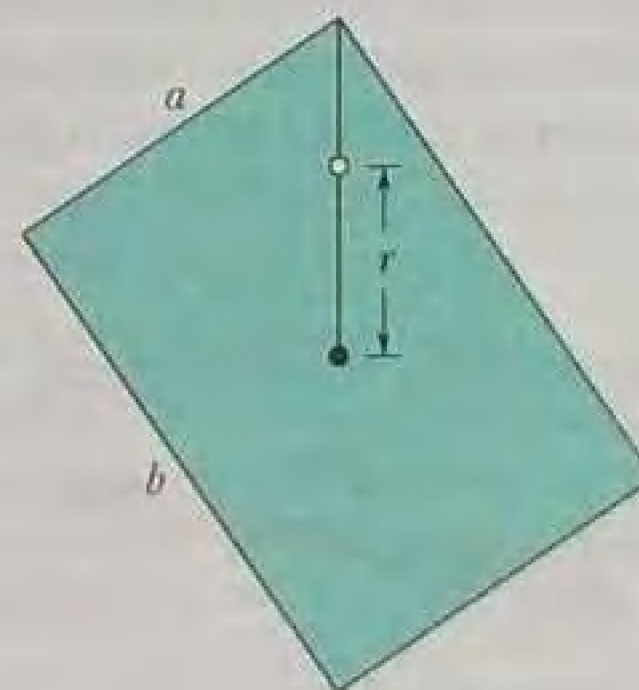


Figura 15-43 Problema 48.

••49 O ângulo do pêndulo da Fig. 15-9b é dado por $\theta = \theta_m \cos[(4{,}44 \text{ rad/s})t + \phi]$. Se, em t = 0, θ = 0,040 rad e $d\theta/dt$ = −0,200 rad/s, qual é (a) a constante de fase ϕ e (b) o ângulo máximo θ_m? (*Sugestão:* não confunda a taxa de variação de θ, $d\theta/dt$, com a frequência angular ω do MHS.)

••50 Uma barra fina uniforme (massa = 0,50 kg) oscila em torno de um eixo que passa por uma das extremidades da barra e é perpendicular ao plano de oscilação. A barra oscila com um período de 1,5 s e uma amplitude angular de 10°. (a) Qual é o comprimento da barra? (b) Qual é a energia cinética máxima da barra?

••51 Na Fig. 15-44, uma barra de comprimento L = 1,85 m oscila como um pêndulo físico. (a) Que valor da distância x entre o centro de massa da barra e o ponto de suspensão O corresponde ao menor período? (b) Qual é esse período?

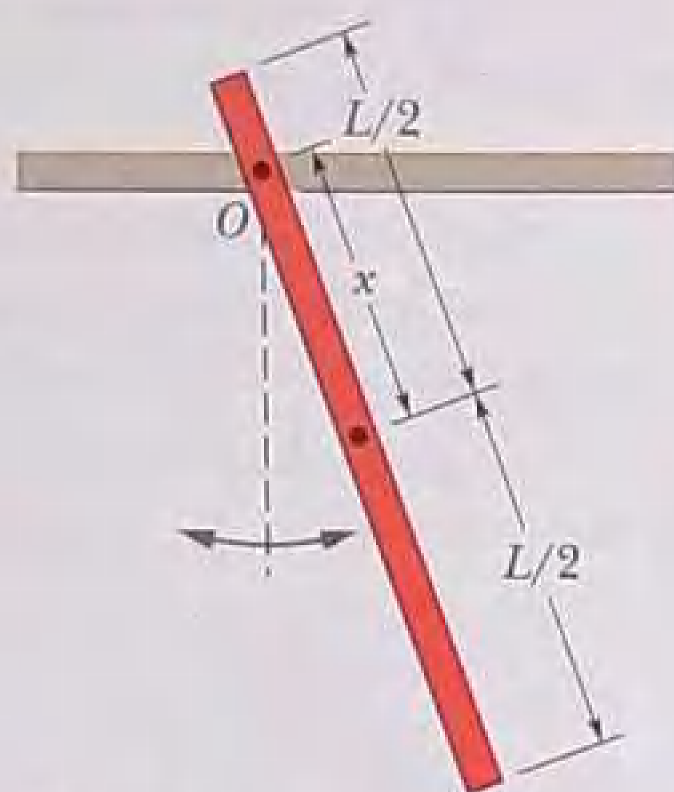


Figura 15-44 Problema 51.

••52 O cubo de 3,00 kg na Fig. 15-45 tem d = 6,00 cm de aresta e está montado em um eixo que passa pelo centro. Uma mola (k = 1200 N/m) liga o vértice superior do cubo a uma parede rígida. Inicialmente, a mola está relaxada. Se o cubo é girado de 3° e liberado, qual é o período do MHS resultante?

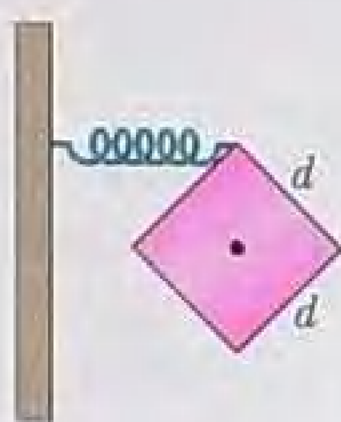


Figura 15-45 Problema 52.

••53 Na vista superior da Fig. 15-46, uma barra longa e uniforme de massa 0,600 kg está livre para girar em um plano horizontal em torno de um eixo vertical que passa pelo centro. Uma mola de constante elástica k = 1850 N/m é ligada horizontalmente entre uma das extremidades da barra e uma parede fixa. Quando a barra está em equilíbrio, fica paralela à parede. Qual é o período das pequenas oscilações que acontecem quando a barra é girada ligeiramente e depois liberada?



Figura 15-46 Problema 53.

••54 Na Fig. 15-47a, uma placa de metal está montada em um eixo que passa pelo centro de massa. Uma mola com k = 2000 N/m está ligada a uma parede e a um ponto da borda da placa a uma distância r = 2,5 cm do centro de massa. Inicialmente, a mola está relaxada. Se a placa é girada de 7° e liberada, oscila em torno do eixo em um MHS, com a posição angular dada pela Fig. 15-47b. A escala do eixo horizontal é definida por t_s = 20 ms. Qual é o momento de inércia da placa em relação ao centro de massa?

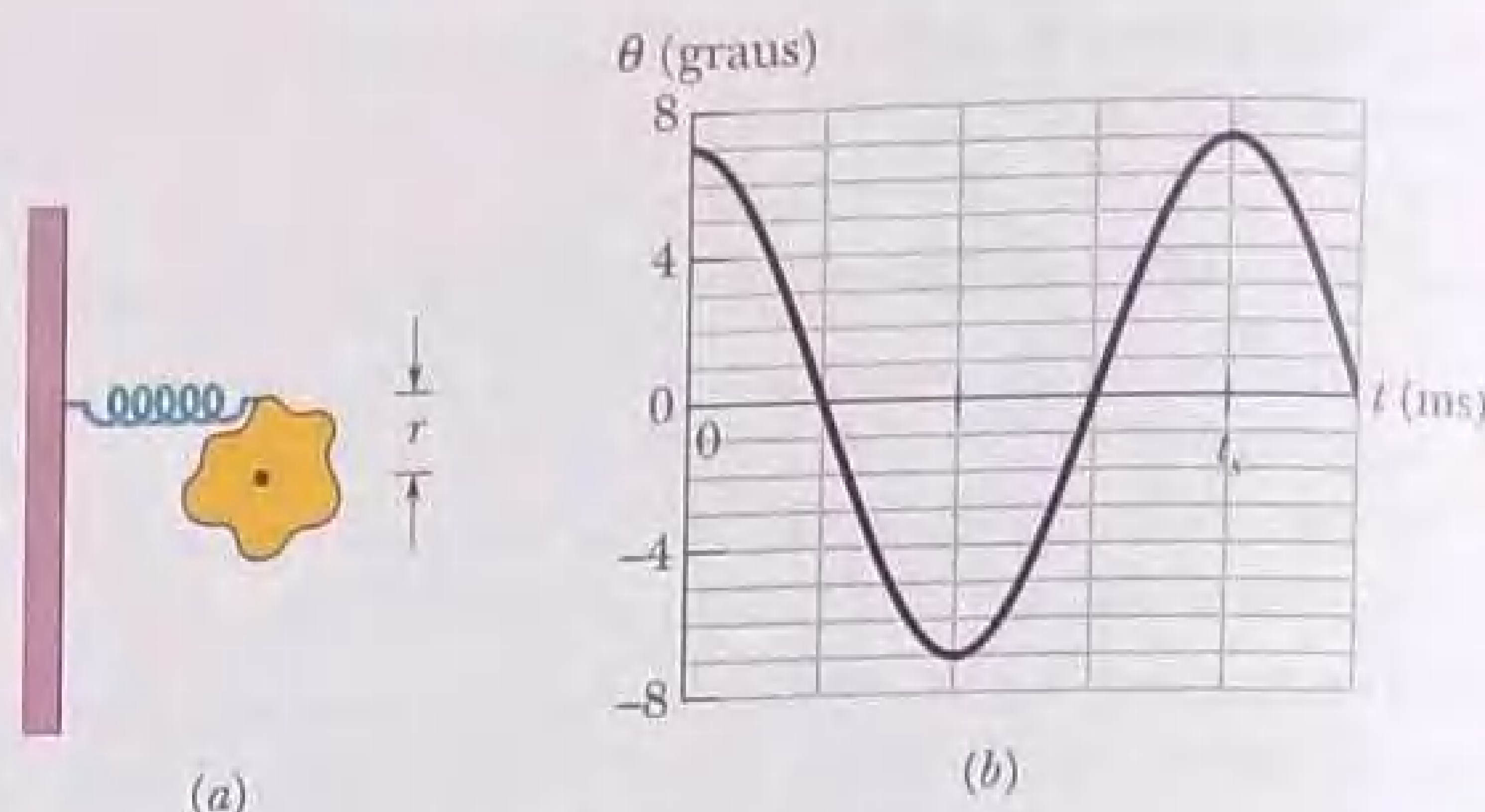


Figura 15-47 Problema 54.

•••55 Um pêndulo é formado suspendendo por um ponto uma barra longa e fina. Em uma série de experimentos, o período é medido em função da distância x entre o ponto de suspensão e o centro da barra. (a) Se o comprimento da barra é L = 2,20 m e a massa é m = 22,1 g, qual é o menor período? (b) Se x é escolhido de modo a minimizar o período e L é aumentado, o período aumenta, diminui ou permanece o mesmo? (c) Se, em vez disso, m for aumentada com L mantido constante, o período aumenta, diminui ou permanece o mesmo?

•••56 Na Fig. 15-48, um disco de 2,50 kg com D = 42,0 cm de diâmetro está preso a uma das extremidades de uma barra de comprimento L = 76,0 cm e massa desprezível que está suspensa pela outra extremidade. (a) Com a mola de torção de massa desprezível desconectada, qual é o período de oscilação? (b) Com a mola de torção conectada, a barra fica em equilíbrio na vertical. Qual é a constante de torção da mola se o período de oscilação diminuiu de 0,500 s?

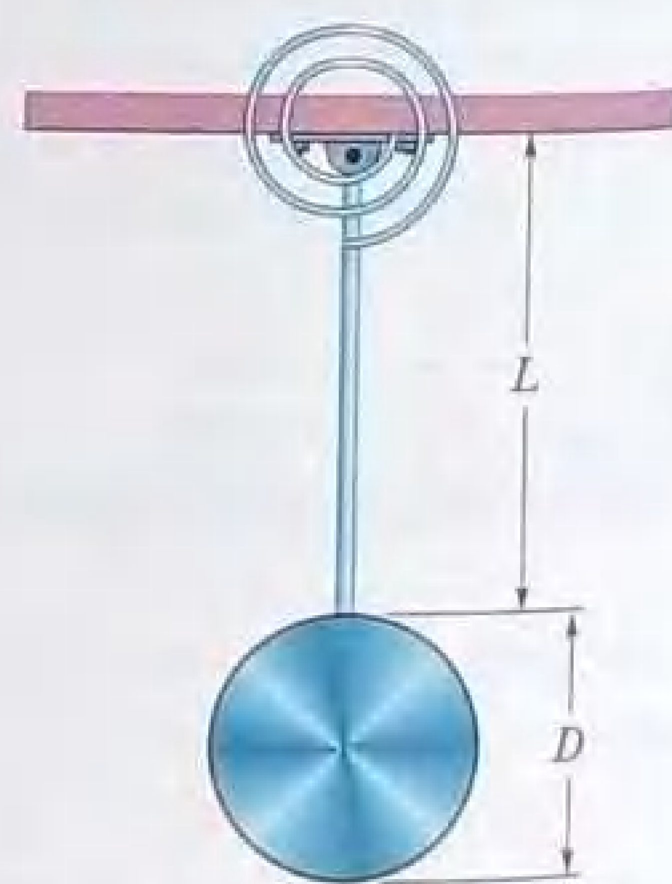


Figura 15-48 Problema 56.

Seção 15-8 Movimento Harmônico Simples Amortecido

•57 A amplitude de um oscilador fracamente amortecido diminui de 3,0% a cada ciclo. Que porcentagem da energia mecânica do oscilador é perdida em cada ciclo?

•58 Em um oscilador amortecido com m = 250 g, k = 85 N/m e b = 70 g/s, qual é a razão entre a amplitude das oscilações amortecidas e a amplitude inicial após 20 ciclos?

•59 Na Fig. 15-14, o bloco possui uma massa de 1,50 kg e a constante elástica é 8,00 N/m. A força de amortecimento é dada por $-b(dx/dt)$, onde b = 230 g/s. O bloco é puxado 12,0 cm para baixo e liberado. (a) Calcule o tempo necessário para que a amplitude das oscilações resultantes diminua para um terço do valor inicial. (b) Quantas oscilações o bloco realiza nesse intervalo de tempo?

••60 O sistema de suspensão de um automóvel de 2000 kg "cede" 10 cm quando o chassis é colocado no lugar. Além disso, a ampli-

tude das oscilações diminui de 50% a cada ciclo. Estime o valor (a) da constante elástica k e (b) da constante de amortecimento b do sistema mola–amortecedor de uma das rodas, supondo que cada roda sustenta 500 kg.

Seção 15-9 Oscilações Forçadas e Ressonância

•61 Suponha que, na Eq. 15-45, a amplitude x_m é dada por

$$x_m = \frac{F_m}{[m^2(\omega_d^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega_d^2]^{1/2}},$$

onde F_m é a amplitude (constante) da força alternada externa exercida sobre a mola pelo suporte rígido da Fig. 15-14. Qual é, na ressonância, (a) a amplitude do movimento e (b) a amplitude da velocidade do bloco?

•62 São pendurados em uma viga horizontal nove pêndulos com os seguintes comprimentos: (a) 0,10; (b) 0,30; (c) 0,40; (d) 0,80; (e) 1,2; (f) 2,8; (g) 3,5; (h) 5,0; (i) 6,2 m. A viga sofre oscilações horizontais com frequências angulares no intervalo de 2,00 rad/s a 4,00 rad/s. Quais dos pêndulos entram (fortemente) em oscilação?

••63 Um carro de 1000 kg com quatro ocupantes de 82 kg viaja em uma estrada de terra com "costelas" separadas por uma distância média de 4,0 m. O carro trepida com amplitude máxima quando está a 16 km/h. Quando o carro para e os ocupantes saltam, de quanto aumenta a altura do carro?

Problemas Adicionais

64 Embora o estado da Califórnia seja conhecido pelos terremotos, possui vastas regiões com rochas precariamente equilibradas que tombariam mesmo quando submetidas a um fraco tremor de terra. As rochas permaneceram na mesma situação por milhares de anos, o que sugere que grandes terremotos não ocorreram nessas regiões durante todo esse tempo. Se um terremoto submetesse uma dessas rochas a uma oscilação senoidal (paralela ao solo) com uma frequência de 2,2 Hz, uma amplitude de oscilação de 1,0 cm faria a rocha tombar. Qual seria o módulo da aceleração máxima da oscilação, em termos de g?

65 O diafragma de um alto-falante está oscilando em um movimento harmônico simples com uma frequência de 440 Hz e um deslocamento máximo de 0,75 mm. Qual é (a) a frequência angular, (b) a velocidade máxima e (c) o módulo da aceleração máxima?

66 Uma mola homogênea com k = 8600 N/m é cortada em dois pedaços, 1 e 2, cujos comprimentos no estado relaxado são L_1 = 7,0 cm e L_2 = 10 cm. Qual é o valor (a) de k_1 e (b) de k_2? Um bloco preso na mola original, como na Fig. 15-5, oscila com uma frequência de 200 Hz. Qual é a frequência de oscilação se o bloco for preso (c) no pedaço 1 e (d) no pedaço 2?

67 Na Fig. 15-49, três vagonetes de minério de 10.000 kg são mantidos em repouso sobre os trilhos de uma mina por um cabo paralelo aos trilhos, que possuem uma inclinação $\theta = 30°$ em relação à horizontal. O cabo sofre um alongamento de 15 cm imediatamente antes de o engate entre os dois vagonetes de baixo se romper, liberando um deles. Supondo que o cabo obedece à lei de Hooke, determine (a) a frequência e (b) a amplitude das oscilações dos dois vagonetes que restam.



Figura 15-49 Problema 67.

68 Um bloco de 2,00 kg está pendurado em uma mola. Quando um corpo de 300 g é pendurado no bloco, a mola sofre uma distensão adicional de 2,00 cm. (a) Qual é a constante elástica da mola? (b) Determine o período do movimento se o corpo de 300 g é removido e o bloco é posto para oscilar.

69 O êmbolo de uma locomotiva tem um curso (o dobro da amplitude) de 0,76 m. Se o êmbolo executa um movimento harmônico simples com uma frequência angular de 180 rev/min, qual é sua velocidade máxima?

70 Uma roda pode girar livremente em torno do eixo, que é mantido fixo. Uma mola está presa a um dos raios a uma distância r do eixo, como mostra a Fig. 15-50. (a) Supondo que a roda é um anel de massa m e raio R, qual é a frequência angular ω para pequenas oscilações deste sistema em termos de m, R, r e da constante elástica k? Qual é o valor de ω para (b) $r = R$ e (c) $r = 0$?

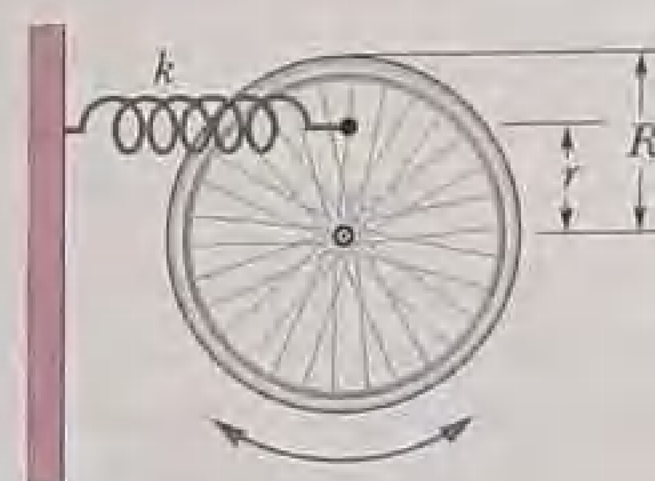


Figura 15-50 Problema 70.

71 Uma pedra de 50,0 g está oscilando na extremidade inferior de uma mola vertical. Se a maior velocidade da pedra é 15,0 cm/s e o período é 0,500 s, determine (a) a constante elástica da mola, (b) a amplitude do movimento e (c) a frequência de oscilação.

72 Um disco circular uniforme cujo raio R é 12,6 cm está suspenso por um ponto da borda para formar um pêndulo físico. (a) Qual é o período? (b) A que distância do centro $r < R$ existe um ponto de suspensão para o qual o período é o mesmo?

73 Uma mola vertical sofre uma distensão de 9,6 cm quando um bloco de 1,3 kg é pendurado na extremidade. (a) Calcule a constante elástica. O bloco é deslocado de mais 5,0 cm para baixo e liberado a partir do repouso. Determine (b) o período, (c) a frequência, (d) a amplitude e (e) a velocidade máxima do MHS resultante.

74 Uma mola de massa desprezível e constante elástica 19 N/m está pendurada verticalmente. Um corpo de massa 0,20 kg é preso na extremidade livre da mola e liberado. Suponha que a mola estava relaxada antes de o corpo ser liberado. Determine (a) a distância que o corpo atinge abaixo da posição inicial; (b) a frequência e (c) a amplitude do MHS resultante.

75 Um bloco de 4,00 kg está suspenso por uma mola com k = 500 N/m. Um bala de 50,0 g é disparada verticalmente contra o bloco, de baixo para cima, com uma velocidade de 150 m/s, e fica alojada no bloco. (a) Determine a amplitude do MHS resultante. (b) Que porcentagem da energia cinética original da bala é transferida para a energia mecânica do oscilador?

76 Um bloco de 55,0 g oscila em um MHS na extremidade de uma mola com k = 1500 N/m de acordo com a equação $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$. Quanto tempo o bloco leva para se deslocar da posição $+0{,}800x_m$ para a posição (a) $+0{,}600x_m$ e (b) $-0{,}800x_m$?

77 A Fig. 15-51 mostra a posição de um bloco de 20 g oscilando em um MHS na extremidade de uma mola. A escala do eixo horizontal é definida por t_s = 40,0 ms. Qual é (a) a energia cinética máxima do bloco e (b) o número de vezes por segundo que esse máximo é

atingido? (*Sugestão:* medir a inclinação de uma curva provavelmente fornecerá valores pouco precisos. Tente encontrar outro método.)

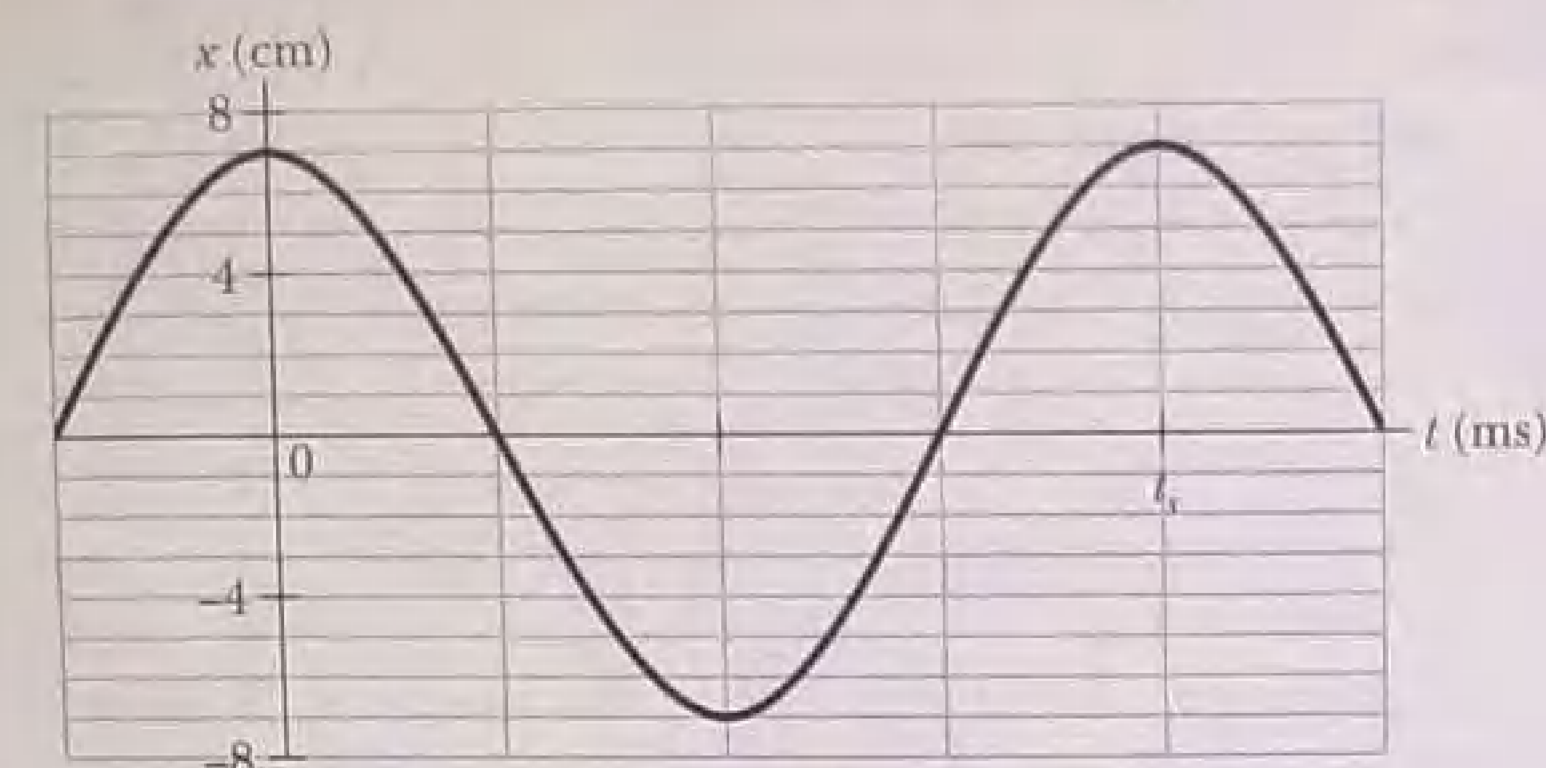


Figura 15-51 Problemas 77 e 78.

78 A Fig. 15-51 mostra a posição $x(t)$ de um bloco que oscila em um MHS na extremidade de uma mola (t_s = 40,0 ms). Qual é (a) a velocidade e (b) o módulo da aceleração radial de uma partícula no movimento circular uniforme correspondente?

79 A Fig. 15-52 mostra a energia cinética K de um pêndulo simples em função do ângulo θ com a vertical. A escala do eixo vertical é definida por K_s = 10,0 mJ. O peso do pêndulo tem uma massa de 0,200 kg. Qual é o comprimento do pêndulo?

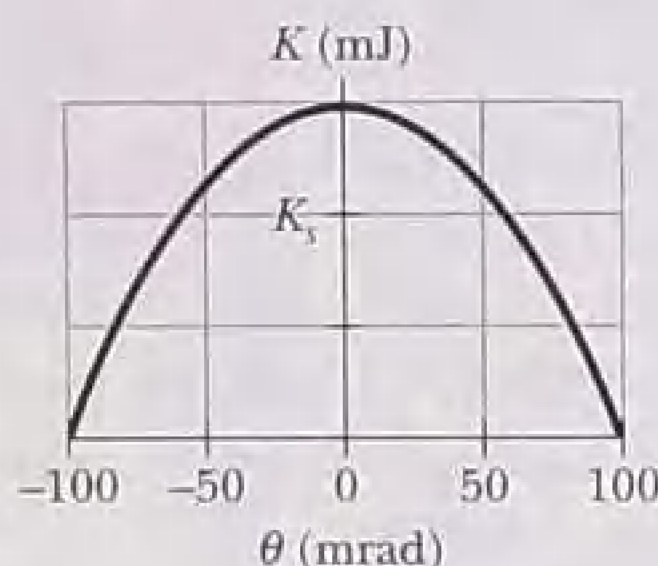


Figura 15-52 Problema 79.

80 Um bloco está em MHS na extremidade de uma mola, com a posição dada por $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$. Se $\phi = \pi/5$ rad, que porcentagem da energia mecânica total é energia potencial no instante $t = 0$?

81 Um oscilador harmônico simples é formado por um bloco de 0,50 kg preso a uma mola. O bloco oscila em linha reta, de um lado para outro, em uma superfície sem atrito, com o ponto de equilíbrio em $x = 0$. No instante $t = 0$, o bloco está em $x = 0$ e se move no sentido positivo de x. A Fig. 15-53 mostra o módulo da força aplicada $\vec{F}$ em função da posição do bloco. A escala vertical é definida por F_s = 75,0 N. Qual é (a) a amplitude do movimento, (b) o período do movimento, (c) o módulo da aceleração máxima e (d) a energia cinética máxima?

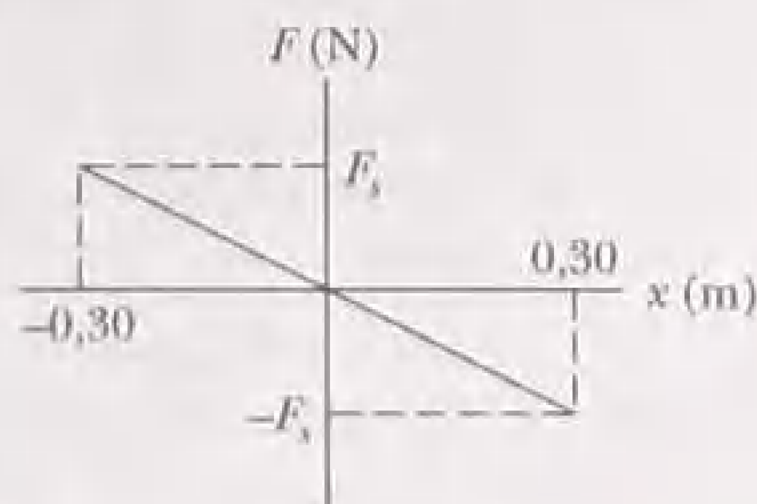


Figura 15-53 Problema 81.

82 Um pêndulo simples com 20 cm de comprimento e 5,0 g de massa está suspenso em um carro de corrida que se move com velocidade constante de 70 m/s, descrevendo uma circunferência com 50 m de raio. Se o pêndulo sofre pequenas oscilações na direção radial em torno da posição de equilíbrio, qual é a frequência dessas oscilações?

83 A escala de uma balança de mola que mede de 0 a 15,0 kg tem 12,0 cm de comprimento. Um pacote suspenso na balança oscila verticalmente com uma frequência de 2,00 Hz. (a) Qual é a constante elástica? (b) Quanto pesa o pacote?

84 Um bloco de 0,10 kg oscila em linha reta em uma superfície horizontal sem atrito. O deslocamento em relação à origem é dado por

$$x = (10\text{ cm})\cos[(10\text{ rad/s})t + \pi/2\text{ rad}].$$

(a) Qual é a frequência de oscilação? (b) Qual é a velocidade máxima do bloco? (c) Para que valor de x a velocidade é máxima? (d) Qual é o módulo da aceleração máxima do bloco? (e) Para que valor de x a aceleração é máxima? (f) Que força, aplicada ao bloco pela mola produz uma oscilação como essa?

85 A extremidade de uma mola oscila com um período de 2,0 s quando um bloco de massa m está preso à mola. Quando a massa é aumentada de 2,0 kg, o período do movimento passa a ser 3,0 s. Determine o valor de m.

86 A ponta de um diapasão executa um MHS com uma frequência de 1000 Hz e uma amplitude de 0,40 mm. Para esta ponta, qual é o módulo (a) da aceleração máxima, (b) da velocidade máxima, (c) da aceleração quando o deslocamento é 0,20 mm e (d) da velocidade quando o deslocamento é 0,20 mm?

87 Um disco plano circular uniforme possui uma massa de 3,00 kg e um raio de 70,0 cm e está suspenso em um plano horizontal por um fio vertical preso ao centro. Se o disco sofre uma rotação de 2,50 rad em torno do fio, é necessário um torque de 0,0600 N·m para manter essa orientação. Calcule (a) o momento de inércia do disco em relação ao fio, (b) a constante de torção e (c) a frequência angular deste pêndulo de torção quando é posto para oscilar.

88 Um bloco pesando 20 N oscila na extremidade de uma mola vertical para a qual k = 100 N/m; a outra extremidade da mola está presa a um teto. Em um certo instante, a mola está esticada 0,30 m além do comprimento relaxado (o comprimento quando nenhum objeto está preso à mola) e o bloco possui velocidade nula. (a) Qual é a força a que o bloco está submetido nesse instante? Qual é (b) a amplitude e (c) o período do movimento harmônico simples? (d) Qual é a energia cinética máxima do bloco?

89 Uma partícula de 3,0 kg está em movimento harmônico simples em uma dimensão e se move de acordo com a equação

$$x = (5,0\text{ m})\cos[(\pi/3\text{ rad/s})t - \pi/4\text{ rad}],$$

com t em segundos. (a) Para que valor de x a energia potencial da partícula é igual à metade da energia total? (b) Quanto tempo a partícula leva para se mover até a posição do item (a) a partir da posição de equilíbrio?

90 Uma partícula executa um MHS linear com uma frequência de 0,25 Hz em torno do ponto $x = 0$. Em $t = 0$, a partícula tem um deslocamento x = 0,37 cm e velocidade nula. Determine os seguintes parâmetros do MHS: (a) período, (b) frequência angular, (c) amplitude, (d) deslocamento $x(t)$, (e) velocidade $v(t)$, (f) velocidade máxima, (g) módulo da aceleração máxima, (h) deslocamento em t = 3,0 s e (i) velocidade em t = 3,0 s.

91 Qual é a frequência de um pêndulo simples de 2,0 m de comprimento (a) em uma sala, (b) em um elevador acelerando para cima a 2,0 m/s² e (c) em queda livre?

92 O pêndulo de um relógio é formado por um disco fino de latão de raio $r = 15{,}00$ cm e massa 1,000 kg ligado a uma barra longa e fina de massa desprezível. O pêndulo oscila livremente em torno de um eixo perpendicular à barra que passa pela extremidade oposta à do disco, como mostra a Fig. 15-54. Se o pêndulo deve ter um período de 2,000 s para pequenas oscilações num local onde $g = 9{,}800$ m/s², qual deve ser o comprimento L da haste com precisão de décimos de milímetro?

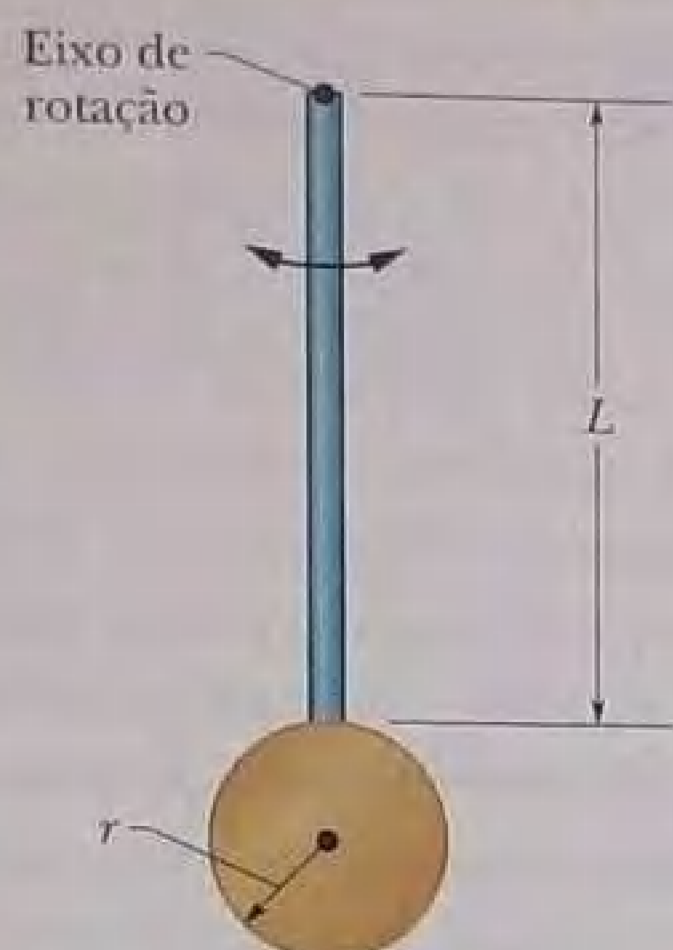


Figura 15-54 Problema 92.

93 Um bloco de 4,00 kg pendurado em uma mola produz um alongamento de 16,0 cm em relação à posição relaxada. (a) Qual é a constante elástica da mola? (b) O bloco é removido e um corpo de 0,500 kg é pendurado na mesma mola. Se a mola é distendida e liberada, qual é o período de oscilação?

94 Qual é a constante de fase do oscilador harmônico cuja função aceleração $a(t)$ aparece na Fig. 15-55 se a função posição $x(t)$ é da forma $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$ e $a_s = 4{,}0$ m/s²?

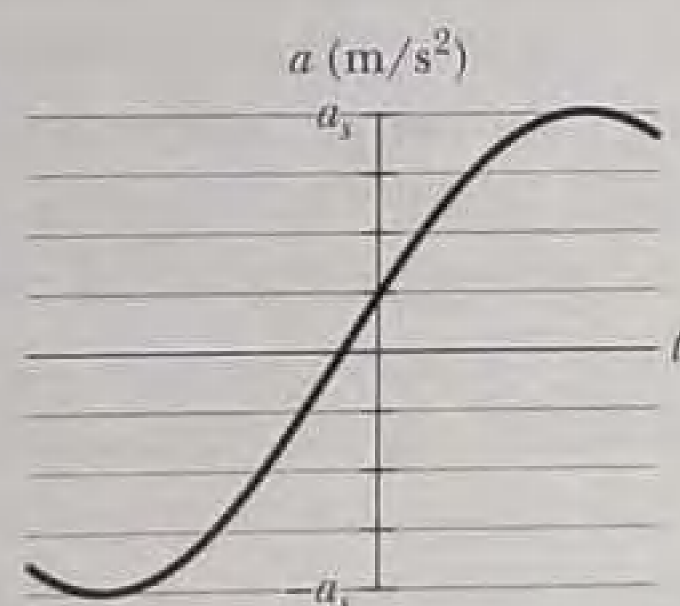
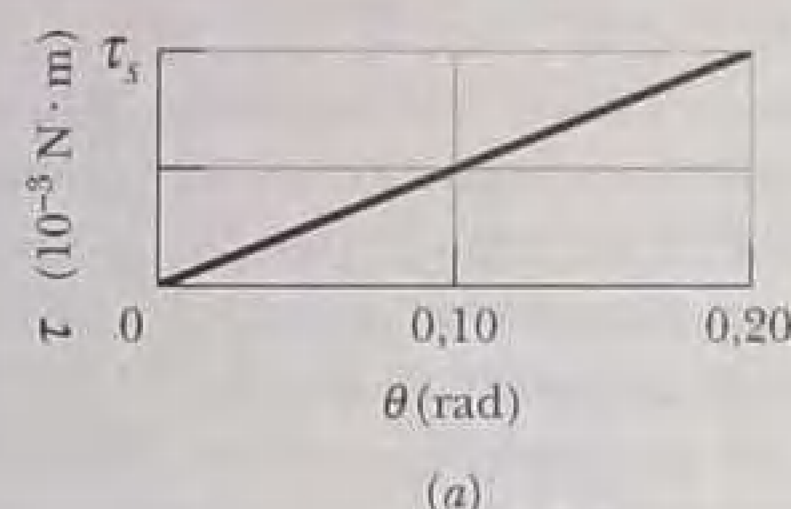


Figura 15-55 Problema 94.

95 Um engenheiro possui um objeto de 10 kg de forma irregular e precisa conhecer o momento de inércia do objeto em relação a um eixo que passa pelo centro de massa. O objeto é preso a um fio esticado cuja orientação é a mesma do eixo. O fio possui uma constante de torção $k = 0{,}50$ N · m. Se esse pêndulo de torção sofre 20 oscilações completas em 50 s, qual é o momento de inércia do objeto?

96 Uma aranha fica sabendo se sua teia capturou um inseto (uma mosca, por exemplo) porque os movimentos do inseto fazem oscilar os fios da teia. A aranha pode avaliar até mesmo o tamanho do inseto pela frequência das oscilações. Suponha que um inseto oscila no *fio de captura* como um bloco preso a uma mola. Qual é a razão entre a frequência de oscilação de um inseto de massa m e a frequência de oscilação de um inseto de massa $2{,}5m$?

97 Um pêndulo de torção é formado por um disco de metal com um fio soldado no centro. O fio é montado verticalmente e esticado. A Fig. 15-56*a* mostra o módulo τ do torque necessário para fazer o disco girar em torno do centro (torcendo o fio) em função do ângulo de rotação θ. A escala do eixo vertical é definida por $\tau_s = 4{,}0 \times 10^{-3}$ N · m. O disco é girado até $\theta = 0{,}200$ rad e depois liberado. A Fig. 15-56*b* mostra a oscilação resultante em termos da posição angular θ em função do tempo t. (a) Qual é o momento de inércia do disco em relação ao centro? (b) Qual é a velocidade angular máxima $d\theta/dt$ do disco? [*Atenção:* não confunda a frequência angular (constante) do MHS e a velocidade angular (variável) do disco, que normalmente são representadas pelo mesmo símbolo, ω. *Sugestão:* a energia potencial U do pêndulo de torção é igual a $\frac{1}{2}\kappa\theta^2$, uma expressão análoga à da energia potencial de uma mola, $U = \frac{1}{2}kx^2$.]



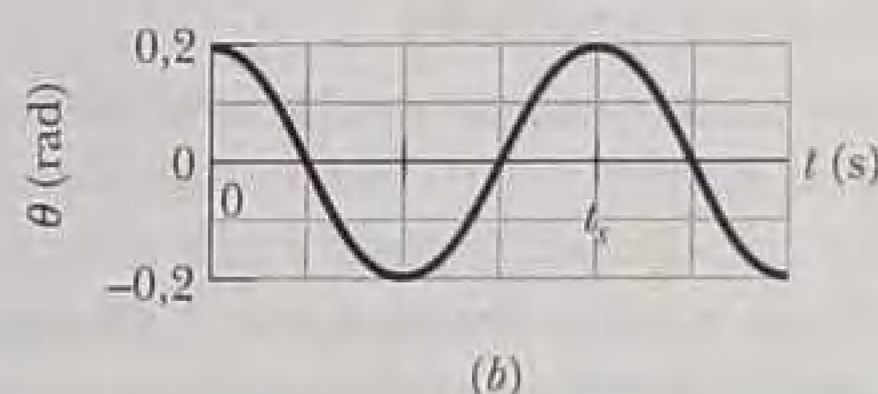


Figura 15-56 Problema 97.

98 Quando uma lata de 20 N é pendurada na extremidade inferior de uma mola vertical, a mola sofre uma distensão de 20 cm. (a) Qual é a constante elástica da mola? (b) A mesma mola é colocada horizontalmente em uma mesa sem atrito. Uma das extremidades é mantida fixa e a outra é presa a uma lata de 5,0 N. A lata é deslocada (esticando a mola) e liberada a partir do repouso. Qual é o período das oscilações?

99 Determine a amplitude angular θ_m das oscilações de um pêndulo simples para a qual a diferença entre o torque restaurador necessário para o movimento harmônico simples e o torque restaurador verdadeiro é igual a 1,0%. (Veja "Expansões Trigonométricas" no Apêndice E.)

100 Na Fig. 15-57, um cilindro maciço preso a uma mola horizontal ($k = 3{,}00$ N/m) rola sem deslizar em uma superfície horizontal. Se o sistema é liberado a partir do repouso quando a mola está distendida de 0,250 m, determine (a) a energia cinética de translação e (b) a energia cinética de rotação do cilindro ao passar pela posição de equilíbrio. (c) Mostre que, nessas condições, o centro de massa do cilindro executa um movimento harmônico simples de período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}},$$

onde M é a massa do cilindro. (*Sugestão:* calcule a derivada da energia mecânica total em relação ao tempo.)

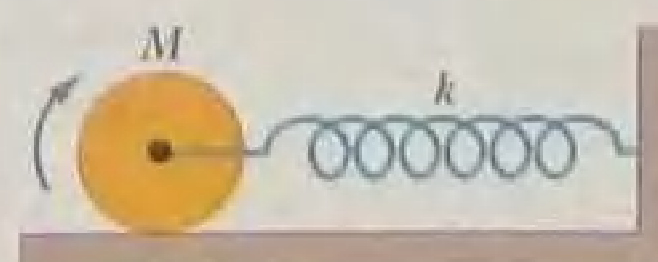


Figura 15-57 Problema 100.

101 Um bloco de 1,2 kg deslizando em uma superfície horizontal sem atrito está preso a uma mola horizontal com $k = 480$ N/m. Seja x o deslocamento do bloco a partir da posição na qual a mola se encontra relaxada. No instante $t = 0$, o bloco passa pelo ponto $x = 0$ com uma velocidade de 5,2 m/s no sentido positivo de x. Qual é (a) a frequência e (b) a amplitude do movimento do bloco? (c) Escreva uma expressão para o deslocamento x em função do tempo.

102 Um oscilador harmônico simples é formado por um bloco de 0,80 kg preso a uma mola ($k = 200$ N/m). O bloco desliza em uma superfície horizontal sem atrito em torno da posição de equilíbrio $x = 0$ com uma energia mecânica total de 4,0 J. (a) Qual é a amplitude das oscilações? (b) Quantas oscilações o bloco completa em 10 s? (c) Qual é a energia cinética máxima do bloco? (d) Qual é a velocidade do bloco em $x = 0,15$ m?

103 Um bloco que desliza em uma superfície horizontal sem atrito está preso a uma mola horizontal de constante elástica 600 N/m. O bloco executa um MHS em torno da posição de equilíbrio com um período de 0,40 s e uma amplitude de 0,20 m. Quando o bloco está passando pela posição de equilíbrio, uma bola de massa de modelar de 0,50 kg é deixada cair verticalmente no bloco. Se a massa fica grudada no bloco, determine (a) o novo período do movimento e (b) a nova amplitude do movimento.

104 Um oscilador harmônico amortecido é formado por um bloco ($m = 2,00$ kg), uma mola ($k = 10,0$ N/m) e uma força de amortecimento ($F = -bv$). Inicialmente, o bloco oscila com uma amplitude de 25,0 cm; devido ao amortecimento, a amplitude cai a três quartos do valor inicial após quatro oscilações completas. (a) Qual é o valor de b? (b) Qual é a energia "perdida" durante as quatro oscilações?

105 Um bloco pesando 10,0 N está preso à extremidade inferior de uma mola vertical ($k = 200,0$ N/m). A outra extremidade da mola está presa a um teto. O bloco oscila verticalmente e possui uma energia cinética de 2,00 J ao passar pelo ponto no qual a mola está relaxada. (a) Qual é o período de oscilação? (b) Use a lei de conservação da energia para determinar os maiores deslocamentos do bloco acima e abaixo do ponto no qual a mola fica relaxada. (Os dois valores não são necessariamente iguais.) (c) Qual é a amplitude de oscilação? (d) Qual é a energia cinética máxima do bloco?

106 Um oscilador harmônico simples é formado por um bloco preso a uma mola com $k = 200$ N/m. O bloco desliza em uma superfície sem atrito, com o ponto de equilíbrio em $x = 0$ e uma amplitude de 0,20 m. O gráfico da velocidade v do bloco em função do tempo t aparece na Fig. 15-58. Qual é (a) o período do MHS, (b) a massa do bloco, (c) o deslocamento do bloco no instante $t = 0$, (d) a aceleração do bloco no instante $t = 0,10$ s e (e) a energia cinética máxima do bloco?

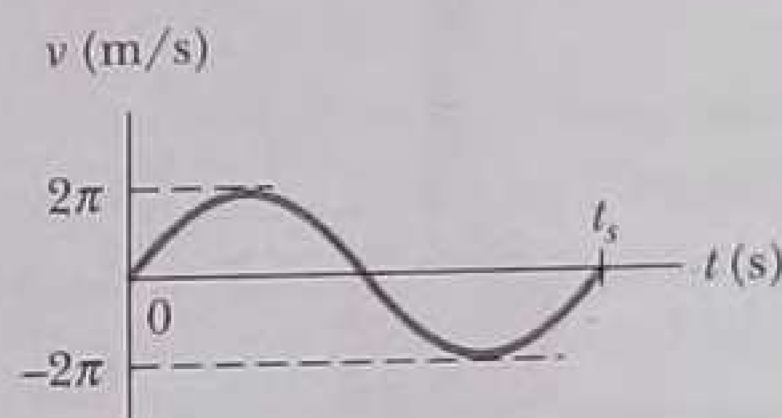


Figura 15-58 Problema 106.

107 As frequências de vibração dos átomos nos sólidos em temperaturas normais são da ordem de 10^{13} Hz. Imagine que os átomos estão ligados uns aos outros através de molas. Suponha que um átomo de prata em um sólido vibra com essa frequência e que todos os outros átomos estão em repouso. Calcule a constante elástica efetiva. Um mol ($6,02 \times 10^{23}$ átomos) de prata tem uma massa de 108 g.

CAPÍTULO

ONDAS-I

16

16-1 O QUE É FÍSICA?

As ondas são um dos principais campos de estudo da física. Para que o leitor tenha uma ideia da importância das ondas no mundo moderno, basta considerar a indústria musical. Toda música que escutamos, de um samba de rua a um sofisticado concerto sinfônico, envolve a produção de ondas pelos artistas e a detecção dessas ondas pela plateia. Da produção à detecção, a informação contida nas ondas pode ser transmitida por diversos meios (como no caso de uma apresentação ao vivo pela Internet) ou gravada e reproduzida (através de CDs, DVDs ou outros dispositivos atualmente em desenvolvimento nos centros de pesquisa). A importância econômica do controle de ondas musicais é enorme e a recompensa para os engenheiros que desenvolvem novas técnicas pode ser muito generosa.

Neste capítulo, vamos discutir as ondas que existem em meios sólidos, como as cordas de um violão. O próximo capítulo trata das ondas sonoras, como as que são produzidas no ar pelos instrumentos musicais. Antes, porém, vamos definir os tipos básicos em que podem ser divididas as ondas que fazem parte do nosso dia a dia.

16-2 Tipos de Ondas

As ondas podem ser de três tipos principais:

1. ***Ondas mecânicas.*** Essas ondas são as mais conhecidas, já que estão presentes em toda parte; são, por exemplo, as ondas do mar, as ondas sonoras e as ondas sísmicas. Todas possuem duas características: são governadas pelas leis de Newton e existem apenas em meios materiais, como a água, o ar e as rochas.
2. ***Ondas eletromagnéticas.*** Essas ondas podem ser menos conhecidas, mas são muito usadas; entre elas estão a luz visível e ultravioleta, as ondas de rádio e televisão, as micro-ondas, os raios X e as ondas de radar. As ondas eletromagnéticas não precisam de um meio material para existir. A luz das estrelas, por exemplo, atravessa o vácuo do espaço para chegar até nós. Todas as ondas eletromagnéticas se propagam no vácuo com a mesma velocidade $c = 299.792.458$ m/s.
3. ***Ondas de matéria.*** Embora essas ondas sejam usadas nos laboratórios, provavelmente o leitor não está familiarizado com elas. Estão associadas a elétrons, prótons e outras partículas elementares e mesmo a átomos e moléculas. São chamadas de ondas de matéria porque normalmente pensamos nas partículas como elementos de matéria.

Boa parte do que vamos discutir neste capítulo se aplica a ondas de todos os tipos. Os exemplos, porém, serão todos baseados em ondas mecânicas.

16-3 Ondas Transversais e Longitudinais

Uma onda que se propaga em uma corda esticada é a mais simples das ondas mecânicas. Quando damos uma sacudidela na ponta de uma corda esticada, um *pulso* se propaga ao longo da corda. O pulso se forma e se propaga porque a corda está sob tensão. Quando puxamos a ponta da corda para cima, a ponta puxa para cima a parte vizinha da corda por causa da tensão que existe entre as duas partes. Quando a parte vizinha se move para cima, puxa para cima a parte seguinte da corda e assim

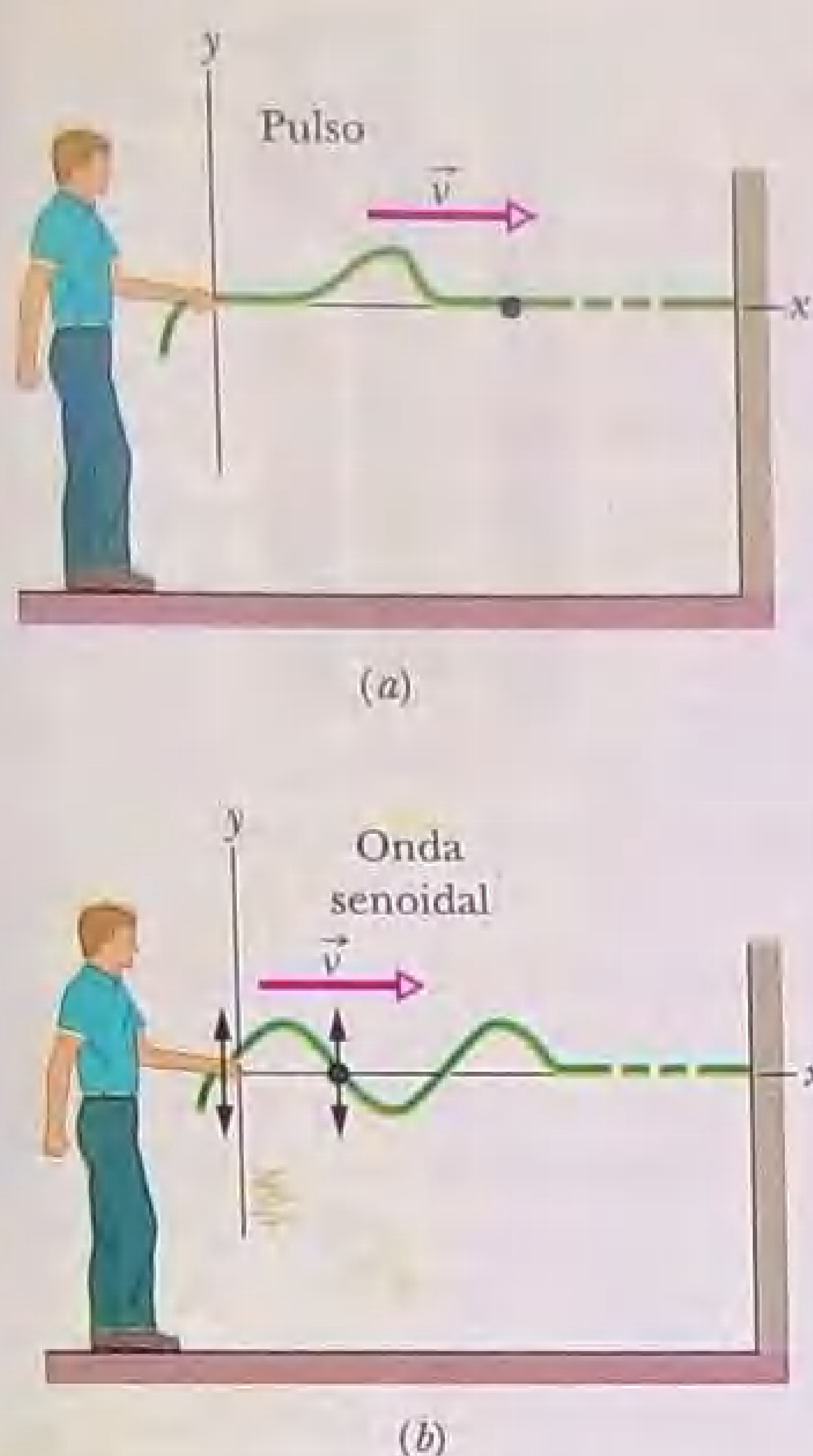


Figura 16-1 (*a*) Produção de um pulso isolado em uma corda. Com a passagem do pulso, um elemento típico da corda (indicado por um ponto) se desloca para cima e depois para baixo. Como o movimento do elemento é perpendicular à direção de propagação da onda, dizemos que o pulso é uma *onda transversal*. (*b*) Produção de uma onda senoidal. Um elemento típico da corda se move repetidamente para cima e para baixo. Esta também é uma onda transversal.

por diante. Enquanto isso está acontecendo, puxamos para baixo a extremidade da corda. Assim, as partes da corda que estão se deslocando para cima começam a ser puxadas de volta para baixo pelas partes vizinhas, que já se encontram em movimento descendente. O resultado geral é que a distorção da forma da corda (o pulso) se propaga ao longo da corda com uma velocidade $\vec{v}$.

Quando deslocamos a mão para cima e para baixo continuamente, em um movimento harmônico simples, uma onda contínua se propaga ao longo da corda com velocidade $\vec{v}$. Como o movimento da mão é uma função senoidal do tempo, a onda tem forma senoidal em qualquer instante, como na Fig. 16-1*b*, ou seja, a onda possui a forma da curva seno ou cosseno.

Vamos considerar apenas o caso de uma corda "ideal", na qual não existem forças de atrito para reduzir a amplitude da onda enquanto está se propagando. Além disso, vamos supor que a corda é tão comprida que não é preciso considerar o retorno da onda depois de atingir a outra extremidade.

Um modo de estudar as ondas da Fig. 16-1 é examinar a **forma de onda**, ou seja, a forma assumida pela corda em um dado instante. Outro modo consiste em observar o movimento de um elemento da corda enquanto oscila para cima e para baixo por causa da passagem da onda. Usando o segundo método, constatamos que o deslocamento dos elementos da corda é *perpendicular* à direção de propagação da onda, como mostra a Fig. 16-1*b*. Esse movimento é chamado de **transversal** e dizemos que a onda que se propaga em uma corda é uma **onda transversal**.

A Fig. 16-2 mostra como uma onda sonora pode ser produzida por um êmbolo em um tubo com ar. Quando deslocamos o êmbolo bruscamente para a direita e depois para a esquerda, enviamos um pulso sonoro ao longo do tubo. O movimento do êmbolo para a direita empurra as moléculas do ar para a direita, aumentando a pressão do ar nessa região. O aumento da pressão do ar empurra as moléculas vizinhas para a direita e assim por diante. O movimento do êmbolo para a esquerda reduz a pressão do ar nessa região. A redução da pressão do ar puxa as moléculas vizinhas para a esquerda e assim por diante. O movimento do ar e as variações da pressão do ar se propagam para a direita ao longo do tubo na forma de um pulso.

Quando deslocamos o êmbolo para a frente e para trás em um movimento harmônico simples, como na Fig. 16-2, uma onda senoidal se propaga ao longo do tubo. Como o movimento das moléculas de ar é paralelo à direção de propagação da onda, esse movimento é chamado de **longitudinal** e dizemos que a onda que se propaga no ar é uma **onda longitudinal**. Neste capítulo, vamos estudar as ondas transversais, principalmente as ondas em cordas; no Capítulo 17, vamos estudar as ondas longitudinais, principalmente as ondas sonoras.

Tanto as ondas transversais como as ondas longitudinais são chamadas de **ondas progressivas** quando se propagam de um lugar a outro, como no caso das ondas na corda da Fig. 16-1 e no tubo da Fig. 16-2. Observe que é a onda que se propaga e não o meio material (corda ou ar) no qual a onda se move.

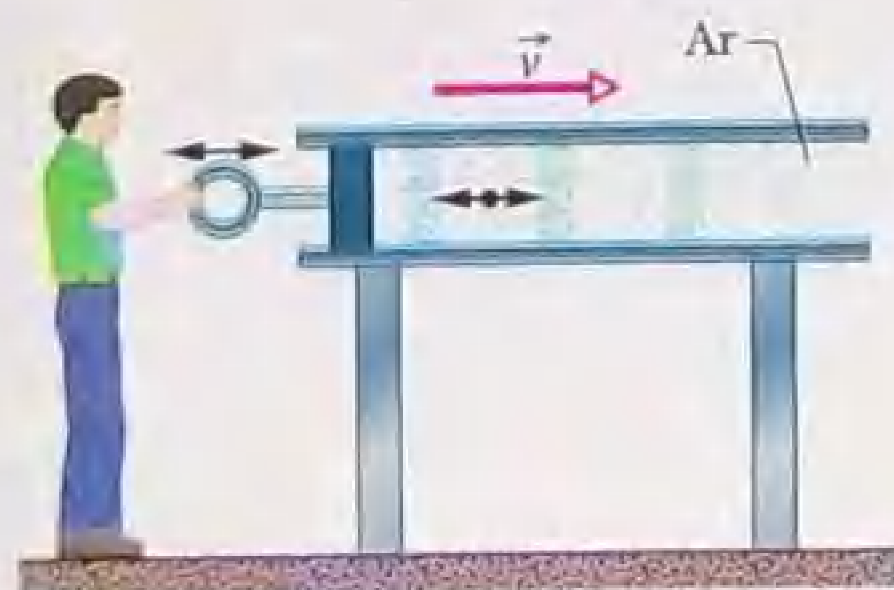


Figura 16-2 Uma onda sonora é produzida, em um tubo cheio de ar, movendo o êmbolo para a frente e para trás. Como as oscilações de um elemento de ar (representado pelo ponto) são paralelas à direção de propagação da onda, ela é uma *onda longitudinal*.

16-4 Comprimento de Onda e Frequência

Para descrever perfeitamente uma onda em uma corda (e o movimento de qualquer elemento da corda), precisamos de uma função que forneça a forma da onda. Isso significa que necessitamos de uma relação da forma

$$y = h(x, t), \tag{16-1}$$

onde y é o deslocamento transversal de um elemento da corda e h é uma função do tempo t e da posição x do elemento na corda. Qualquer forma senoidal como a da onda na Fig. 16-1*b* pode ser descrita tomando h como uma função seno ou uma função cosseno; ambas fornecem a mesma forma para a onda. Neste capítulo, vamos usar a função seno.

Imagine uma onda senoidal como a da Fig. 16-1*b* se propagando no sentido positivo de um eixo x. Quando a onda passa por elementos (ou seja, por trechos muito

pequenos) da corda, os elementos oscilam paralelamente ao eixo y. Em um instante t, o deslocamento y do elemento da corda situado na posição x é dado por

$$y(x,t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \quad (16\text{-}2)$$

Como a Eq. 16-2 está escrita em termos de uma posição genérica x e de um tempo genérico t, pode ser usada para calcular o deslocamento de todos os elementos da corda em um dado instante e a variação com o tempo do deslocamento de um dado elemento da corda em função do tempo. Assim, pode nos dizer qual é a forma da onda em um dado instante de tempo e como essa forma varia com o tempo.

Os nomes das grandezas da Eq. 16-2 são mostrados e definidos na Fig. 16-3. Antes de discuti-los, porém, vamos examinar a Fig. 16-4, que mostra cinco "instantâneos" de uma onda senoidal que se propaga no sentido positivo de um eixo x. O movimento da onda está indicado pelo deslocamento para a direita da seta vertical que aponta para um dos picos positivos da onda. De instantâneo para instantâneo, a seta se move para a direita juntamente com a forma da onda, mas a corda se move *apenas* paralelamente ao eixo y. Para confirmar esse fato, vamos acompanhar o movimento do elemento da corda em $x = 0$, pintado de vermelho. No primeiro instantâneo (Fig. 16-4*a*), o elemento está com um deslocamento $y = 0$. No instantâneo seguinte, está com o maior deslocamento possível para baixo porque um *vale* (ou máximo negativo) da onda está passando por ele. Em seguida, sobe de novo para $y = 0$. No quarto instantâneo, está com o maior deslocamento possível para cima porque um *pico* (ou máximo positivo) da onda está passando por ele. No quinto instantâneo, está novamente em $y = 0$, tendo completado um ciclo de oscilação.

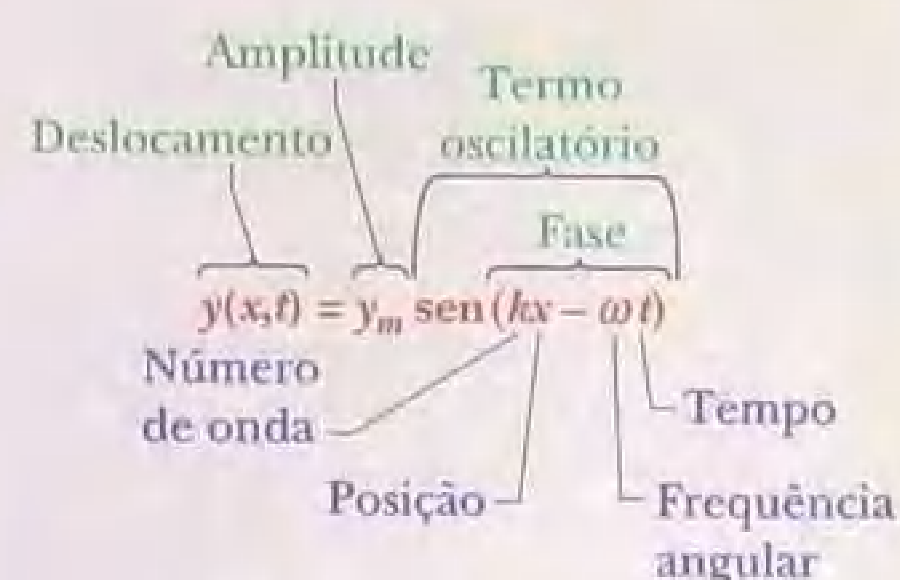


Figura 16-3 Nomes das grandezas da Eq. 16-2, para uma onda senoidal transversal.

Amplitude e Fase

A **amplitude** y_m de uma onda como a Fig. 16-4 é o módulo do deslocamento máximo sofrido pelos elementos a partir da posição de equilíbrio quando a onda passa por eles. (O índice m significa máximo.) Como y_m é um módulo, é sempre uma grandeza positiva, mesmo que seja medido para baixo e não para cima, como na Fig. 16-4*a*.

A **fase** da onda é o *argumento* $kx - \omega t$ do seno da Eq. 16-2. Quando a onda passa por um elemento da corda em uma dada posição x, a fase varia linearmente com o tempo t. Isso significa que o seno também varia, oscilando entre +1 e −1. O valor extremo positivo (+1) corresponde à passagem de um pico da onda pelo elemento; nesse instante, o valor de y na posição x é y_m. O valor extremo negativo (−1) corresponde à passagem de um vale da onda pelo elemento; nesse instante, o valor de y na posição x é $-y_m$. Assim, a função seno e a variação da fase da onda com o tempo correspondem à oscilação de um elemento da corda e a amplitude da onda determina os extremos do deslocamento do elemento.

Comprimento de Onda e Número de Onda

O **comprimento de onda** λ de uma onda é a distância (paralela à direção de propagação da onda) entre repetições da forma de onda. Um comprimento de onda típico está indicado na Fig. 16-4*a*, que é um instantâneo da onda em $t = 0$. Nesse instante, a Eq. 16-2 fornece, como descrição da forma de onda,

$$y(x,0) = y_m \operatorname{sen} kx. \quad (16\text{-}3)$$

Por definição, o deslocamento y é o mesmo nas duas extremidades do comprimento de onda, ou seja, em $x = x_1$ e $x = x_1 + \lambda$. Assim, de acordo com a Eq. 16-3,

$$y_m \operatorname{sen} kx_1 = y_m \operatorname{sen} k(x_1 + \lambda) = y_m \operatorname{sen}(kx_1 + k\lambda). \quad (16\text{-}4)$$

Uma função seno começa a se repetir quando o ângulo (ou argumento) aumenta de 2π rad; assim, na Eq. 16-4 devemos ter $k\lambda = 2\pi$ ou

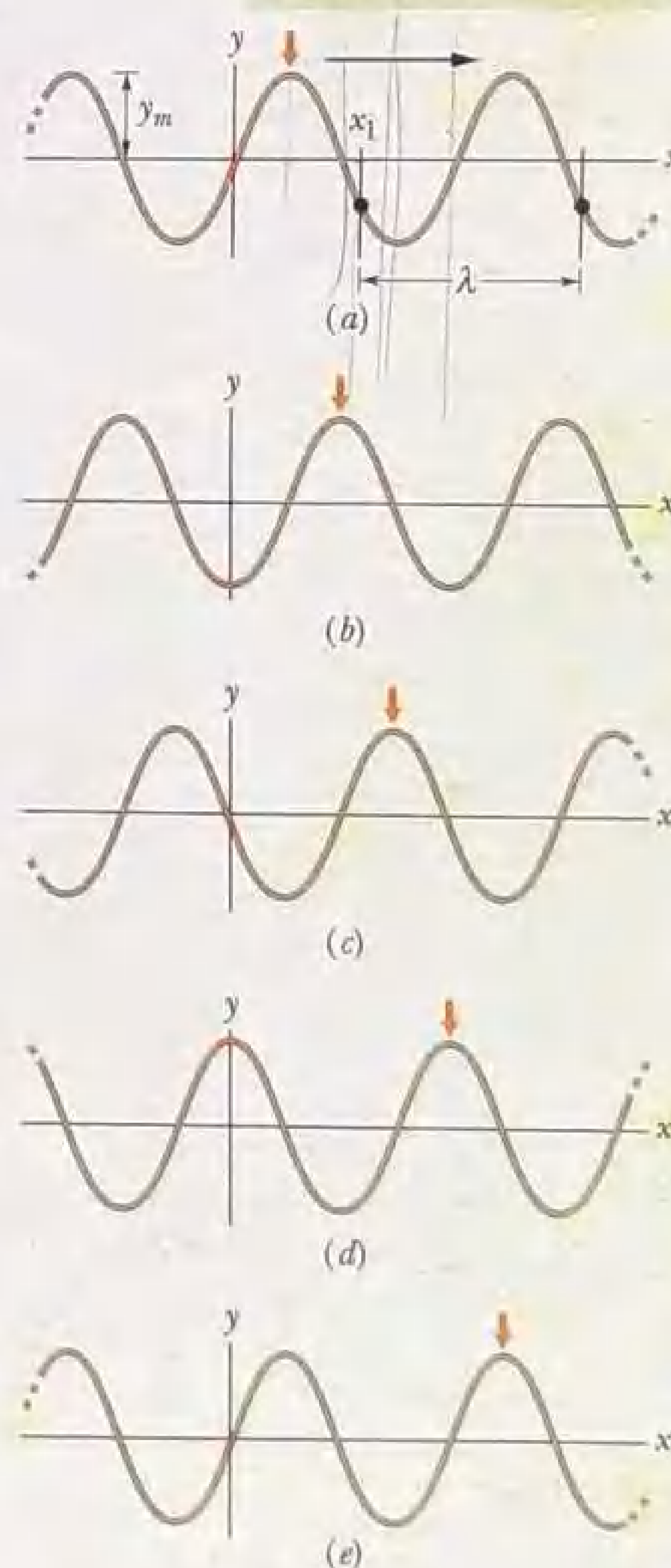


Figura 16-4 Cinco "instantâneos" de uma onda que está se propagando em uma corda no sentido positivo de um eixo x. A amplitude y_m está indicada. Um comprimento de onda λ típico, medido a partir de uma posição arbitrária x_1, também está indicado.

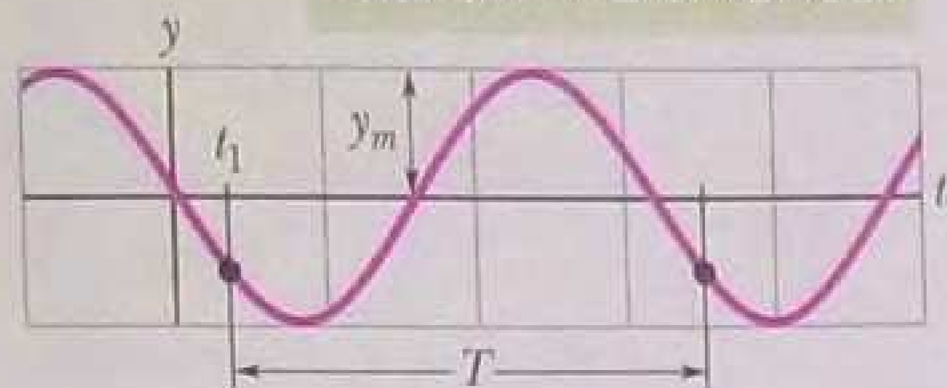


Figura 16-5 Gráfico do deslocamento do elemento da corda situado em $x = 0$ em função do tempo, quando a onda senoidal da Fig. 16-4 passa pelo elemento. A amplitude y_m está indicada. Um período T típico, medido a partir de um tempo arbitrário t_1, também está indicado.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{(número de onda).} \tag{16-5}$$

O parâmetro k é chamado de **número de onda**; sua unidade no SI é o radiano por metro ou m^{-1}. (Observe que, neste caso, o símbolo k *não representa* uma constante elástica, como em capítulos anteriores.)

Observe que a onda na Fig. 16-4 se move para a direita de $\lambda/4$ de um instantâneo para o seguinte. Assim, no quinto instantâneo, a onda se moveu para a direita de um comprimento de onda λ.

Período, Frequência Angular e Frequência

A Fig. 16-5 mostra um gráfico do deslocamento y da Eq. 16-2 em função do tempo t para um ponto da corda, tomado como o ponto $x = 0$. Observando a corda de perto, veríamos que o elemento da corda que está nessa posição se move para cima e para baixo em um movimento harmônico simples dado pela Eq. 16-2 com $x = 0$:

$$\begin{aligned} y(0, t) &= y_m \operatorname{sen}(-\omega t) \\ &= -y_m \operatorname{sen} \omega t \qquad (x = 0), \end{aligned} \tag{16-6}$$

em que fizemos uso do fato de que $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$ para qualquer valor de α. A Fig. 16-5 é um gráfico da Eq. 16-6; a curva *não mostra* a forma de onda.

Definimos o **período** T de oscilação de uma onda como o tempo que um elemento da corda leva para realizar uma oscilação completa. Um período típico está indicado no gráfico da Fig. 16-5. Aplicando a Eq. 16-6 às extremidades desse intervalo de tempo e igualando os resultados, obtemos:

$$\begin{aligned} -y_m \operatorname{sen} \omega t_1 &= -y_m \operatorname{sen} \omega(t_1 + T) \\ &= -y_m \operatorname{sen}(\omega t_1 + \omega T). \end{aligned} \tag{16-7}$$

A Eq. 16-7 é satisfeita apenas se $\omega T = 2\pi$ ou

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{(frequência angular).} \tag{16-8}$$

O parâmetro ω é chamado de **frequência angular** da onda; sua unidade no SI é o radiano por segundo.

Observe novamente os cinco instantâneos de uma onda progressiva mostrados na Fig. 16-4. Como o intervalo de tempo entre os instantâneos é $T/4$, no quinto instantâneo, todos os elementos da corda realizaram uma oscilação completa.

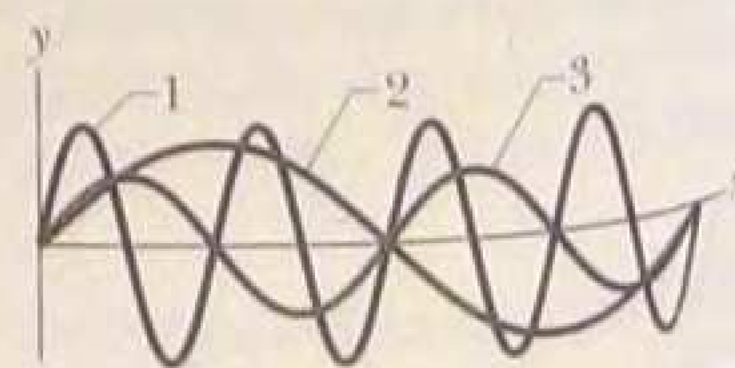
A **frequência** f de uma onda é definida como $1/T$ e está relacionada à frequência angular ω através da equação

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{(frequência).} \tag{16-9}$$

Do mesmo modo que a frequência do oscilador harmônico simples do Capítulo 15, a frequência f é o número de oscilações por unidade de tempo; neste caso, o número de oscilações realizadas por um elemento da corda. Como no Capítulo 15, f é medida em hertz ou múltiplos do hertz, como, por exemplo, o quilohertz.

TESTE 1

A figura é a superposição dos instantâneos de três ondas progressivas que se propagam em cordas diferentes. As fases das ondas são dadas por (a) $2x - 4t$, (b) $4x - 8t$ e (c) $8x - 16t$. Que fase corresponde a que onda na figura?



Constante de Fase

Quando uma onda progressiva senoidal é expressa pela função de onda da Eq. 16-2, a onda nas vizinhanças de $x = 0$ para $t = 0$ tem o aspecto mostrado na Fig. 16-6*a*. Note que, em $x = 0$, o deslocamento é $y = 0$ e a inclinação tem o valor máximo positivo. Podemos generalizar a Eq. 16-2 introduzindo uma **constante de fase** ϕ na função de onda:

$$y = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi). \qquad (16\text{-}10)$$

O valor de ϕ pode ser escolhido de tal forma que a função forneça outro deslocamento e inclinação em $x = 0$ para $t = 0$. Assim, por exemplo, a escolha de $\phi = +\pi/5$ rad fornece o deslocamento e a inclinação mostrados na Fig. 16-6*b* no instante $t = 0$. A onda ainda é senoidal com os mesmos valores de y_m, k e ω, mas agora está deslocada em relação à onda da Fig. 16-6*a* (para a qual $\phi = 0$).

O efeito da constante de fase ϕ é deslocar a forma de onda.

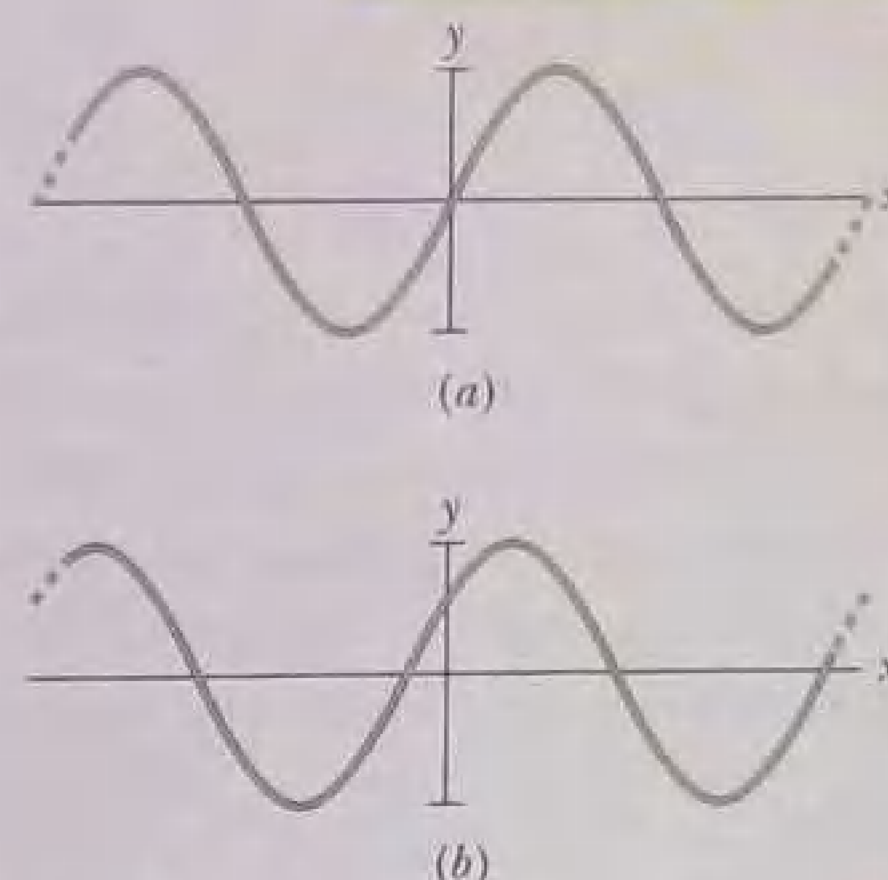


Figura 16-6 Uma onda progressiva senoidal no instante $t = 0$ com uma constante de fase (*a*) $\phi = 0$ e (*b*) $\phi = \pi/5$ rad.

16-5 A Velocidade de uma Onda Progressiva

A Fig. 16-7 mostra dois instantâneos da onda da Eq. 16-2, separados por um pequeno intervalo de tempo Δt. A onda está se propagando no sentido positivo de x (para a direita na Fig. 16-7), com toda a forma de onda se deslocando de uma distância Δx nessa direção durante o intervalo Δt. A razão $\Delta x/\Delta t$ (ou, no limite diferencial, dx/dt) é a **velocidade** v da onda. Como podemos calcular o valor da velocidade?

Quando a onda da Fig. 16-7 se move, cada ponto da forma de onda, como o ponto A assinalado em um dos picos, conserva seu deslocamento y. (Os pontos da corda não conservam seus deslocamentos, mas os pontos da *forma de onda* o fazem.) Se o ponto A conserva seu deslocamento quando se move, a fase da Eq. 16-2, que determina esse deslocamento, deve permanecer constante:

$$kx - \omega t = \text{constante}. \qquad (16\text{-}11)$$

Observe que, embora este argumento seja constante, tanto x quanto t estão variando. Na verdade, quando t aumenta, x deve aumentar também para que o argumento permaneça constante. Isso confirma o fato de que a forma de onda se move no sentido positivo de x.

Para determinar a velocidade v da onda, derivamos a Eq. 16-11 em relação ao tempo, obtendo

$$k\frac{dx}{dt} - \omega = 0$$

ou

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k}. \qquad (16\text{-}12)$$

Usando a Eq. 16-5 ($k = 2\pi/\lambda$) e a Eq. 16-8 ($\omega = 2\pi/T$), podemos escrever a velocidade da onda na forma

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad \text{(velocidade da onda)}. \qquad (16\text{-}13)$$

De acordo com a equação $v = \lambda/T$, a velocidade da onda é igual a um comprimento de onda por período; a onda se desloca de uma distância igual a um comprimento de onda em um período de oscilação.

A Eq. 16-2 descreve uma onda que se propaga no sentido positivo de x. Podemos obter a equação de uma onda que se propaga no sentido oposto substituindo t por $-t$ na Eq. 16-2. Isso corresponde à condição

$$kx + \omega t = \text{constante}, \qquad (16\text{-}14)$$

que (compare com a Eq. 16-11) requer que x *diminua* com o tempo. Assim, uma onda que se propaga no sentido negativo de x é descrita pela equação

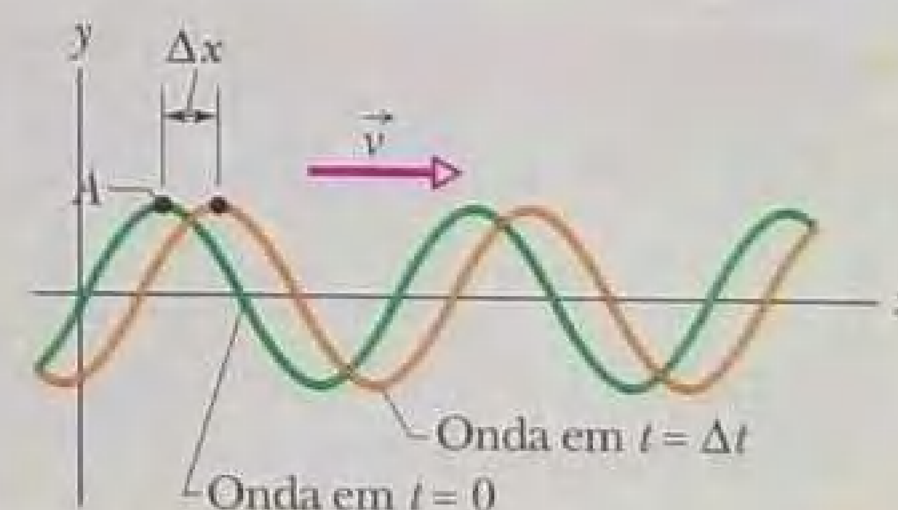


Figura 16-7 Dois instantâneos da onda da Fig. 16-4, nos instantes $t = 0$ e $t = \Delta t$. Quando a onda se move para a direita com velocidade $\vec{v}$, a curva inteira se desloca de uma distância Δx durante um intervalo de tempo Δt. O ponto A "viaja" com a forma da onda, mas os elementos da corda se deslocam apenas para cima e para baixo.

$$y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t). \tag{16-15}$$

Analisando a onda da Eq. 16-15 como fizemos para a onda da Eq. 16-2, descobrimos que a velocidade é dada por

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{k}. \tag{16-16}$$

O sinal negativo (compare com a Eq. 16-12) confirma que a onda está se propagando no sentido negativo de x e justifica a troca do sinal da variável tempo.

Considere agora uma onda de forma arbitrária, dada por

$$y(x, t) = h(kx \pm \omega t), \tag{16-17}$$

onde h representa *qualquer* função, sendo a função seno apenas uma das possibilidades. Nossa análise anterior mostra que todas as ondas nas quais as variáveis x e t aparecem em uma combinação da forma $kx \pm \omega t$ são ondas progressivas. Além disso, todas as ondas progressivas *devem ser* da forma da Eq. 16-17. Assim, $y(x, t) = \sqrt{ax + bt}$ representa uma possível (se bem que, fisicamente um pouco estranha) onda progressiva. A função $y(x, t) = \operatorname{sen}(ax^2 - bt)$, por outro lado, *não representa* uma onda progressiva.

TESTE 2

São dadas as equações de três ondas:

(1) $y(x, t) = 2\operatorname{sen}(4x - 2t)$, (2) $y(x, t) = \operatorname{sen}(3x - 4t)$, (3) $y(x, t) = 2\operatorname{sen}(3x - 3t)$.

Ordene as ondas de acordo (a) com a velocidade e (b) com a velocidade máxima na direção perpendicular à direção de propagação da onda (velocidade transversal), em ordem decrescente.

Exemplo

Amplitude, comprimento de onda, período e velocidade de uma onda transversal

Uma onda que se propaga em uma corda é descrita pela equação

$$y(x, t) = 0{,}00327 \operatorname{sen}(72{,}1x - 2{,}72t), \tag{16-18}$$

onde as constantes numéricas estão em unidades do SI (0,00327 m, 72,1 rad/m e 2,72 rad/s).

(a) Qual é a amplitude da onda?

IDEIA-CHAVE

A Eq. 16-18 tem a mesma forma que a Eq. 16-2,

$$y = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t), \tag{16-19}$$

e, portanto, trata-se de uma onda senoidal. Comparando as duas equações, podemos determinar a amplitude.

Cálculo Vemos que

$$y_m = 0{,}00327 \text{ m} = 3{,}27 \text{ mm}. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Quais são o comprimento de onda, o período e a frequência da onda?

Cálculos Comparando as Eqs. 16-18 e 16-19, vemos que o número de onda e a frequência angular são

$$k = 72{,}1 \text{ rad/m} \quad \text{e} \quad \omega = 2{,}72 \text{ rad/s}.$$

A relação entre λ e k é dada pela Eq. 16-5:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi \text{ rad}}{72{,}1 \text{ rad/m}} = 0{,}0871 \text{ m} = 8{,}71 \text{ cm}. \quad \text{(Resposta)}$$

A relação entre T e ω é dada pela Eq. 16-8:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{2{,}72 \text{ rad/s}} = 2{,}31 \text{ s}, \quad \text{(Resposta)}$$

e, de acordo com a Eq. 16-9, temos

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2{,}31 \text{ s}} = 0{,}433 \text{ Hz}. \quad \text{(Resposta)}$$

(c) Qual é a velocidade da onda?

Cálculo A velocidade da onda é dada pela Eq. 16-13:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2{,}72 \text{ rad/s}}{72{,}1 \text{ rad/m}} = 0{,}0377 \text{ m/s} = 3{,}77 \text{ cm/s}. \quad \text{(Resposta)}$$

Como a fase da Eq. 16-18 contém a variável posição x, a onda está se propagando ao longo do eixo x. Além disso, como a equação da onda está escrita na forma da Eq. 16-2, o sinal *negativo* na frente do termo ωt mostra que a onda está se propagando no sentido *positivo* do eixo x. [Observe que as grandezas calculadas nos itens (b) e (c) não dependem da amplitude da onda.]

(d) Qual é o deslocamento y para $x = 22{,}5$ cm e $t = 18{,}9$ s?

Cálculo A Eq. 16-18 fornece o deslocamento em função da posição x e do tempo t. Substituindo os valores dados na equação, temos:

$$\begin{aligned} y &= 0{,}00327\ \text{sen}(72{,}1 \times 0{,}225 - 2{,}72 \times 18{,}9) \\ &= (0{,}00327\ \text{m})\ \text{sen}(-35{,}1855\ \text{rad}) \\ &= (0{,}00327\ \text{m})(0{,}588) \\ &= 0{,}00192\ \text{m} = 1{,}92\ \text{mm}. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

Assim, o deslocamento é positivo. (Não esqueça de mudar o modo da calculadora, se necessário, de graus para radianos antes de calcular o seno. Note que *não arredondamos* o argumento do seno antes de calcular o seno. Note ainda que os dois termos do argumento estão em radianos, uma grandeza adimensional, como não podia deixar de ser.)

Exemplo

Velocidade transversal e aceleração transversal de uma onda transversal

No exemplo anterior, mostramos que em $t = 18{,}9$ s o deslocamento transversal y do elemento da corda situado em $x = 22{,}5$ cm provocado pela onda da Eq. 16-18 é 1,92 mm.

(a) Qual é a velocidade transversal u desse elemento da corda nesse instante t? (Essa velocidade, associada à oscilação transversal de um elemento da corda, é uma velocidade na direção y que varia com o tempo e não deve ser confundida com v, a velocidade constante com a qual a *forma da onda* se propaga na direção x.)

IDEIAS-CHAVE

A velocidade transversal u é a taxa de variação com o tempo do deslocamento y de um elemento da corda. O deslocamento é dado por

$$y(x, t) = y_m\ \text{sen}(kx - \omega t). \quad (16\text{-}20)$$

Para um elemento em certa posição x, podemos calcular a taxa de variação de y derivando a Eq. 16-20 em relação a t e mantendo x constante. Uma derivada calculada enquanto uma (ou mais) das variáveis é tratada como constante é chamada de *derivada parcial* e representada pelo símbolo $\partial/\partial x$ em vez de d/dx.

Cálculos Temos:

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t). \quad (16\text{-}21)$$

Substituindo os valores numéricos do exemplo anterior, obtemos

$$\begin{aligned} u &= (-2{,}72\ \text{rad/s})(3{,}27\ \text{mm})\cos(-35{,}1855\ \text{rad}) \\ &= 7{,}20\ \text{mm/s}. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

Assim, em $t = 18{,}9$ s, o elemento da corda situado em $x = 22{,}5$ cm está se movendo no sentido positivo de y com uma velocidade de 7,20 mm/s.

(b) Qual é a aceleração transversal a_y do mesmo elemento nesse instante?

IDEIA-CHAVE

A aceleração transversal a_y é a taxa com a qual a velocidade transversal do elemento está variando.

Cálculos De acordo com a Eq. 16-21, tratando novamente x como uma constante e permitindo que t varie, obtemos

$$a_y = \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega^2 y_m\ \text{sen}(kx - \omega t).$$

Comparando este resultado com a Eq. 16-20, vemos que

$$a_y = -\omega^2 y.$$

A aceleração transversal de um elemento de uma corda é, portanto, proporcional ao deslocamento transversal com o sinal oposto. Isso está de acordo com o fato de que o elemento está se movendo transversalmente em um movimento harmônico simples. Substituindo os valores numéricos, obtemos

$$\begin{aligned} a_y &= -(2{,}72\ \text{rad/s})^2(1{,}92\ \text{mm}) \\ &= -14{,}2\ \text{mm/s}^2. \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

Assim, em $t = 18{,}9$ s, o elemento da corda em $x = 22{,}5$ cm está deslocado de 1,92 mm em relação à posição de equilíbrio no sentido positivo de y e possui uma aceleração de módulo 14,2 mm/s² no sentido negativo de y.

16-6 Velocidade da Onda em uma Corda Esticada

A velocidade de uma onda está relacionada ao comprimento de onda e à frequência através da Eq. 16-13, mas *é determinada pelas propriedades do meio*. Se uma onda se propaga em um meio como a água, o ar, o aço ou uma corda esticada, a passagem da onda faz com que as partículas do meio oscilem. Para que isso aconteça, o meio deve possuir massa (para que possa haver energia cinética) e elasticidade (para que possa haver energia potencial). São as propriedades de massa e de elasticidade que determinam a velocidade com a qual a onda pode se propagar no meio. Assim, é possível expressar a velocidade da onda em um meio a partir dessas propriedades. Vamos fazer isso agora, de duas formas, para uma corda esticada.

Análise Dimensional

Na análise dimensional, examinamos as dimensões de todas as grandezas físicas que influenciam uma dada situação para determinar as grandezas resultantes. Neste caso, examinamos a massa e a elasticidade para determinar a velocidade v, que tem a dimensão de comprimento dividido por tempo, ou LT^{-1}.

No caso da massa, usamos a massa de um elemento da corda, que é a massa total m da corda dividida pelo comprimento l. Chamamos essa razão de *massa específica linear* μ da corda. Assim, $\mu = m/l$ e a dimensão dessa grandeza é massa dividida por comprimento, ML^{-1}.

Não podemos fazer uma onda se propagar em uma corda a menos que a corda esteja sob tensão, o que significa que foi alongada e mantida alongada por forças aplicadas às extremidades. A tensão τ da corda é igual ao módulo comum dessas duas forças. Uma onda que se propaga ao longo da corda desloca elementos da corda e provoca um alongamento adicional, com seções vizinhas da corda exercendo forças umas sobre as outras por causa da tensão. Assim, podemos associar a tensão da corda ao alongamento (elasticidade) da corda. A tensão e as forças de alongamento que produz possuem a dimensão de força, ou seja, MLT^{-2} (já que $F = ma$).

Precisamos combinar μ (dimensão ML^{-1}) e τ (dimensão MLT^{-2}) para obter v (dimensão LT^{-1}). O exame de várias combinações possíveis mostra que

$$v = C\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}, \tag{16-22}$$

onde C é uma constante adimensional que não pode ser determinada através de análise dimensional. Em nosso segundo método para determinar a velocidade da onda, veremos que a Eq. 16-22 está correta e que $C = 1$.

Demonstração Usando a Segunda Lei de Newton

Em vez da onda senoidal da Fig. 16-1*b*, vamos considerar um único pulso simétrico como o da Fig. 16-8, propagando-se em uma corda da esquerda para a direita com velocidade v. Por conveniência, escolhemos um referencial no qual o pulso permanece estacionário, ou seja, nos movemos juntamente com o pulso, mantendo-o sob observação. Nesse referencial, a corda parece passar por nós, movendo-se da direita para a esquerda na Fig. 16-8, com velocidade v.

Considere um pequeno elemento da corda de comprimento Δl na região do pulso, um elemento que forma um arco de circunferência de raio R e subtende um ângulo 2θ no centro dessa circunferência. Duas forças $\vec{\tau}$ cujo módulo é igual à tensão da corda puxam tangencialmente esse elemento nas duas extremidades. As componentes horizontais das forças se cancelam, mas as componentes verticais se somam para produzir uma força restauradora radial $\vec{F}$ cujo módulo é dado por

$$F = 2(\tau \operatorname{sen} \theta) \approx \tau(2\theta) = \tau\frac{\Delta l}{R} \quad \text{(força)}, \tag{16-23}$$

onde usamos a aproximação sen $\theta \approx \theta$ para pequenos ângulos θ na Fig. 16-8. Com

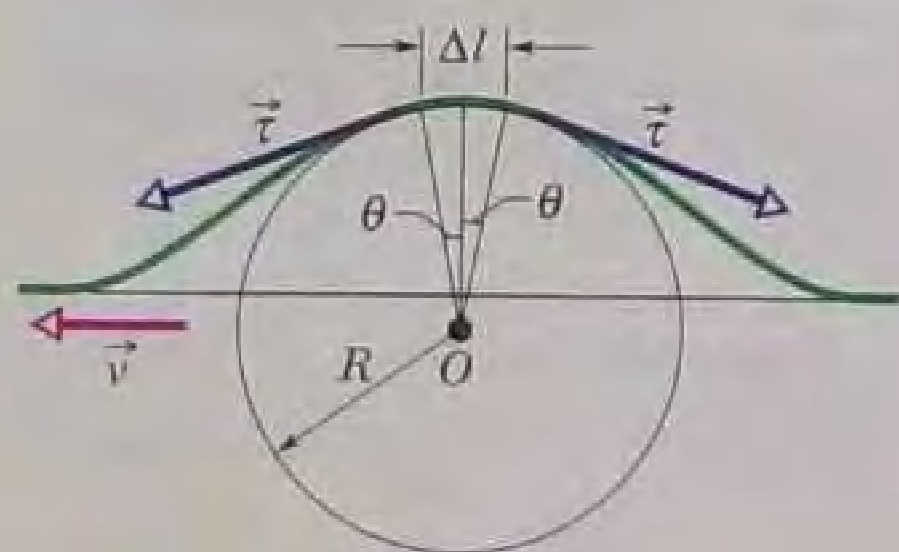


Figura 16-8 Um pulso simétrico, visto a partir de um referencial no qual o pulso está estacionário e a corda parece se mover da direita para a esquerda com velocidade v. Podemos determinar a velocidade v aplicando a segunda lei de Newton a um elemento da corda de comprimento Δl, situado no alto do pulso.

base na figura, usamos também a relação $2\theta = \Delta l/R$. A massa do elemento é dada por

$$\Delta m = \mu \, \Delta l \qquad \text{(massa)}, \tag{16-24}$$

onde μ é a massa específica linear da corda.

No instante mostrado na Fig. 16-8, o elemento de corda Δl está se movendo em um arco de circunferência. Assim, o elemento possui uma aceleração centrípeta dada por

$$a = \frac{v^2}{R} \qquad \text{(aceleração)}. \tag{16-25}$$

As Eqs. 16-23, 16-24 e 16-25 contêm os elementos da segunda lei de Newton. Combinando-os na forma

$$\text{força} = \text{massa} \times \text{aceleração}$$

obtemos

$$\frac{\tau \, \Delta l}{R} = (\mu \, \Delta l) \, \frac{v^2}{R}.$$

Explicitando a velocidade v, obtemos

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \qquad \text{(velocidade)}, \tag{16-26}$$

em perfeito acordo com a Eq. 16-22 se a constante C nesta equação tiver valor unitário. A Eq. 16-26 fornece a velocidade do pulso da Fig. 16-8 e a velocidade de *qualquer* outra onda na mesma corda e sob a mesma tensão.

A Eq. 16-26 nos diz o seguinte:

A velocidade de uma onda em uma corda ideal esticada depende apenas da tensão e da massa específica linear da corda e não depende da frequência da onda.

A *frequência* da onda é fixada inteiramente pela força que a produz (por exemplo, a força aplicada pela pessoa da Fig. 16-1*b*). O *comprimento de onda* da onda está relacionado à velocidade e à frequência pela Eq. 16-13, que nos dá $\lambda = v/f$.

TESTE 3

Você produz uma onda progressiva em uma certa corda fazendo oscilar uma das extremidades. Se você aumenta a frequência das oscilações, (a) a velocidade e (b) o comprimento de onda da onda aumentam, diminuem ou permanecem iguais? Se, em vez disso, você aumenta a tensão na corda, (c) a velocidade e (d) o comprimento de onda da onda aumentam, diminuem ou permanecem iguais?

16-7 Energia e Potência de uma Onda Progressiva em uma Corda

Quando produzimos uma onda em uma corda esticada, fornecemos energia para que a corda se mova. Quando a onda se afasta de nós, transporta essa energia como energia cinética e como energia potencial elástica. Vamos examinar as duas formas, uma de cada vez.

Energia Cinética

Um elemento da corda de massa dm, oscilando transversalmente em um movimento harmônico simples enquanto a onda passa por ele, possui energia cinética

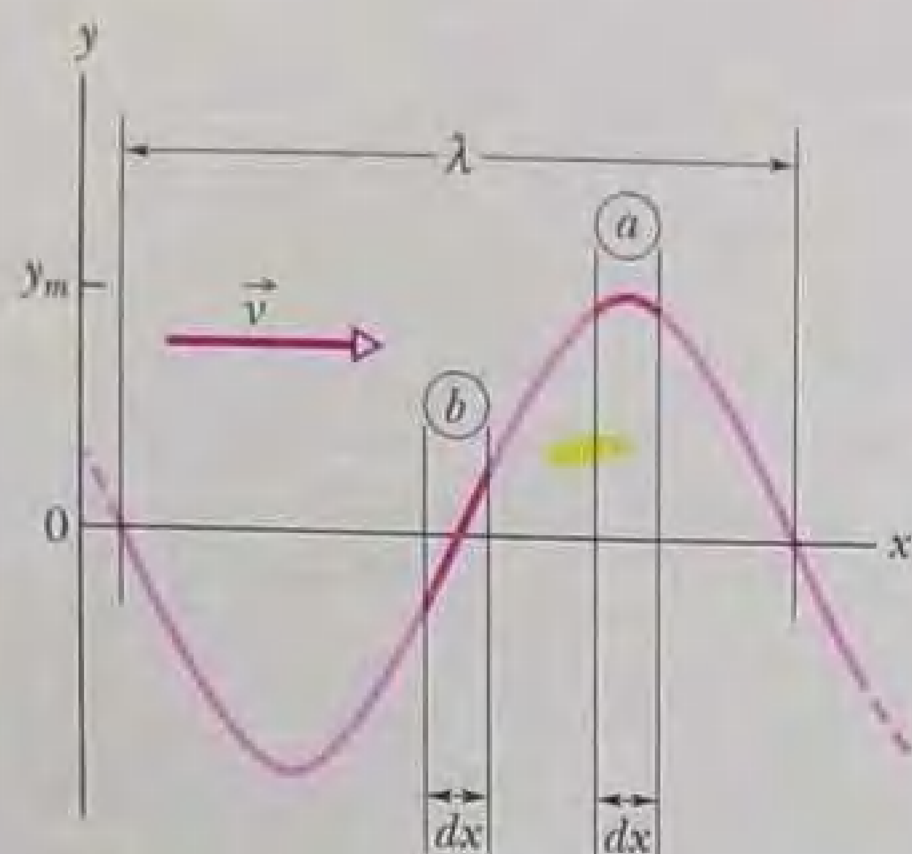


Figura 16-9 Instantâneo de uma onda progressiva em uma corda no instante $t = 0$. O elemento a da corda está sofrendo um deslocamento $y = y_m$ e o elemento b está sofrendo um deslocamento $y = 0$. A energia cinética depende da velocidade transversal do elemento; a energia potencial, do alongamento.

associada à velocidade transversal $\vec{u}$ do elemento. Quando o elemento está passando pela posição $y = 0$ (como o elemento b da Fig. 16-9), a velocidade transversal (e, portanto, a energia cinética) é máxima. Quando o elemento está na posição extrema $y = y_m$ (como o elemento a), a velocidade transversal (e, portanto, a energia cinética) é nula.

Energia Potencial Elástica

Quando uma corda inicialmente reta é atravessada por uma onda senoidal, os elementos da corda sofrem deformações. Ao oscilar transversalmente, um elemento da corda de comprimento dx aumenta e diminui periodicamente de comprimento para assumir a forma da onda senoidal. Como no caso de uma mola, a energia potencial elástica está associada a essas variações de comprimento.

Quando o elemento da corda está na posição $y = y_m$ (como o elemento a da Fig. 16-9), seu comprimento é o valor de repouso dx e, portanto, a energia potencial elástica é nula. Por outro lado, quando o elemento está passando pela posição $y = 0$, seu alongamento é máximo e, portanto, sua energia potencial elástica também é máxima.

Transporte de Energia

Os elementos da corda possuem, portanto, energia cinética máxima e energia potencial máxima em $y = 0$. No instantâneo da Fig. 16-9, as regiões da corda com deslocamento máximo não possuem energia e as regiões com deslocamento nulo possuem energia máxima. Quando a onda se propaga ao longo da corda, as forças associadas à tensão da corda realizam trabalho continuamente para transferir energia das regiões com energia para as regiões sem energia.

Suponha que produzimos em uma corda esticada ao longo de um eixo x horizontal uma onda como a da Eq. 16-2. Podemos produzir esse tipo de onda fazendo uma das extremidades da corda oscilar continuamente, como na Fig. 16-1b. Ao fazer isso, fornecemos energia para o movimento e alongamento da corda; quando as partes da corda se deslocam perpendicularmente ao eixo x, adquirem energia cinética e energia potencial elástica. Quando a onda passa por partes da corda que estavam anteriormente em repouso, a energia é transferida para essas partes. Assim, dizemos que a onda *transporta* energia ao longo da corda.

A Taxa de Transmissão de Energia

A energia cinética dK associada a um elemento da corda de massa dm é dada por

$$dK = \tfrac{1}{2}\, dm\, u^2, \tag{16-27}$$

onde u é a velocidade transversal do elemento da corda. Para determinar u, derivamos a Eq. 16-2 em relação ao tempo, mantendo x constante:

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t). \tag{16-28}$$

Usando essa relação e fazendo $dm = \mu\, dx$, a Eq. 16-27 se torna

$$dK = \tfrac{1}{2}(\mu\, dx)(-\omega y_m)^2 \cos^2(kx - \omega t). \tag{16-29}$$

Dividindo a Eq. 16-29 por dt, obtemos a taxa com a qual a energia cinética passa por um elemento da corda e, portanto, a taxa com a qual a energia cinética é transportada pela onda. Como a razão dx/dt que aparece do lado direito da Eq. 16-29 é a velocidade v da onda, temos:

$$\frac{dK}{dt} = \tfrac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t). \tag{16-30}$$

A taxa *média* com a qual a energia cinética é transportada é

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2\,[\cos^2(kx - \omega t)]_{\text{méd}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\mu v \omega^2 y_m^2, \qquad (16\text{-}31)$$

onde calculamos a média para um número inteiro de comprimentos de onda e usamos o fato de que o valor médio do quadrado de uma função cosseno para um número inteiro de períodos é $\frac{1}{2}$.

A energia potencial elástica também é transportada pela onda, com a mesma taxa média dada pela Eq. 16-31. Não vamos apresentar a demonstração, mas apenas lembrar que em um sistema oscilatório, como um pêndulo ou um sistema bloco–mola, a energia cinética média e a energia potencial média são iguais.

A **potência média**, que é a taxa média com a qual as duas formas de energia são transmitidas pela onda, é, portanto,

$$P_{\text{méd}} = 2\left(\frac{dK}{dt}\right)_{\text{méd}} \qquad (16\text{-}32)$$

ou, de acordo com a Eq. 16-31,

$$P_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2 \quad \text{(potência média)}. \qquad (16\text{-}33)$$

Os fatores μ e v nesta equação dependem do material e da tensão da corda. Os fatores ω e y_m dependem do processo usado para produzir a onda. A proporcionalidade entre a potência média de uma onda e o quadrado da amplitude e o quadrado da frequência angular é um resultado geral, válido para ondas de todos os tipos.

Exemplo

Potência média de uma onda transversal

Uma corda tem uma massa específica $\mu = 525$ g/m e está submetida a uma tensão $\tau = 45$ N. Uma onda senoidal de frequência $f = 120$ Hz e amplitude $y_m = 8{,}5$ mm é produzida na corda. Com que taxa média a onda transporta energia?

IDEIA-CHAVE

A taxa média de transporte de energia é a potência média $P_{\text{méd}}$, dada pela Eq. 16-33.

Cálculos Para usar a Eq. 16-33, precisamos conhecer a frequência angular ω e a velocidade v da onda. De acordo com a Eq. 16-9,

$$\omega = 2\pi f = (2\pi)(120\text{ Hz}) = 754\text{ rad/s}.$$

De acordo com a Eq. 16-26, temos:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{45\text{ N}}{0{,}525\text{ kg/m}}} = 9{,}26\text{ m/s}.$$

Nesse caso, a Eq. 16-33 nos dá

$$P_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2$$
$$= (\tfrac{1}{2})(0{,}525\text{ kg/m})(9{,}26\text{ m/s})(754\text{ rad/s})^2(0{,}0085\text{ m})^2$$
$$\approx 100\text{ W}. \qquad \text{(Resposta)}$$

16-8 A Equação de Onda

Quando uma onda passa por um elemento de uma corda esticada, o elemento se move perpendicularmente à direção de propagação da onda. Aplicando a segunda lei de Newton ao movimento do elemento, podemos obter uma equação diferencial geral, chamada de *equação de onda*, que governa a propagação de ondas de qualquer tipo.

A Fig. 16-10a mostra um instantâneo de um elemento de corda de massa dm e comprimento λ quando uma onda se propaga em uma corda de massa específica μ que está esticada ao longo de um eixo x horizontal. Vamos supor que a amplitude

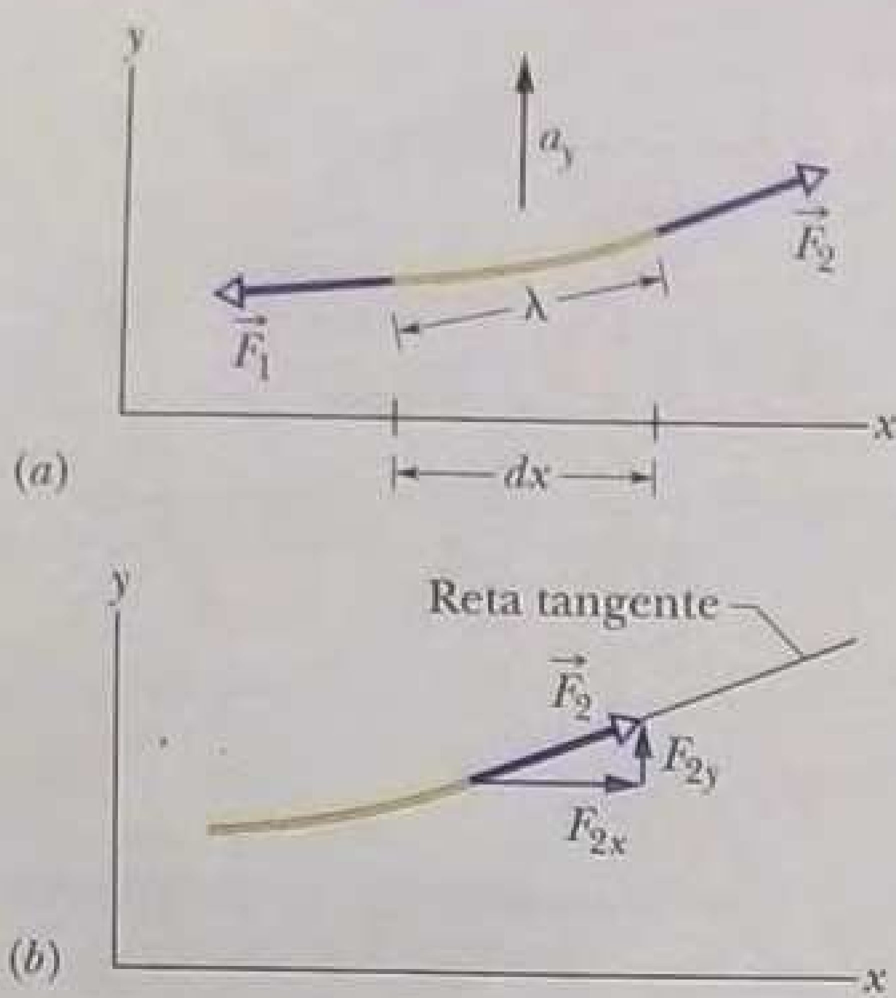


Figura 16-10 (*a*) Um elemento da corda quando uma onda senoidal transversal se propaga em uma corda esticada. As forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ agem nas extremidades do elemento, produzindo uma aceleração $\vec{a}$ com uma componente vertical a_y. (*b*) A força na extremidade direita do elemento está dirigida ao longo de uma reta tangente ao lado direito do elemento.

da onda é tão pequena que o elemento sofre apenas uma leve inclinação em relação ao eixo x quando a onda passa. A força $\vec{F}_2$ que age sobre a extremidade direita do elemento possui um módulo igual à tensão τ na corda e aponta ligeiramente para cima. A força $\vec{F}_1$ que age sobre a extremidade esquerda do elemento também possui um módulo igual à tensão τ, mas aponta ligeiramente para baixo. Devido à curvatura do elemento, a resultante das forças é diferente de zero e produz no elemento uma aceleração a_y para cima. A aplicação da segunda lei de Newton às componentes y $(F_{res,y} = ma_y)$ nos dá

$$F_{2y} - F_{1y} = dm\, a_y. \tag{16-34}$$

Vamos analisar por partes a Eq. 16-34.

Massa. A massa dm do elemento pode ser escrita em termos da massa específica μ da corda e do comprimento λ do elemento como $dm = \mu\lambda$. Como a inclinação do elemento é pequena, $\lambda \approx dx$ (Fig. 16-10a) e temos, aproximadamente,

$$dm = \mu\, dx. \tag{16-35}$$

Aceleração. A aceleração a_y da Eq. 16-34 é a derivada segunda do deslocamento y em relação ao tempo:

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2}. \tag{16-36}$$

Forças. A Fig. 16-10*b* mostra que $\vec{F}_2$ é tangente à corda na extremidade direita do elemento; assim, podemos relacionar as componentes da força à inclinação S_2 de extremidade direita da corda:

$$\frac{F_{2y}}{F_{2x}} = S_2. \tag{16-37}$$

Podemos também relacionar as componentes ao módulo F_2 $(= \tau)$:

$$F_2 = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2}$$

ou

$$\tau = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2}. \tag{16-38}$$

Entretanto, como estamos supondo que a inclinação do elemento é pequena, $F_{2y} \ll F_{2x}$ e a Eq. 16-38 se torna

$$\tau = F_{2x}. \tag{16-39}$$

Substituindo na Eq. 16-37 e explicitando F_{2y}, obtemos:

$$F_{2y} = \tau S_2. \tag{16-40}$$

Uma análise semelhante para a extremidade esquerda do elemento da corda nos dá

$$F_{1y} = \tau S_1. \tag{16-41}$$

Podemos agora substituir as Eqs. 16-35, 16-36, 16-40 e 16-41 na Eq. 16-34 para obter

$$\tau S_2 - \tau S_1 = (\mu\, dx)\frac{d^2y}{dt^2},$$

ou

$$\frac{S_2 - S_1}{dx} = \frac{\mu}{\tau}\frac{d^2y}{dt^2}. \tag{16-42}$$

Como o elemento de corda é curto, as inclinações S_2 e S_1 diferem apenas de um valor infinitesimal dS, onde S é a inclinação em qualquer ponto:

$$S = \frac{dy}{dx}. \tag{16-43}$$

Substituindo $S_2 - S_1$ na Eq. 16-42 por dS e usando a Eq. 16-43 para substituir S por dy/dx, obtemos

$$\frac{dS}{dx} = \frac{\mu}{\tau}\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$\frac{d(dy/dx)}{dx} = \frac{\mu}{\tau}\frac{d^2y}{dt^2},$$

e

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{\tau}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \qquad (16\text{-}44)$$

Na última passagem, mudamos a notação para derivadas parciais porque no lado esquerdo da equação derivamos apenas em relação a x e no lado direito derivamos apenas em relação a t. Finalmente, usando a Eq. 16-26 ($v = \sqrt{\tau/\mu}$), obtemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{(equação de onda).} \qquad (16\text{-}45)$$

A Eq. 16-45 é a equação diferencial geral que governa a propagação de ondas de todos os tipos.

16-9 O Princípio da Superposição de Ondas

Frequentemente acontece que duas ou mais ondas passam simultaneamente pela mesma região. Quando ouvimos um concerto ao vivo, por exemplo, as ondas sonoras dos vários instrumentos chegam simultaneamente aos nossos ouvidos. Os elétrons presentes nas antenas dos receptores de rádio e televisão são colocados em movimento pelo efeito combinado das ondas eletromagnéticas de muitas estações. A água de um lago ou de um porto pode ser agitada pela marola produzida por muitas embarcações.

Suponha que duas ondas se propagam simultaneamente na mesma corda esticada. Sejam $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$ os deslocamentos que a corda sofreria se cada onda se propagasse sozinha. O deslocamento da corda quando as ondas se propagam ao mesmo tempo é a soma algébrica

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t). \qquad (16\text{-}46)$$

Essa soma de deslocamentos significa que

> Ondas superpostas se somam algebricamente para produzir uma **onda resultante** ou **onda total**.

Este é outro exemplo do **princípio de superposição**, segundo o qual, quando vários efeitos ocorrem simultaneamente, o efeito total é a soma dos efeitos individuais.

A Fig. 16-11 mostra uma sequência de instantâneos de dois pulsos que se propagam em sentidos opostos na mesma corda esticada. Quando os pulsos se superpõem, o pulso resultante é a soma dos dois pulsos. Além disso, cada pulso passa pelo outro se ele não existisse:

> Ondas superpostas não se afetam mutuamente.

Quando duas ondas se superpõem, deixamos de perceber as ondas separadamente e percebemos apenas a onda resultante.

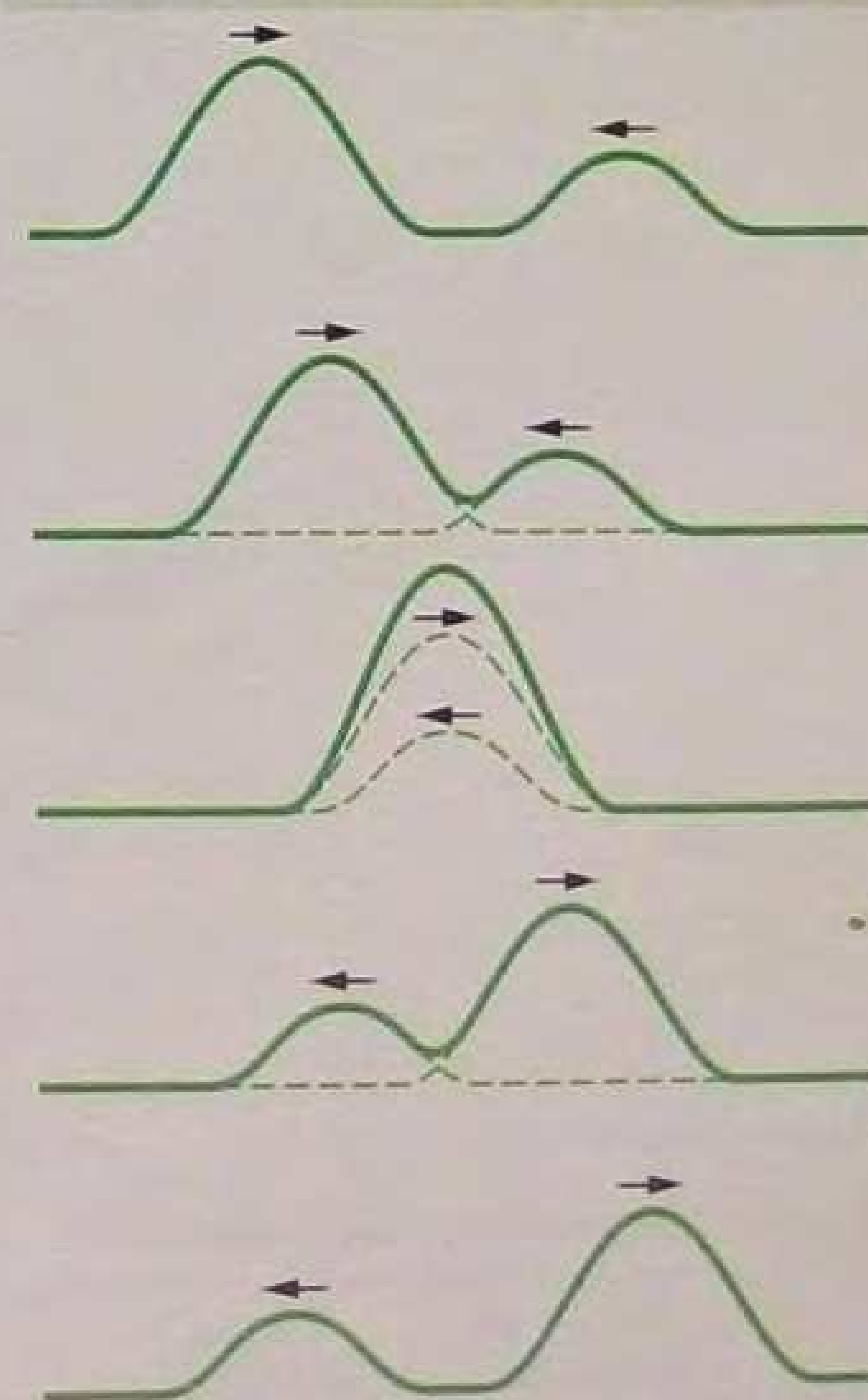


Figura 16-11 Uma série de instantâneos que mostra dois pulsos se propagando em sentidos opostos em uma corda esticada. O princípio da superposição se aplica quando os pulsos passam um pelo outro.

16-10 Interferência de Ondas

Suponha que produzimos duas ondas senoidais de mesmo comprimento de onda e amplitude que se propagam no mesmo sentido em uma corda. O princípio da superposição pode ser usado. Que forma tem a onda resultante?

A forma da onda resultante depende da *fase relativa* das duas ondas. Se as ondas estão exatamente em fase (ou seja, se os picos e os vales de uma estão exatamente alinhados com os da outra), o deslocamento total a cada instante é o dobro do deslocamento que seria produzido por apenas uma das ondas. Se estão totalmente defasadas (ou seja, se os picos de uma estão exatamente alinhados com os vales da outra), elas se cancelam mutuamente e o deslocamento é zero; a corda permanece parada. O fenômeno de combinação de ondas recebe o nome de **interferência** e dizemos que as ondas **interferem** entre si. (O termo se refere apenas aos deslocamentos; a propagação das ondas não é afetada.)

Suponha que uma das ondas que se propagam em uma corda é dada por

$$y_1(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t) \tag{16-47}$$

e que outra, deslocada em relação à primeira, é dada por

$$y_2(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi). \tag{16-48}$$

As duas ondas têm a mesma frequência angular ω (e, portanto, a mesma frequência f), o mesmo número de onda k (e, portanto, o mesmo comprimento de onda λ) e a mesma amplitude y_m. Ambas se propagam no sentido positivo do eixo x, com a mesma velocidade, dada pela Eq. 16-26. Elas diferem apenas de um ângulo constante ϕ, a constante de fase. Dizemos que as ondas estão *defasadas* de ϕ ou que a *diferença de fase* entre elas é ϕ.

Segundo o princípio de superposição (Eq. 16-46), a onda resultante é a soma algébrica das duas ondas e tem um deslocamento

$$\begin{aligned} y'(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) \\ &= y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t) + y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi). \end{aligned} \tag{16-49}$$

De acordo com o Apêndice E, a soma dos senos de dois ângulos α e β obedece à identidade

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta). \tag{16-50}$$

Aplicando essa relação à Eq. 16-49, obtemos

$$y'(x, t) = [2y_m \cos\tfrac{1}{2}\phi] \operatorname{sen}(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\phi). \tag{16-51}$$

Como mostra a Fig. 16-12, a onda resultante também é uma onda senoidal que se propaga no sentido positivo de x. Ela é a única onda que se pode ver na corda (as ondas dadas pelas Eqs. 16-47 e 16-48 *não podem* ser vistas).


Se duas ondas senoidais de mesma amplitude e comprimento de onda se propagam no *mesmo* sentido em uma corda, elas interferem para produzir uma onda resultante senoidal que se propaga nesse sentido.

A onda resultante difere das ondas individuais em dois aspectos: (1) a constante de fase é $\phi/2$ e (2) a amplitude y'_m é o módulo do fator entre colchetes da Eq. 16-51:

$$y'_m = |2y_m \cos\tfrac{1}{2}\phi| \quad \text{(amplitude)}. \tag{16-52}$$

Se $\phi = 0$ rad (ou 0°), as duas ondas estão exatamente em fase, como na Fig. 16-13*a*. Nesse caso, a Eq. 16-51 se reduz a

$$y'(x, t) = 2y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad (\phi = 0). \tag{16-53}$$

Essa onda resultante está plotada na Fig. 16-13*d*. Observe, tanto na figura como na Eq. 16-53, que a amplitude da onda resultante é duas vezes maior que a amplitude das ondas individuais. Essa é a maior amplitude que a onda resultante pode ter, já que o valor máximo do termo em cosseno das Eqs. 16-51 e 16-52, que é 1, acontece

Deslocamento

$$y'(x,t) = \underbrace{[2y_m \cos\tfrac{1}{2}\phi]}_{\text{Termo de amplitude}} \underbrace{\operatorname{sen}(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\phi)}_{\text{Termo oscilatório}}$$

Figura 16-12 A onda resultante da Eq. 16-51, produzida pela interferência de duas ondas transversais senoidais, é também uma onda transversal senoidal, com um fator de amplitude e um fator oscilatório.

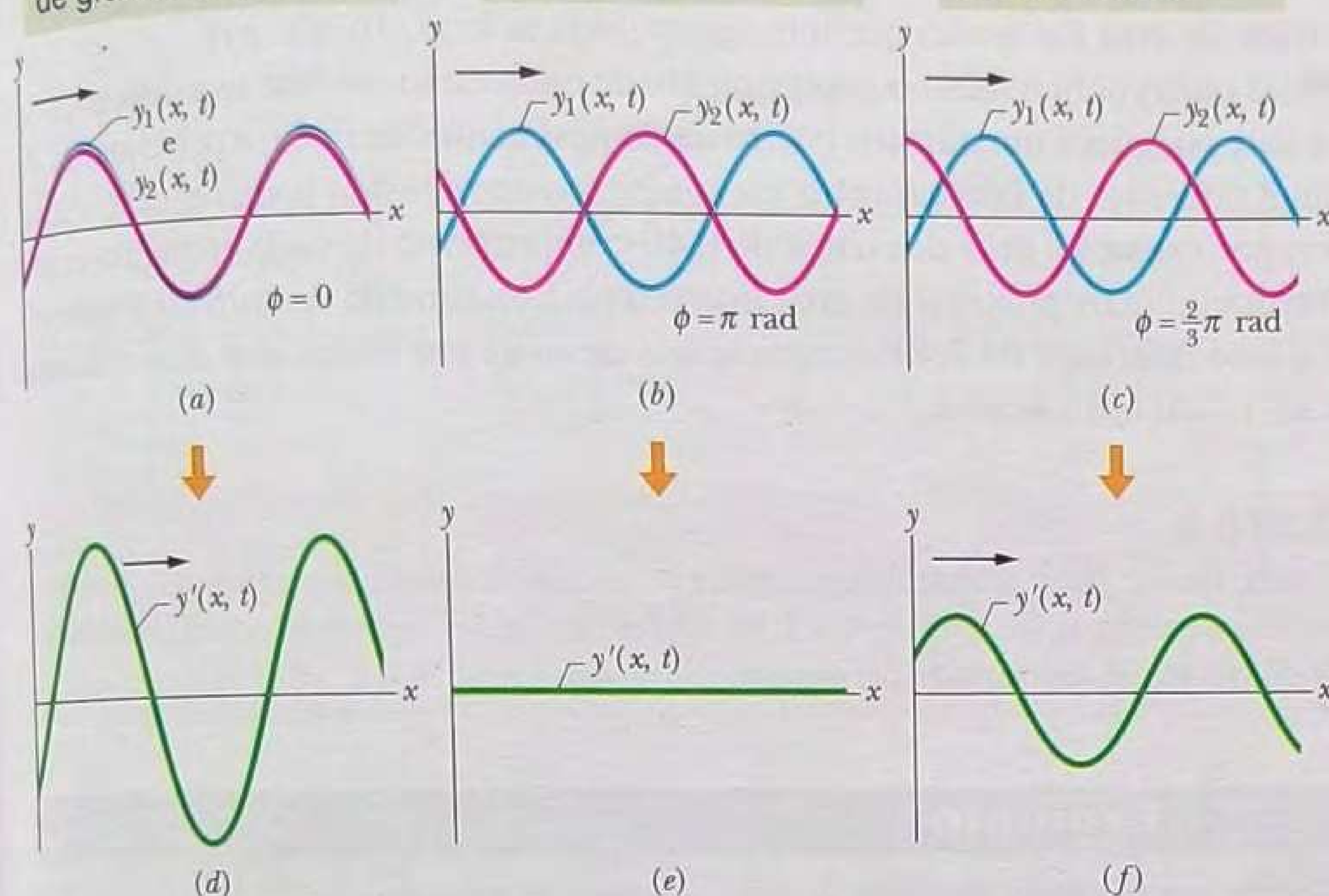


Figura 16-13 Duas ondas senoidais iguais, $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$, se propagam em uma corda no sentido positivo de um eixo x. Elas interferem para produzir uma onda resultante $y'(x, t)$, que é a onda observada na corda. A diferença de fase ϕ entre as duas ondas é (*a*) 0 rad ou 0°, (*b*) π rad ou 180° e (*c*) $2\pi/3$ rad ou 120°. As ondas resultantes correspondentes são mostradas em (*d*), (*e*) e (*f*).

para $\phi = 0$. A interferência que produz a maior amplitude possível é chamada de *interferência totalmente construtiva*.

Se $\phi = \pi$ rad (ou 180°), as ondas que interferem estão totalmente defasadas, como na Fig. 16-13*b*. Nesse caso, $\cos(\phi/2) = \cos(\pi/2) = 0$ e a amplitude da onda resultante, dada pela Eq. 16-52, é nula. Assim, para todos os valores de x e t,

$$y'(x, t) = 0 \qquad (\phi = \pi \,\text{rad}). \tag{16-54}$$

A onda resultante está plotada na Fig. 16-13*e*. Embora duas ondas estejam se propagando na corda, não vemos a corda se mover. Esse tipo de interferência é chamado de *interferência totalmente destrutiva*.

Como a forma de uma onda senoidal se repete a cada 2π rad, uma diferença de fase $\phi = 2\pi$ rad (ou 360°) corresponde a uma defasagem de uma onda em relação à outra equivalente a um comprimento de onda. Assim, as diferenças de fase podem ser descritas tanto em termos de ângulos como em termos de comprimentos de onda. Por exemplo: na Fig. 16-13*b*, podemos dizer que as ondas estão defasadas de 0,50 comprimento de onda. A Tabela 16-1 mostra outros exemplos de diferenças de

Tabela 16-1

Diferenças de Fase e Tipos de Interferência[a]

Diferença de fase em				
Graus	Radianos	Comprimentos de Onda	Amplitude da Onda	Tipo de Interferência
0	0	0	$2y_m$	Totalmente construtiva
120	$\frac{2}{3}\pi$	0,33	y_m	Intermediária
180	π	0,50	0	Totalmente destrutiva
240	$\frac{4}{3}\pi$	0,67	y_m	Intermediária
360	2π	1,00	$2y_m$	Totalmente construtiva
865	15,1	2,40	$0,60y_m$	Intermediária

[a] A diferença de fase é entre duas ondas de mesma frequência e mesma amplitude, que se propagam no mesmo sentido.

fase e as interferências que produzem. Quando uma interferência nem é totalmente construtiva nem totalmente destrutiva, é chamada de *interferência intermediária*. Nesse caso, a amplitude da onda resultante está entre 0 e $2y_m$. De acordo com a Tabela 16-1, se as ondas que interferem têm uma diferença de fase de 120° ($\phi = 2\pi/3$ rad = 0,33 comprimento de onda), a onda resultante tem uma amplitude y_m, igual à amplitude de uma das ondas que interferem (veja as Figs. 16-13*c* e *f*).

Duas ondas com o mesmo comprimento de onda estão em fase se a diferença de fase é nula ou igual a um número inteiro de comprimentos de onda; a parte inteira de qualquer diferença de fase expressa *em comprimentos de onda* pode ser descartada. Assim, por exemplo, uma diferença de 0,40 comprimento de onda (uma diferença intermediária, mais próxima de uma interferência totalmente destrutiva) é equivalente a uma diferença de 2,40 comprimentos de onda e o menor dos dois números pode ser usado nos cálculos.



TESTE 4

São dadas quatro diferenças de fase possíveis entre duas ondas iguais, expressas em comprimentos de onda: 0,20; 0,45; 0,60 e 0,80. Ordene as ondas de acordo com a amplitude da onda resultante, começando pela maior.

Exemplo

Interferência de duas ondas no mesmo sentido e com a mesma amplitude

Duas ondas senoidais iguais, propagando-se no mesmo sentido em uma corda, interferem entre si. A amplitude y_m das ondas é 9,8 mm e a diferença de fase ϕ entre elas é 100°.

(a) Qual é a amplitude da onda resultante e qual é o tipo de interferência?

IDEIA-CHAVE

Como se trata de ondas senoidais iguais que se propagam na *mesma direção*, elas interferem para produzir uma onda progressiva senoidal.

Cálculos Como as duas ondas são iguais, têm *a mesma amplitude*. Assim, a amplitude y'_m da onda resultante é dada pela Eq. 16-52:

$$y'_m = |2y_m \cos \tfrac{1}{2}\phi| = |(2)(9{,}8 \text{ mm}) \cos(100°/2)|$$
$$= 13 \text{ mm.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Podemos dizer que a interferência é *intermediária* sob dois aspectos: a diferença de fase está entre 0 e 180° e a amplitude y'_m está entre 0 e $2y_m$ (= 19,6 mm).

(b) Que diferença de fase, em radianos e em comprimentos de onda, faz com que a amplitude da onda resultante seja 4,9 mm?

Cálculos Neste caso, conhecemos y'_m e precisamos determinar o valor de ϕ. De acordo com a Eq. 16-52,

$$y'_m = |2y_m \cos \tfrac{1}{2}\phi|,$$

e, portanto,

$$4{,}9 \text{ mm} = (2)(9{,}8 \text{ mm}) \cos \tfrac{1}{2}\phi,$$

que nos dá (usando uma calculadora no modo de radianos)

$$\phi = 2 \cos^{-1} \frac{4{,}9 \text{ mm}}{(2)(9{,}8 \text{ mm})}$$
$$= \pm 2{,}636 \text{ rad} \approx \pm 2{,}6 \text{ rad.} \qquad \text{(Resposta)}$$

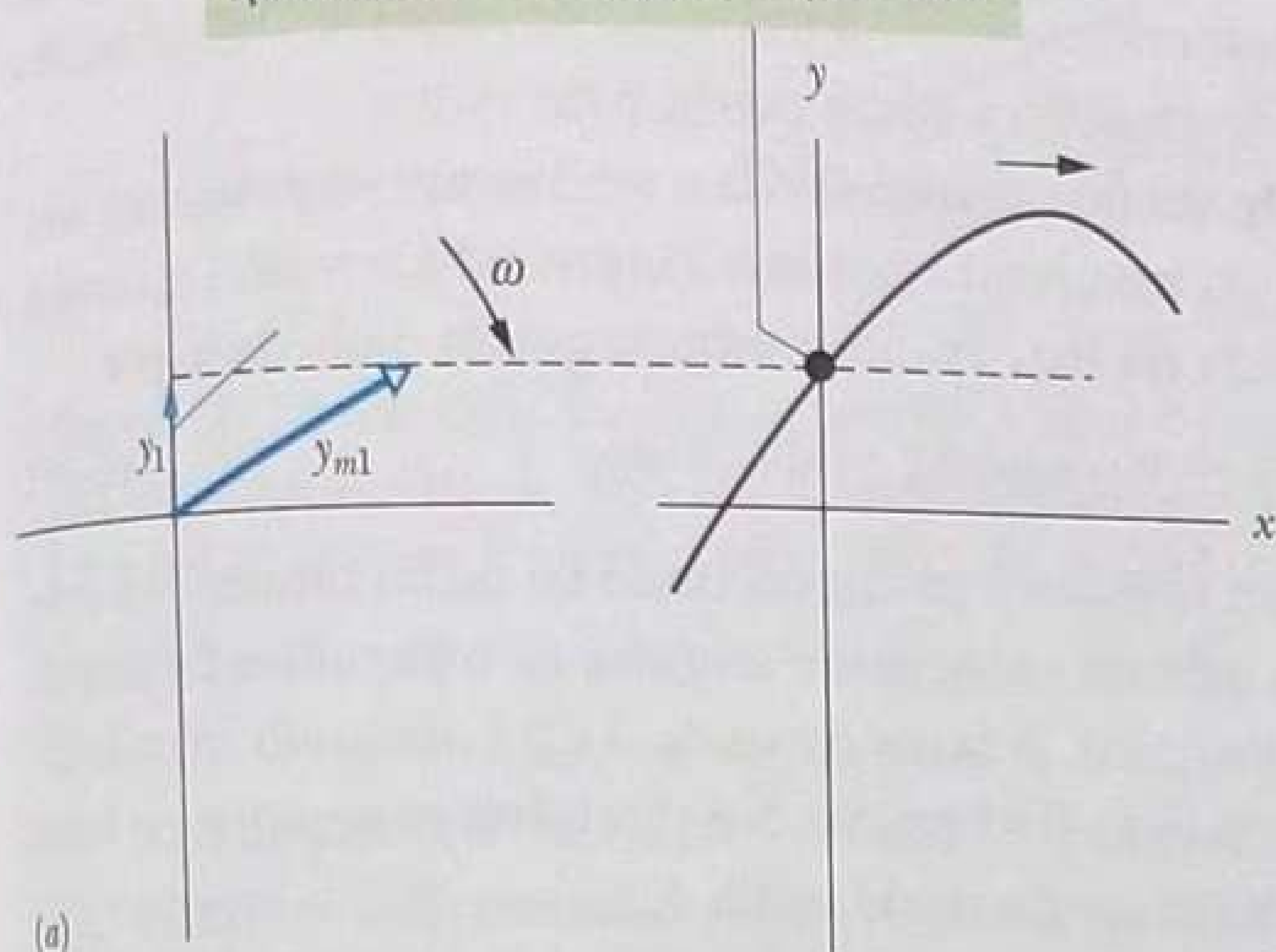
Existem duas soluções porque podemos obter a mesma onda resultante supondo que a primeira onda está *adiantada* (à frente) ou *atrasada* (atrás) em relação à segunda onda. A diferença correspondente em comprimentos de onda é

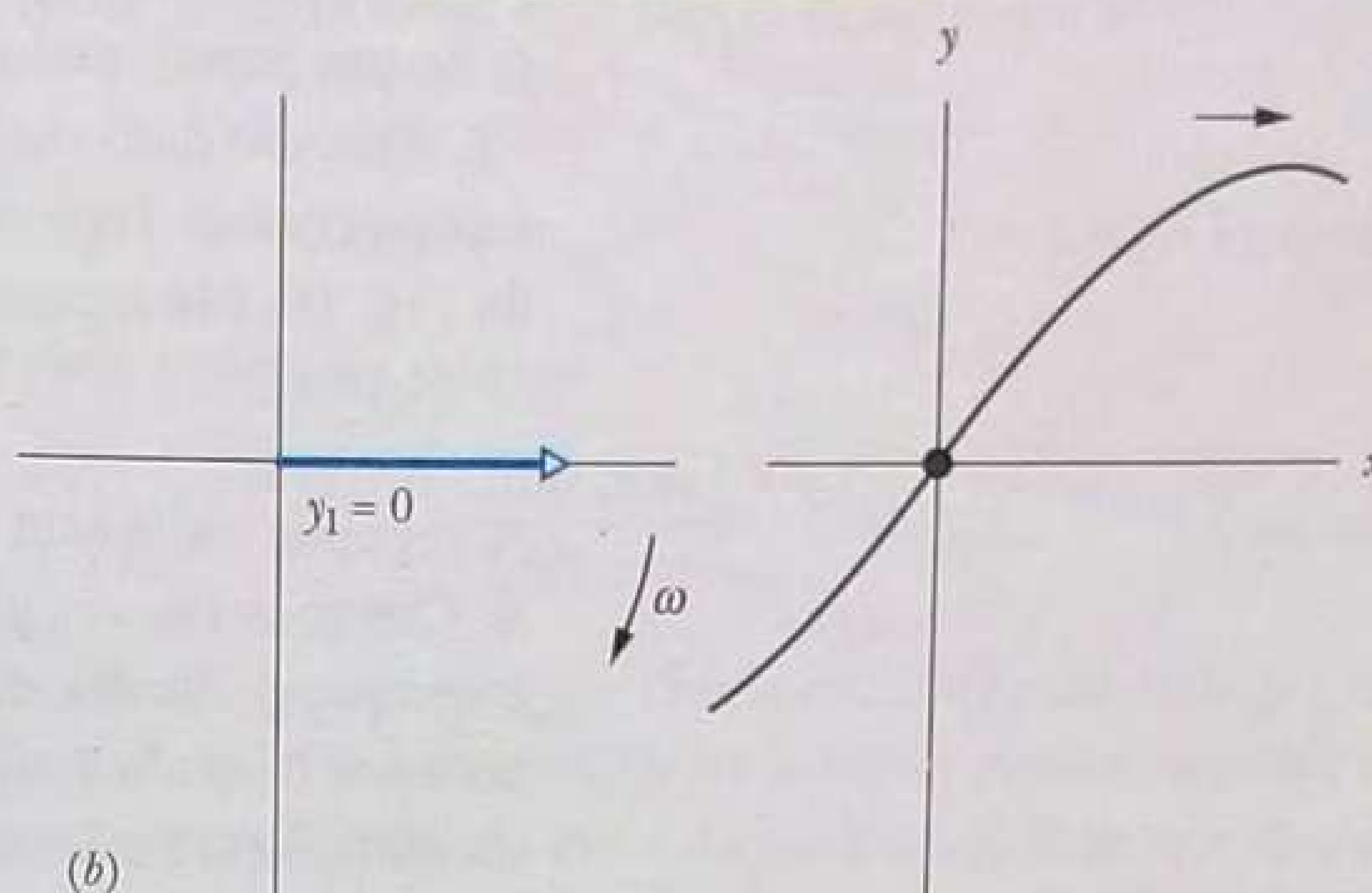
$$\frac{\phi}{2\pi \text{ rad/comprimento de onda}} = \frac{\pm 2{,}636 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad/comprimento de onda}}$$
$$= \pm 0{,}42 \text{ comprimento de onda.} \qquad \text{(Resposta)}$$

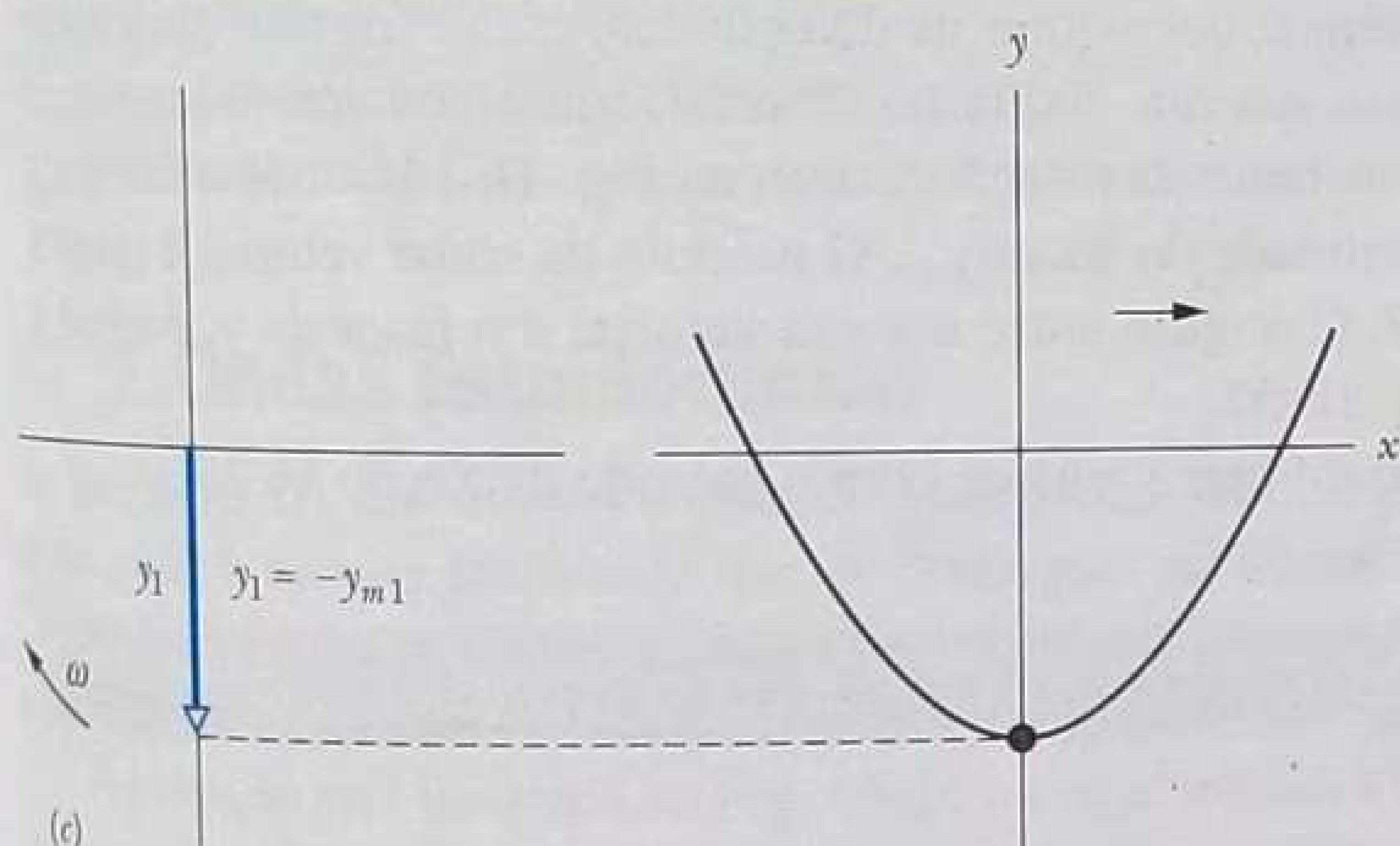
16-11 Fasores

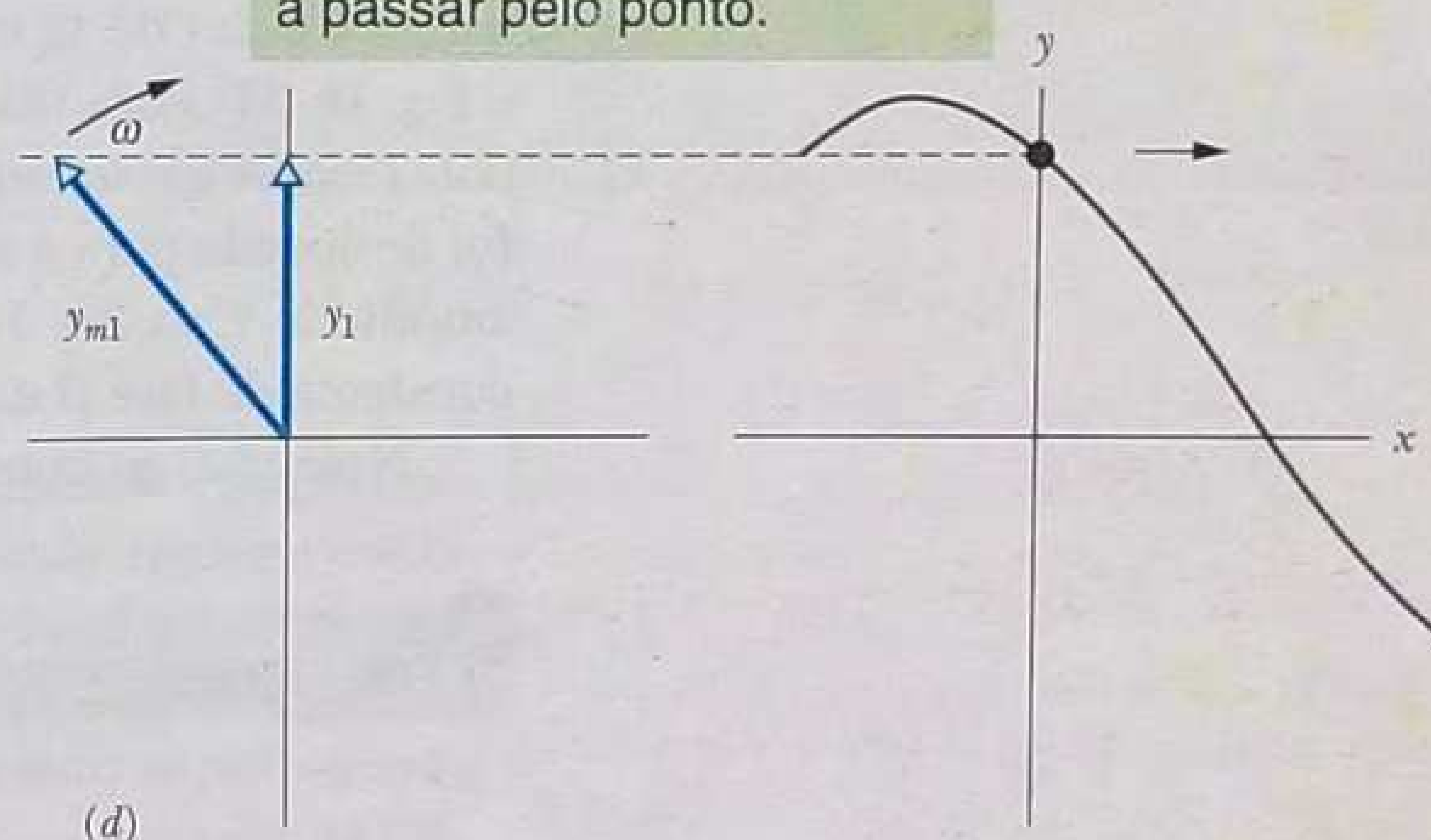
Podemos representar uma onda em uma corda (ou qualquer outro tipo de onda) através de um **fasor**. Um fasor é um vetor, de módulo igual à amplitude y_m da onda, que gira em torno da origem com velocidade angular igual à frequência angular ω da onda. Assim, por exemplo, a onda

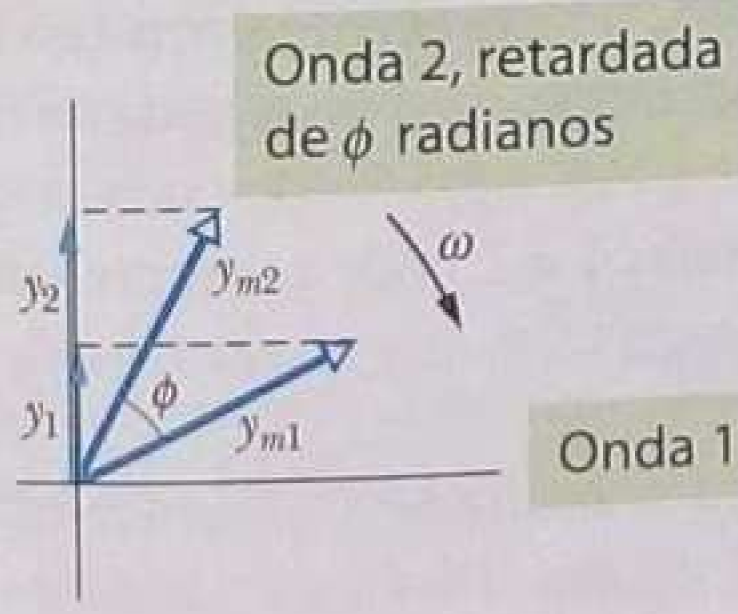












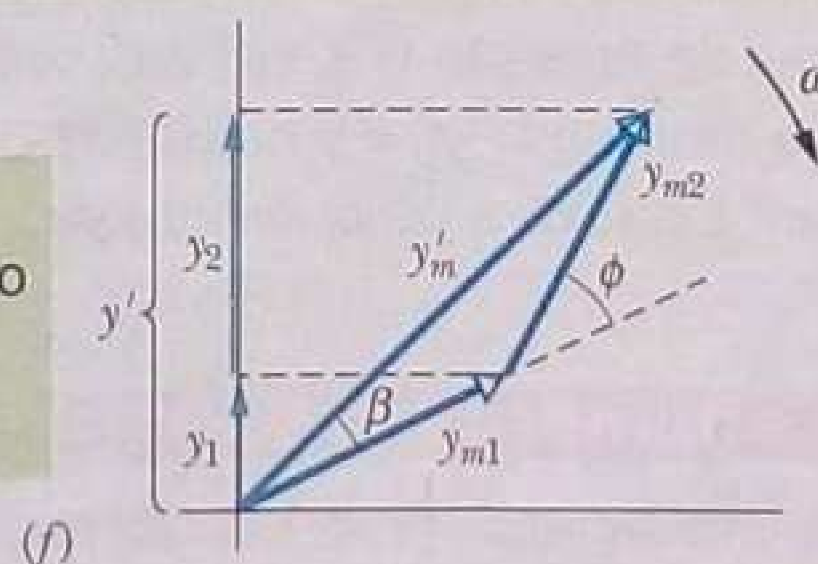


Figura 16-14 (*a*)–(*d*) Um fasor de módulo y_{m1} girando em torno de uma origem com velocidade angular ω representa uma onda senoidal. A projeção y_1 do fasor no eixo vertical representa o deslocamento de um ponto pelo qual a onda passa. (*e*) Um segundo fasor, também de velocidade angular ω, mas de módulo y_{m2} e girando com um ângulo ϕ constante de diferença em relação ao primeiro fasor, representa uma segunda onda, com uma constante de fase ϕ. (*f*) A onda resultante é representada pelo vetor soma dos dois fasores, y'_m.

$$y_1(x,t) = y_{m1}\,\text{sen}(kx - \omega t) \tag{16-55}$$

é representada pelo fasor das Figs. 16-14*a* a *d*. O módulo do fasor é a amplitude y_{m1} da onda. Quando o fasor gira em torno da origem com frequência angular ω, a projeção y_1 no eixo vertical varia senoidalmente, de um máximo de y_{m1} a um mínimo de $-y_{m1}$ e de volta a y_{m1}. Essa variação corresponde à variação senoidal do deslocamento y_1 de um ponto qualquer da corda quando a onda passa pelo ponto.

Quando duas ondas se propagam na mesma corda e no mesmo sentido, podemos representar as duas ondas e a onda resultante em um *diagrama fasorial*. Os fasores da Fig. 16-14*e* representam a onda da Eq. 16-55 e uma segunda onda dada por

$$y_2(x,t) = y_{m2}\,\text{sen}(kx - \omega t + \phi). \tag{16-56}$$

A segunda onda está defasada em relação à primeira onda de uma constante de fase ϕ. Como os fasores giram com a mesma velocidade angular ω, o ângulo entre os dois é sempre ϕ. Se ϕ é um número *positivo*, o fasor da onda 2 está *atrasado* em relação ao fasor da onda 1, como mostra a Fig. 16-14*e*. Se ϕ é um número *negativo*, o fasor da onda 2 está *adiantado* em relação ao fasor da onda 1.

Como as ondas y_1 e y_2 têm o mesmo número de onda k e a mesma frequência angular ω, sabemos pelas Eqs. 16-51 e 16-52 que a onda resultante é da forma

$$y'(x,t) = y'_m\,\text{sen}(kx - \omega t + \beta), \tag{16-57}$$

em que y'_m é a amplitude da onda resultante e β é a constante de fase. Para determinar os valores de y'_m e β, temos que somar as duas ondas, como fizemos para obter a Eq. 16-51. Para fazer isso em um diagrama fasorial, somamos vetorialmente os dois fasores em qualquer instante da rotação, como na Fig. 16-14*f*, onde o fasor y_{m2} foi deslocado para a extremidade do fasor y_{m1}. O módulo da soma vetorial é igual à amplitude y'_m da Eq. 16-57. O ângulo entre a soma vetorial e o fasor de y_1 é igual à constante de fase β da Eq. 16-57.

Note que, ao contrário do que acontece com o método da Seção 16-10,


Podemos usar fasores para combinar ondas *mesmo que as amplitudes sejam diferentes.*

Exemplo

Interferência de duas ondas no mesmo sentido e com amplitudes diferentes

Duas ondas senoidais $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$ têm o mesmo comprimento de onda e se propagam no mesmo sentido em uma corda. As amplitudes são $y_{m1} = 4{,}0$ mm e $y_{m2} = 3{,}0$ mm e as constantes de fase são 0 e $\pi/3$ rad, respectivamente. Quais são a amplitude y'_m e a constante de fase β da onda resultante? Escreva a onda resultante na forma da Eq. 16-57.

IDEIAS-CHAVE

(1) As duas ondas têm algumas propriedades em comum: como se propagam na mesma corda, têm a mesma velocidade v, que, de acordo com a Eq. 16-26, depende apenas da tensão e da massa específica linear da corda. Como o comprimento de onda λ é o mesmo, têm o mesmo número de onda $k\ (= 2\pi/\lambda)$. Como o número de onda k e a velocidade v são iguais, têm a mesma frequência angular $\omega\ (= kv)$.

(2) As ondas (vamos chamá-las de ondas 1 e 2) podem ser representadas por fasores girando com a mesma frequência angular ω em torno da origem. Como a constante de fase da onda 2 é *maior* que a constante de fase da onda 1 em $\pi/3$, o fasor 2 está *atrasado* de $\pi/3$ em relação ao fasor 1 na rotação dos dois vetores no sentido horário, como mostra a Fig. 16-15*a*. A onda resultante da interferência das ondas 1 e 2 pode ser representada por um fasor que é a soma vetorial dos fasores 1 e 2.

Cálculos Para simplificar a soma vetorial, desenhamos os fasores 1 e 2 na Fig. 16-15*a* no instante em que a direção do fasor 1 coincide com a do semieixo horizontal positivo. Como o fasor 2 está atrasado de $\pi/3$ rad, faz um ângulo positivo de $\pi/3$ rad com o semieixo horizontal positivo. Na Fig. 16-15*b*, o fasor 2 foi deslocado para que sua origem coincida com a extremidade do fasor 1. Podemos desenhar o fasor y'_m da onda resultante ligando a origem do fasor 1 à extremidade do fasor 2. A constante de fase β é o ângulo que o fasor y'_m faz com o fasor 1.

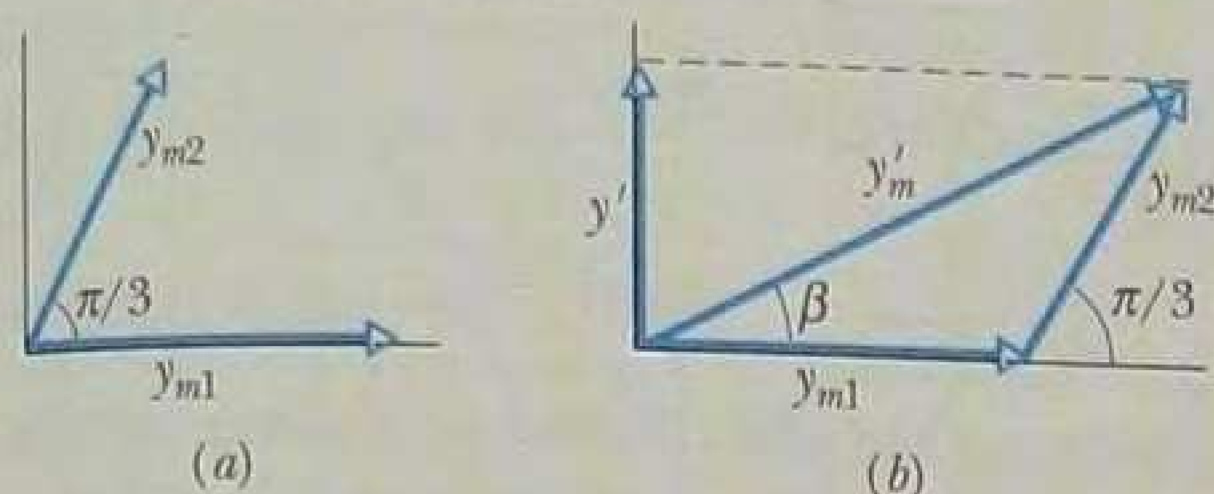


Figura 16-15 (*a*) Dois fasores de módulos y_{m1} e y_{m2} com uma diferença de fase de $\pi/3$. (*b*) A soma vetorial dos fasores em qualquer instante fornece o módulo y'_m do fasor da onda resultante.

Para determinar os valores de y'_m e β, podemos somar os fasores 1 e 2 diretamente, com o auxílio de uma calculadora (somando um vetor de módulo 4,0 e ângulo 0 com um vetor de módulo 3,0 e ângulo $\pi/3$ rad), ou somar separadamente as componentes. No caso das componentes horizontais, temos:

$$y'_{mh} = y_{m1}\cos 0 + y_{m2}\cos \pi/3$$
$$= 4{,}0 \text{ mm} + (3{,}0 \text{ mm})\cos \pi/3 = 5{,}50 \text{ mm}.$$

No caso das componentes verticais, temos:

$$y'_{mv} = y_{m1}\,\text{sen}\,0 + y_{m2}\,\text{sen}\,\pi/3$$
$$= 0 + (3{,}0 \text{ mm})\,\text{sen}\,\pi/3 = 2{,}60 \text{ mm}.$$

Assim, a onda resultante tem uma amplitude

$$y'_m = \sqrt{(5{,}50 \text{ mm})^2 + (2{,}60 \text{ mm})^2}$$
$$= 6{,}1 \text{ mm} \qquad \text{(Resposta)}$$

e uma constante de fase

$$\beta = \tan^{-1}\frac{2{,}60 \text{ mm}}{5{,}50 \text{ mm}} = 0{,}44 \text{ rad}. \qquad \text{(Resposta)}$$

De acordo com a Fig. 16-15*b*, a constante de fase β é um ângulo *positivo* em relação ao fasor 1. Assim, a onda resultante está *atrasada* em relação à onda 1 de um ângulo $\beta = 0{,}44$ rad. De acordo com a Eq. 16-57, podemos escrever a onda resultante na forma

$$y'(x, t) = (6{,}1 \text{ mm})\,\text{sen}(kx - \omega t + 0{,}44 \text{ rad}).$$
(Resposta)

16-12 Ondas Estacionárias

Na Seção 16-10, discutimos o caso de duas ondas senoidais de mesmo comprimento de onda e mesma amplitude que se propagam *no mesmo sentido* em uma corda. O que acontece se as ondas se propagam em sentidos opostos? Também neste caso podemos obter a onda resultante aplicando o princípio da superposição.

A situação está ilustrada na Fig. 16-16. A figura mostra uma onda se propagando para a esquerda na Fig. 16-16*a* e a outra onda se propagando para a direita na Fig. 16-16*b*. A Fig. 16-16*c* mostra a soma das duas ondas, obtida aplicando graficamente o princípio de superposição. O que chama a atenção na onda resultante é o fato de que existem pontos da corda, chamados de **nós**, que permanecem imóveis. Quatro desses nós estão assinalados por pontos na Fig. 16-16*c*. No ponto médio entre nós vizinhos estão **antinós**, pontos em que a amplitude da onda resultante é máxima. Ondas como a da Fig. 16-16*c* são chamadas de **ondas estacionárias** porque a forma de onda não se move para a esquerda nem para a direita; as posições de máximos e mínimos não variam com o tempo.

Se duas ondas senoidais de mesma amplitude e mesmo comprimento de onda se propagam em sentidos *opostos* em uma corda, a interferência mútua produz uma onda estacionária.

Para analisar uma onda estacionária, representamos as duas ondas pelas equações

$$y_1(x, t) = y_m\,\text{sen}(kx - \omega t) \qquad (16\text{-}58)$$

e

$$y_2(x, t) = y_m\,\text{sen}(kx + \omega t). \qquad (16\text{-}59)$$

De acordo com o princípio de superposição, a onda resultante é dada por

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = y_m\text{sen}(kx - \omega t) + y_m\text{sen}(kx + \omega t).$$

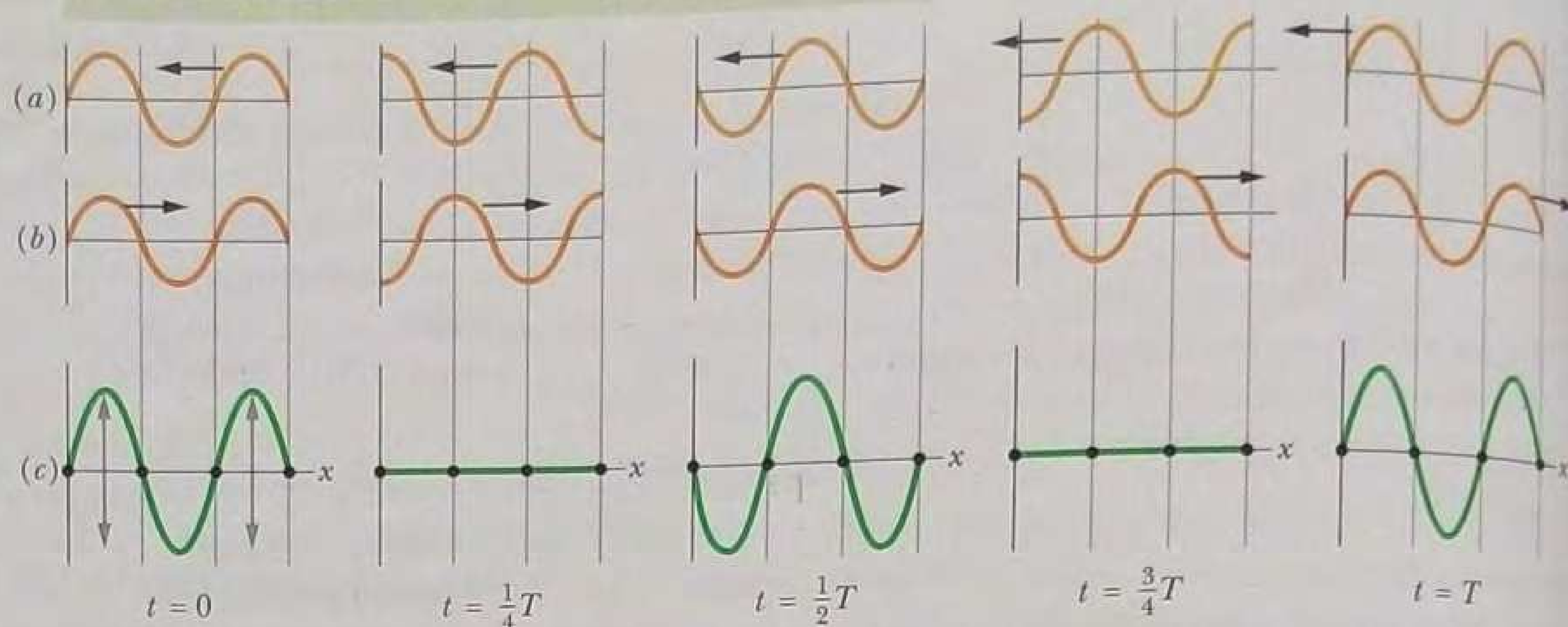


Figura 16-16 (*a*) Cinco instantâneos de uma onda se propagando para a esquerda, em instantes *t* indicados abaixo da parte (*c*) (*T* é o período das oscilações). (*b*) Cinco instantâneos de uma onda igual à de (*a*), mas se propagando para a direita, nos mesmos instantes *t*. (*c*) Instantâneos correspondentes para a superposição das duas ondas na mesma corda. Nos instantes $t = 0$, $T/2$ e T, a interferência é totalmente construtiva, ou seja, os picos se alinham com picos e os vales com vales. Em $t = T/4$ e $3T/4$, a interferência é totalmente destrutiva, pois os picos se alinham com vales. Alguns pontos (os nós, indicados por pontos) permanecem imóveis; outros (os antinós) oscilam com amplitude máxima.

Aplicando a relação trigonométrica da Eq. 16-50, obtemos

$$y'(x,t) = [2y_m \operatorname{sen} kx] \cos \omega t, \tag{16-60}$$

que também aparece na Fig. 16-17. A Eq. 16-60 não descreve uma onda progressiva porque não é da forma da Eq. 16-17; em vez disso, descreve uma onda estacionária.

O fator $2y_m$ sen kx entre colchetes na Eq. 16-60 pode ser visto como a amplitude da oscilação do elemento da corda localizado na posição x. Entretanto, como uma amplitude é sempre positiva e sen kx pode ser negativo, tomamos o valor absoluto de $2y_m$ sen kx como a amplitude no ponto x.

Em uma onda senoidal progressiva, a amplitude da onda é a mesma para todos os elementos da corda. Isso não é verdade para uma onda estacionária, na qual *a amplitude varia com a posição*. Na onda estacionária da Eq. 16-60, por exemplo, a amplitude é zero para valores de kx tais que sen $kx = 0$. Esses valores são dados pela relação

$$kx = n\pi, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{16-61}$$

Fazendo $k = 2\pi/\lambda$ na Eq. 16-61 e reagrupando os termos, obtemos

$$x = n\frac{\lambda}{2}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(nós)}, \tag{16-62}$$

para as posições de amplitude zero (nós) da onda estacionária da Eq. 16-60. Note que a distância entre nós vizinhos é $\lambda/2$, metade do comprimento de onda.

A amplitude da onda estacionária da Eq. 16-60 tem um valor máximo de $2y_m$, que ocorre para valores de kx tais que $|\operatorname{sen} kx| = 1$. Esses valores são dados pela relação

$$kx = \tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{2}\pi, \tfrac{5}{2}\pi, \ldots$$
$$= (n + \tfrac{1}{2})\pi, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{16-63}$$

Fazendo $k = 2\pi/\lambda$ na Eq. 16-63 e reagrupando os termos, obtemos

Deslocamento

$$y'(x,t) = [2y_m \operatorname{sen} kx] \cos \omega t$$

Termo de amplitude — Termo oscilatório

Figura 16-17 A onda resultante da Eq. 16-60 é uma onda estacionária, produzida pela interferência de duas ondas senoidais de mesma amplitude e mesmo comprimento de onda que se propagam em sentidos opostos.

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(antinós)}, \tag{16-64}$$

para as posições de máxima amplitude (antinós) da onda estacionária da Eq. 16-60. Os antinós estão separados de $\lambda/2$ e situados no ponto médio dos nós mais próximos.

Reflexões em uma Interface

Podemos excitar uma onda estacionária em uma corda fazendo com que uma onda progressiva seja refletida em uma das extremidades da corda e interfira consigo mesma. A onda (original) incidente e a onda refletida podem ser descritas pelas Eqs. 16-58 e 16-59, respectivamente, e se combinam para formar uma onda estacionária.

Na Fig. 16-18, usamos um pulso isolado para mostrar como acontecem essas reflexões. Na Fig. 16-18*a*, a corda está fixa na extremidade esquerda. Quando um pulso chega a essa extremidade, exerce uma força para cima sobre o suporte (a parede). De acordo com a terceira lei de Newton, o suporte exerce uma força oposta, de mesmo módulo, sobre a corda. Essa força produz um pulso que se propaga no sentido oposto ao do pulso incidente. Em uma reflexão "dura" como esta, existe um nó no suporte, pois a corda está fixa. Isso significa que o pulso refletido e o pulso incidente devem ter sinais opostos para se cancelarem nesse ponto.

Na Fig. 16-18*b*, a extremidade esquerda da corda está presa a um anel que pode deslizar sem atrito ao longo de uma barra. Quando o pulso incide nesse ponto, o anel se desloca para cima ao longo da barra. Ao se mover, o anel puxa a corda, esticando-a e produzindo um pulso refletido com o mesmo sinal e mesma amplitude que o pulso incidente. Em uma reflexão "macia" como essa, os pulsos incidente e refletido se reforçam, criando um antinó na extremidade da corda; o deslocamento máximo do anel é duas vezes maior que a amplitude de um dos pulsos.

Um pulso pode ser refletido de duas formas ao chegar à extremidade de uma corda.

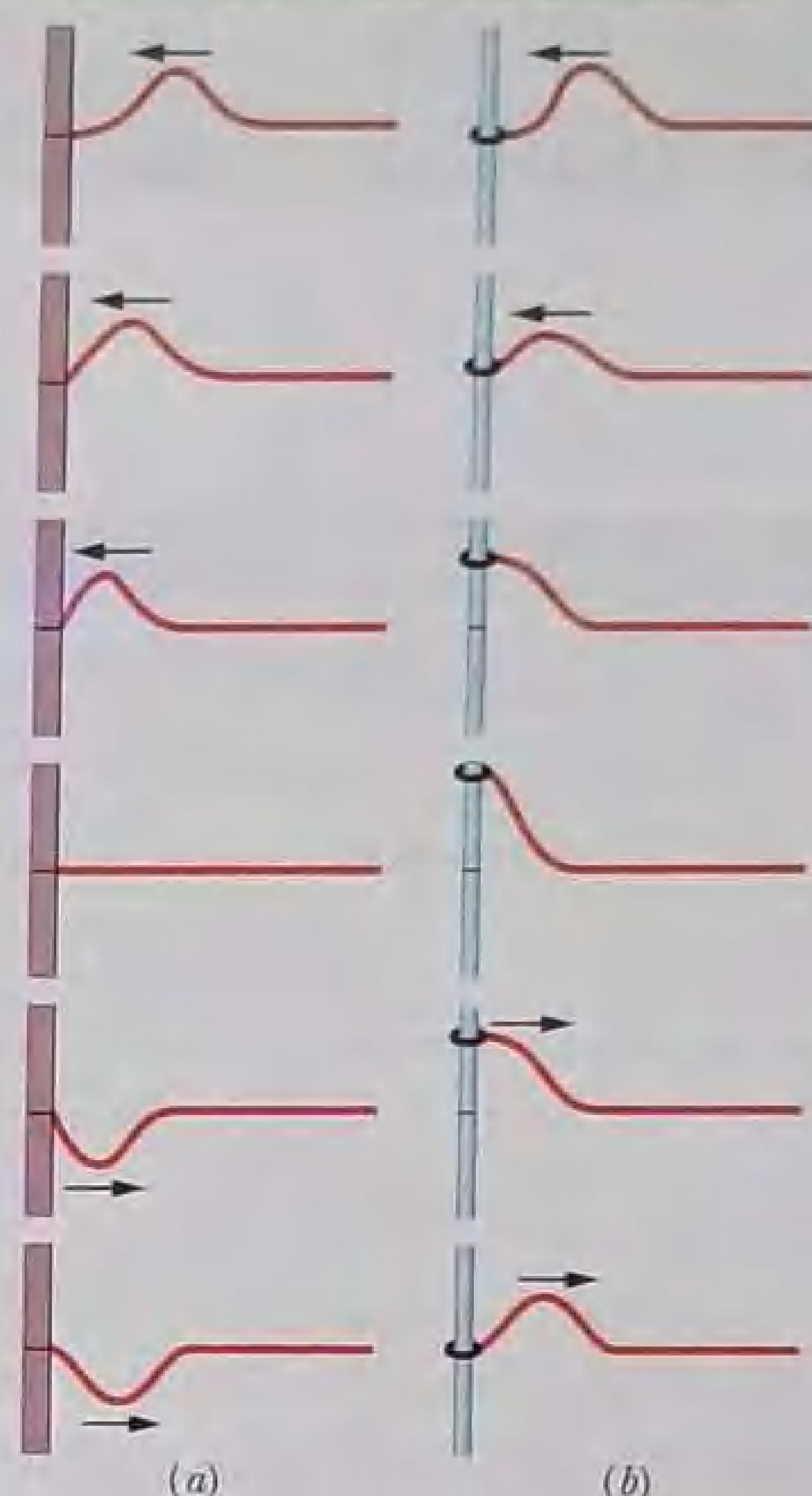


Figura 16-18 (*a*) Um pulso proveniente da direita é refletido na extremidade esquerda da corda, que está amarrada em uma parede. Note que o pulso refletido sofre uma inversão em relação ao pulso incidente. (*b*) Neste caso, a extremidade esquerda da corda está amarrada em um anel que pode deslizar sem atrito para cima e para baixo em uma barra e o pulso não é invertido pela reflexão.

16-13 Ondas Estacionárias e Ressonância

Considere uma corda, como, por exemplo, uma corda de violão, esticada entre duas presilhas. Suponha que produzimos uma onda senoidal contínua de uma certa frequência que se propaga para a direita. Quando a onda chega à extremidade direita, é refletida e começa a se propagar de volta para a esquerda. A onda que se propaga para a esquerda encontra a onda que ainda se propaga para a direita. Quando a onda que se propaga para a esquerda chega à extremidade esquerda, é refletida mais uma vez e a nova onda refletida começa a se propagar para a direita, encontrando ondas que se propagam para a esquerda. Desta forma, logo temos muitas ondas superpostas, que interferem entre si.

Para certas frequências, a interferência produz uma onda estacionária (ou **modo de oscilação**) com nós e grandes antinós como os da Fig. 16-19. Dizemos que uma onda estacionária desse tipo é gerada quando existe **ressonância** e que a corda *ressoa* nessas frequências, conhecidas como **frequências de ressonância**. Se a corda é excitada em uma frequência que não é uma das frequências de ressonância, não se forma uma onda estacionária. Nesse caso, a interferência das ondas que se propagam para a esquerda com as que se propagam para a direita resulta em pequenas (e talvez imperceptíveis) oscilações da corda.

Suponha que uma corda esteja presa entre duas presilhas separadas por uma distância L. Para obter uma expressão para as frequências de ressonância da corda, observamos que deve existir um nó em cada extremidade, pois as extremidades são fixas e não podem oscilar. A configuração mais simples que satisfaz essa condição é a da Fig. 16-20*a*, que mostra a corda nas posições extremas (uma representada por uma linha contínua e a outra por uma linha tracejada). Existe apenas um antinó, no centro da corda. Note que o comprimento L da corda é igual a meio comprimento de onda. Assim, para essa configuração, $\lambda/2 = L$ e, portanto, para que as ondas que se propagam para a esquerda e para a direita produzam essa configuração por interferência, devem ter um comprimento de onda $\lambda = 2L$.

TESTE 5

Duas ondas com a mesma amplitude e o mesmo comprimento de onda interferem em três situações diferentes para produzir ondas resultantes descritas pelas seguintes equações:

(1) $y'(x, t) = 4\,\text{sen}(5x - 4t)$

(2) $y'(x, t) = 4\,\text{sen}(5x)\cos(4t)$

(3) $y'(x, t) = 4\,\text{sen}(5x + 4t)$

Em que situação as duas ondas que se combinaram estavam se propagando (a) no sentido positivo de x, (b) no sentido de negativo de x e (c) em sentidos opostos?

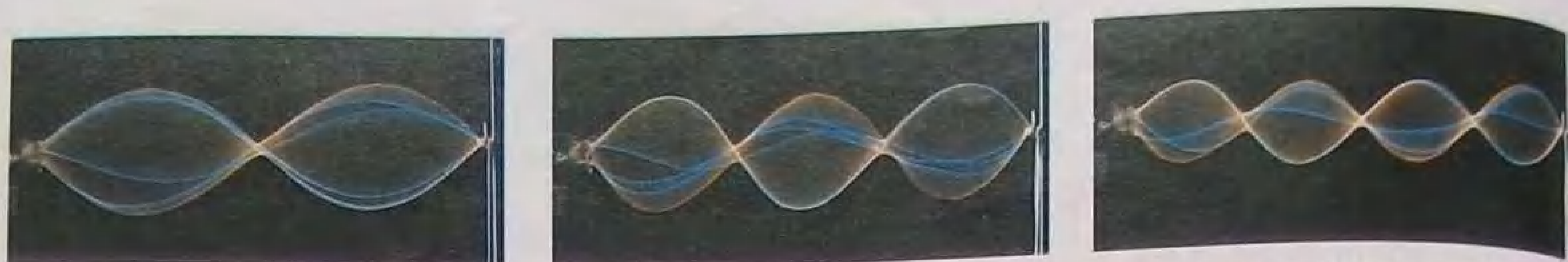


Figura 16-19 Fotografias estroboscópicas revelam ondas estacionárias (imperfeitas) em uma corda excitada por um oscilador na extremidade esquerda. As ondas estacionárias se formam apenas para certas frequências de oscilação. *(Richard Megna/Fundamental Photographs)*

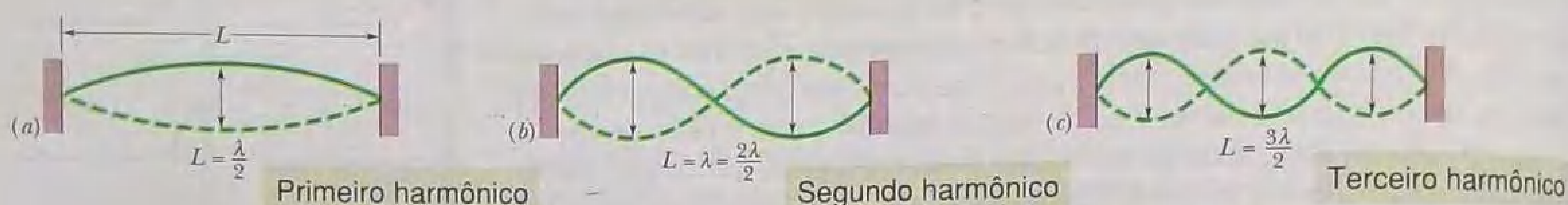


Figura 16-20 Uma corda presa a dois suportes oscila com ondas estacionárias. (*a*) O padrão mais simples possível é o de *meio comprimento de onda*, mostrado na figura pela posição da corda nos pontos de máximo deslocamento (linha contínua e linha tracejada). (*b*) O segundo padrão mais simples é o de um comprimento de onda. (*c*) O terceiro padrão mais simples é o de um e meio comprimento de onda.

Uma segunda configuração simples que satisfaz o requisito de que existam nós nas extremidades fixas aparece na Fig. 16-20*b*. Essa configuração tem três nós e dois antinós. Para que as ondas que se propagam para a esquerda e para a direita a excitem, precisam ter um comprimento de onda $\lambda = L$. Uma terceira configuração é a que aparece na Fig. 16-20*c*. Essa configuração tem quatro nós e três antinós e o comprimento de onda é $\lambda = 2L/3$. Poderíamos continuar essa progressão desenhando configurações cada vez mais complicadas. Em cada passo da progressão, o padrão teria um nó e um antinó a mais que o passo anterior e um meio comprimento de onda adicional seria acomodado na distância L.

Assim, uma onda estacionária pode ser excitada em uma corda de comprimento L por qualquer onda cujo comprimento de onda satisfaz a condição

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{16-65}$$

As frequências de ressonância que correspondem a esses comprimentos de onda podem ser calculadas usando a Eq. 16-13:

$$f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2L}, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{16-66}$$

onde v é a velocidade das ondas progressivas na corda.

A Eq. 16-66 nos diz que as frequências de ressonância são múltiplos inteiros da menor frequência de ressonância, $f = v/2L$, que corresponde a $n = 1$. O modo de oscilação com a menor frequência é chamado de *modo fundamental* ou *primeiro harmônico*. O *segundo harmônico* é o modo de oscilação com $n = 2$, o *terceiro harmônico* é o modo com $n = 3$ e assim por diante. As frequências associadas a esses modos costumam ser chamadas de f_1, f_2, f_3 e assim por diante. O conjunto de todos os modos de oscilação possíveis é chamado de **série harmônica** e n é chamado de **número harmônico** do enésimo harmônico.

Para uma dada corda submetida a uma certa tensão, cada frequência de ressonância corresponde a um padrão de oscilação diferente. Se a frequência está na faixa de sons audíveis, é possível "ouvir" a forma da corda. A ressonância também



Figura 16-21 Uma das muitas ondas estacionárias possíveis da membrana de um tímpano, visualizada através de um pó escuro espalhado sobre a membrana. Quando a membrana é posta para vibrar em uma única frequência por um oscilador mecânico situado no canto superior esquerdo da figura, o pó se acumula nos nós, que são circunferências e linhas retas neste exemplo bidimensional. *(Cortesia de Thomas D. Rossing, Northern Illinois University)*

pode ocorrer em duas dimensões (como na superfície do tímpano da Fig. 16-21) e em três dimensões (como nos balanços e torções induzidos pelo vento em um edifício).

TESTE 6

Na série de frequências de ressonância a seguir, uma frequência (menor que 400 Hz) está faltando: 150, 225, 300, 375 Hz. (a) Qual é a frequência que falta? (b) Qual é a frequência do sétimo harmônico?

Exemplo

Ressonância em ondas transversais: harmônicos e ondas estacionárias

A Fig. 16-22 mostra a oscilação ressonante de uma corda de massa $m = 2{,}500$ g e comprimento $L = 0{,}800$ m sob uma tensão $\tau = 325{,}0$ N. Qual é o comprimento de onda λ das ondas transversais responsáveis pela onda estacionária mostrada na figura e qual é o número harmônico n? Qual é a frequência f das ondas transversais e das oscilações dos elementos da corda? Qual é o módulo máximo da velocidade transversal u_m do elemento da corda que oscila no ponto de coordenada $x = 0{,}180$ m? (O eixo x está indicado na figura.) Para que valor da coordenada y do elemento a velocidade transversal u_m é máxima?

IDEIAS-CHAVE

(1) As ondas transversais que produzem uma onda estacionária têm um comprimento de onda tal que o comprimento L da corda é igual a um número inteiro n de meios comprimentos de onda. (2) A frequência dessas ondas e das oscilações dos elementos da corda é dada pela Eq. 16-66 ($f = nv/2L$). (3) O deslocamento de um elemento da corda em função da posição x e do tempo t é dado pela Eq. 16-60:

$$y'(x,t) = [2y_m \operatorname{sen} kx] \cos \omega t. \qquad (16\text{-}67)$$

Comprimento de onda e número harmônico Na Fig. 16-22, a linha cheia que representa um instantâneo das oscilações, mostra que o comprimento $L = 0{,}800$ acomoda 2 comprimentos de onda das oscilações. Assim, temos:

$$2\lambda = L,$$

ou

$$\lambda = \frac{L}{2}. \qquad (16\text{-}68)$$

$$= \frac{0{,}800 \text{ m}}{2} = 0{,}400 \text{ m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

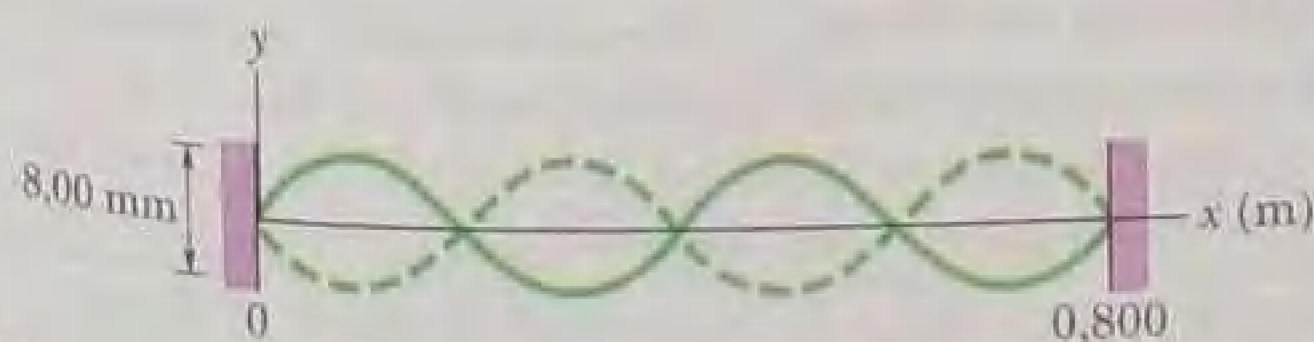


Figura 16-22 Oscilações ressonantes em uma corda sob tensão.

Contando o número de meios comprimentos de onda na Fig. 16-22, vemos que o número harmônico é

$$n = 4. \qquad \text{(Resposta)}$$

Chegaríamos à mesma conclusão comparando as Eqs. 16-68 e 16-65 ($\lambda = 2L/n$). Assim, a corda está oscilando no quarto harmônico.

Frequência Podemos determinar a frequência f das ondas transversais a partir da Eq. 16-13 ($v = \lambda f$) se conhecermos a velocidade v das ondas. A velocidade é dada pela Eq. 16-26, mas devemos substituir a massa específica linear desconhecida μ por m/L. O resultado é o seguinte:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{\tau}{m/L}} = \sqrt{\frac{\tau L}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{(325 \text{ N})(0{,}800 \text{ m})}{2{,}50 \times 10^{-3} \text{ kg}}} = 322{,}49 \text{ m/s}.$$

Explicitando f na Eq. 16-13, obtemos:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{322{,}49 \text{ m/s}}{0{,}400 \text{ m}}$$

$$= 806{,}2 \text{ Hz} \approx 806 \text{ Hz}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Note que podemos chegar ao mesmo resultado usando a Eq. 16-66:

$$f = n\frac{v}{2L} = 4\,\frac{322{,}49 \text{ m/s}}{2(0{,}800 \text{ m})}$$

$$= 806 \text{ Hz}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Observe que 806 Hz não só é a frequência das ondas responsáveis pela produção do quarto harmônico, mas também podemos dizer que *é* o quarto harmônico, como na seguinte afirmação: "O quarto harmônico desta corda é 806 Hz." Também é a frequência da oscilação vertical dos elementos da corda da Fig. 16-22, que oscilam verticalmente em um movimento harmônico simples, do mesmo modo como um bloco pendurado em uma mola vertical oscila verticalmente em um movimento harmônico simples. Finalmente, é também a frequência do som produzido pela

corda, já que os elementos da corda produzem alternadamente compressões e rarefações do ar que os cerca, produzindo ondas sonoras.

Velocidade transversal O deslocamento y' do elemento da corda situado na coordenada x é dado pela Eq. 16-67 em função do tempo t. O fator $\cos \omega t$ é responsável pela variação com o tempo e, portanto, pelo "movimento" da onda estacionária. O fator $2y_m$ sen kx estabelece a extensão do movimento. A maior extensão acontece nos antinós, onde sen kx é $+1$ ou -1 e a amplitude é $2y_m$. De acordo com a Fig. 16-22, $2y_m = 4{,}00$ mm e, portanto, $y_m = 2{,}00$ mm.

Queremos calcular a velocidade transversal, ou seja, a velocidade de um elemento de corda na direção do eixo y. Para isso, derivamos a Eq. 16-67 em relação ao tempo:

$$u(x, t) = \frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[(2y_m \operatorname{sen} kx)\cos \omega t]$$
$$= [-2y_m\omega \operatorname{sen} kx]\operatorname{sen}\omega t. \qquad (16\text{-}69)$$

Na Eq. 16-69, o fator sen ωt é responsável pela variação da velocidade com o tempo e o fator $-2y_m\omega$ sen kx estabelece a extensão dessa variação. A velocidade máxima é o valor absoluto da extensão:

$$u_m = |-2y_m\omega \operatorname{sen} kx|.$$

Para calcular esse valor para o elemento situado em $x = 0{,}180$ m, observamos que $y_m = 2{,}00$ mm, $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/(0{,}400 \text{ m})$ e $\omega = 2\pi f = 2\pi(806{,}2 \text{ Hz})$. Assim, a velocidade máxima do elemento situado em $x = 0{,}180$ m é

$$u_m = \left| -2(2{,}00 \times 10^{-3} \text{ m})(2\pi)(806{,}2 \text{ Hz}) \times \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{0{,}400 \text{ m}}(0{,}180 \text{ m})\right)\right|$$
$$= 6{,}26 \text{ m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Uma forma de determinar para que valor da coordenada y do elemento a velocidade transversal é máxima seria comparar as Eqs. 16-69 e 16-67. Entretanto, podemos poupar trabalho pensando um pouquinho. Como o elemento está descrevendo um movimento harmônico simples, a velocidade é máxima no ponto central da oscilação, ou seja, no ponto em que $y = 0$.

REVISÃO E RESUMO

Ondas Transversais e Longitudinais As ondas mecânicas podem existir apenas em meios materiais e são governadas pelas leis de Newton. As ondas mecânicas **transversais**, como as que existem em uma corda esticada, são ondas nas quais as partículas do meio oscilam perpendicularmente à direção de propagação da onda. As ondas em que as partículas oscilam na direção de propagação da onda são chamadas de ondas **longitudinais**.

Ondas Senoidais Uma onda senoidal que se propaga no sentido positivo de um eixo x pode ser representada pela função

$$y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t), \qquad (16\text{-}2)$$

em que y_m é a **amplitude** da onda, k é o **número de onda**, ω é a **frequência angular** e $kx - \omega t$ é a **fase**. O **comprimento de onda** λ está relacionado a k através da equação

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \qquad (16\text{-}5)$$

O **período** T e a **frequência** f da onda estão relacionados a ω através da equação

$$\frac{\omega}{2\pi} = f = \frac{1}{T}. \qquad (16\text{-}9)$$

Finalmente, a **velocidade** v da onda está relacionada a esses outros parâmetros através das equações

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \qquad (16\text{-}13)$$

Equação de uma Onda Progressiva Qualquer função da forma

$$y(x, t) = h(kx \pm \omega t) \qquad (16\text{-}17)$$

pode representar uma **onda progressiva** com uma velocidade dada pela Eq. 16-13 e uma forma de onda dada pela forma matemática da função h. O sinal positivo se aplica às ondas que se propagam no sentido negativo do eixo x e o sinal negativo às ondas que se propagam no sentido positivo do eixo x.

Velocidade de Onda em uma Corda Esticada A velocidade de uma onda em uma corda esticada é determinada pelas propriedades da corda. A velocidade em uma corda com tensão τ e massa específica linear μ é dada por

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}. \qquad (16\text{-}26)$$

Potência A **potência média** (taxa média de transmissão de energia) de uma onda senoidal em uma corda esticada é dada por

$$P_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}\mu v \omega^2 y_m^2. \qquad (16\text{-}33)$$

Superposição de Ondas Quando duas ou mais ondas se propagam no mesmo meio, o deslocamento de uma partícula é a soma dos deslocamentos que seriam provocados pelas ondas agindo separadamente.

Interferência de Ondas Duas ondas senoidais em uma mesma corda sofrem **interferência**, somando-se ou cancelando-se de acordo com o princípio da superposição. Se as duas ondas se propagam no mesmo sentido e têm a mesma amplitude y_m e a mesma frequência angular ω (e, portanto, o mesmo comprimento de onda λ), mas têm uma **diferença de fase constante** ϕ, o resultado é uma única onda com a mesma frequência:

$$y'(x, t) = [2y_m \cos \tfrac{1}{2}\phi] \operatorname{sen}(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\phi). \qquad (16\text{-}51)$$

Se $\phi = 0$, as ondas têm fases iguais e a interferência é totalmente construtiva; se $\phi = \pi$ rad, as ondas têm fases opostas e a interferência é totalmente destrutiva.

Fasores Uma onda $y(x, t)$ pode ser representada por um **fasor**, um vetor de módulo igual à amplitude y_m da onda que gira em torno da origem com uma velocidade angular igual à frequência angular ω da onda. A projeção do fasor em um eixo vertical fornece o deslocamento y produzido em um elemento do meio pela passagem da onda.

Ondas Estacionárias A interferência de duas ondas senoidais iguais que se propagam em sentidos opostos produz uma **onda estacionária**. No caso de uma corda com as extremidades fixas, a onda estacionária é dada por

$$y'(x, t) = [2y_m \operatorname{sen} kx] \cos \omega t. \qquad (16\text{-}60)$$

As ondas estacionárias possuem pontos em que o deslocamento é nulo, chamados de **nós**, e pontos em que o deslocamento é máximo, chamados de **antinós**.

Ressonância Ondas estacionárias podem ser produzidas em uma corda pela reflexão de ondas progressivas nas extremidades da corda. Se uma extremidade é fixa, existe um nó nessa posição. Isso limita as frequências possíveis das ondas estacionárias em uma dada corda. Cada frequência possível é uma **frequência de ressonância**, e a onda estacionária correspondente é um **modo de oscilação**. Para uma corda esticada de comprimento L com as extremidades fixas, as frequências de ressonância são dadas por

$$f = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2L}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (16\text{-}66)$$

O modo de oscilação correspondente a $n = 1$ é chamado de *modo fundamental* ou *primeiro harmônico*; o modo correspondente a $n = 2$ é o *segundo harmônico* e assim por diante.

PERGUNTAS

1 As quatro ondas a seguir são produzidas em quatro cordas com a mesma massa específica linear (x está em metros e t em segundos). Ordene as ondas de acordo (a) com a velocidade e (b) com a tensão na corda, em ordem decrescente:

(1) $y_1 = (3 \text{ mm}) \operatorname{sen}(x - 3t)$, (3) $y_3 = (1 \text{ mm}) \operatorname{sen}(4x - t)$,
(2) $y_2 = (6 \text{ mm}) \operatorname{sen}(2x - t)$, (4) $y_4 = (2 \text{ mm}) \operatorname{sen}(x - 2t)$.

2 Na Fig. 16-23, a onda 1 é formada por um pico retangular com 4 unidades de altura e largura d e um vale retangular com 2 unidades de profundidade e largura d. A onda se propaga para a direita ao longo de um eixo x. As ondas 2, 3 e 4 são ondas semelhantes, com a mesma altura, profundidade e largura, que se propagam para a esquerda no mesmo eixo, passando pela onda 1. A onda 1, que se propaga para a direita, e uma das ondas que se propagam para a esquerda interferem ao passar uma pela outra. Com qual das ondas que se propagam para a esquerda a interferência produz, momentaneamente, (a) o vale mais profundo, (b) uma linha reta e (c) um pulso retangular de largura $2d$?

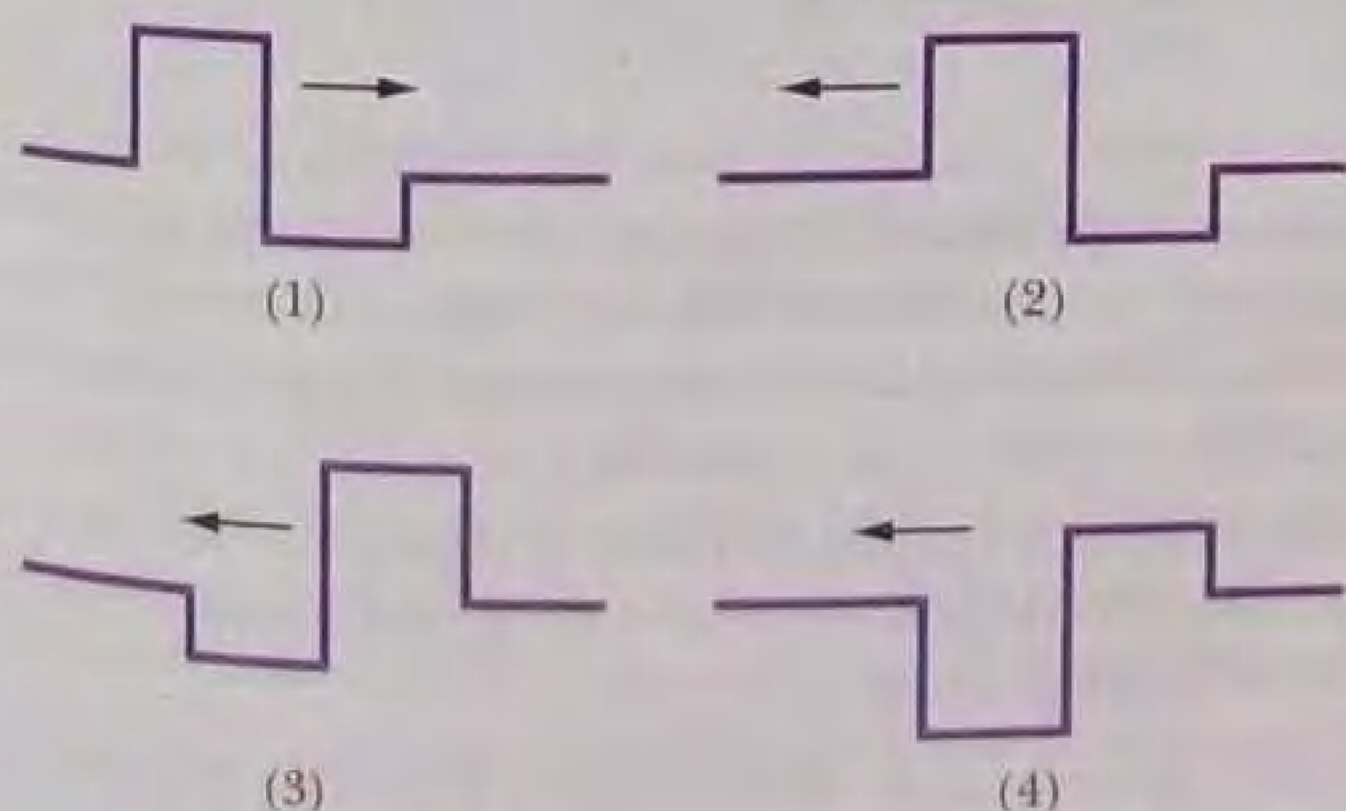


Figura 16-23 Pergunta 2.

3 A Fig. 16-24a mostra um instantâneo de uma onda que se propaga no sentido positivo de x em uma corda sob tensão. Quatro elementos da corda estão indicados por letras. Para cada um desses elementos, determine se, no momento do instantâneo, o elemento está se movendo para cima, para baixo ou está momentaneamente em repouso. (*Sugestão:* imagine a onda passando pelos quatro elementos da corda, como se estivesse assistindo a um vídeo do movimento da onda.)

A Fig. 16-24b mostra o deslocamento em função do tempo de um elemento da corda situado, digamos, em $x = 0$. Nos instantes indicados por letras, o elemento está se movendo para cima, para baixo ou está momentaneamente em repouso?

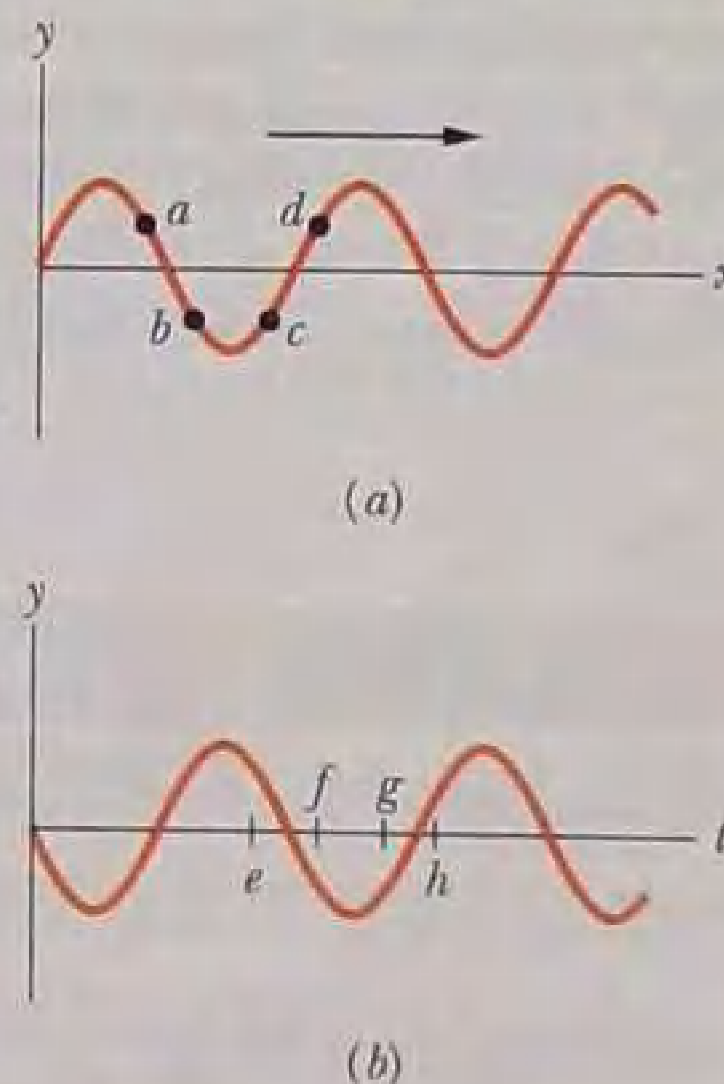


Figura 16-24 Pergunta 3.

4 A Fig. 16-25 mostra três ondas que são produzidas *separadamente* em uma corda que está esticada ao longo de um eixo x e submetida a uma certa tensão. Ordene as ondas de acordo com (a) o comprimento de onda, (b) a velocidade e (c) a frequência angular, em ordem decrescente.

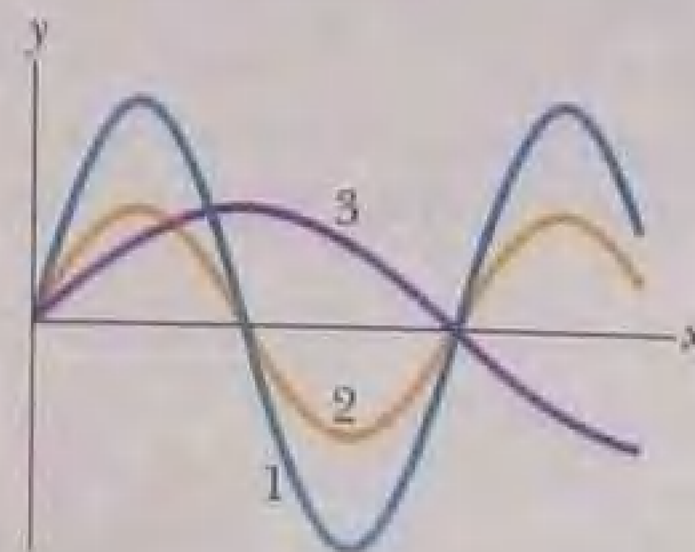


Figura 16-25 Pergunta 4.

5 Se você começa com duas ondas senoidais de mesma amplitude que se propagam em fase em uma corda e desloca a fase de uma das ondas de 5,4 comprimentos de onda, que tipo de interferência ocorre na corda?

6 As amplitudes e a diferença de fase para quatro pares de ondas com o mesmo comprimento de onda são (a) 2 mm, 6 mm e π rad; (b) 3 mm, 5 mm e π rad; (c) 7 mm, 9 mm e π rad; (d) 2 mm, 2 mm e 0 rad. Todos os pares se propagam no mesmo sentido na mesma corda. Sem executar cálculos, ordene os quatro pares de acordo com a amplitude da onda resultante, em ordem decrescente. (*Sugestão:* construa diagramas fasoriais.)

7 Uma onda senoidal é produzida em uma corda sob tensão e transporta energia a uma taxa média $P_{\text{méd},1}$. Duas ondas, iguais à primeira, são em seguida produzidas na corda com uma diferença de fase ϕ de 0; 0,2 ou 0,5 comprimento de onda. (a) Apenas com cálculos mentais, ordene essas opções de ϕ de acordo com a taxa média com a qual as ondas transportam energia, em ordem decrescente. (b) Para a primeira opção de ϕ, qual é a taxa média em termos de $P_{\text{méd},1}$?

8 (a) Se uma onda estacionária em uma corda é dada por

$$y'(t) = (3 \text{ mm}) \operatorname{sen}(5x) \cos(4t),$$

existe um nó ou um antinó em $x = 0$? (b) Se a onda estacionária é dada por

$$y'(t) = (3 \text{ mm}) \operatorname{sen}(5x + \pi/2) \cos(4t),$$

existe um nó ou um antinó em $x = 0$?

9 Duas cordas A e B têm o mesmo comprimento e a mesma massa específica linear, mas a corda B está submetida a uma tensão maior que a corda A. A Fig. 16-26 mostra quatro situações, de (*a*) a (*d*), nas quais existem ondas estacionárias nas duas cordas. Em que situações existe a possibilidade de que as cordas A e B estejam oscilando com a mesma frequência de ressonância?

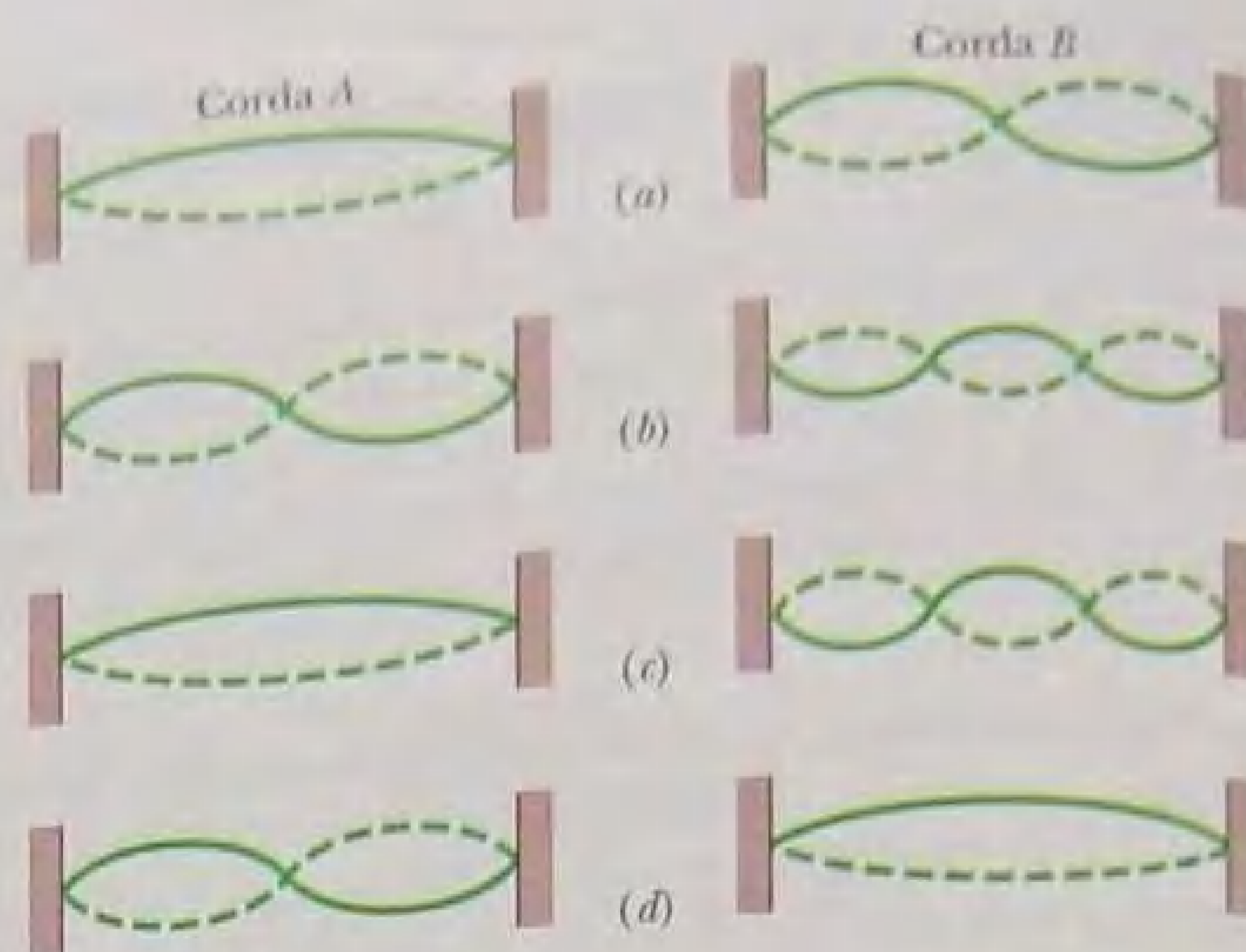


Figura 16-26 Pergunta 9.

10 Se o sétimo harmônico é excitado em uma corda, (a) quantos nós estão presentes e (b) no ponto médio existe um nó, um antinó ou um estado intermediário? Se, em seguida, é excitado o sexto harmônico, (c) o comprimento de onda da ressonância é maior ou menor que o do sétimo harmônico e (d) a frequência de ressonância é maior ou menor?

11 A Fig. 16-27 mostra os diagramas fasoriais de três situações nas quais duas ondas se propagam na mesma corda. As seis ondas têm a mesma amplitude. Ordene as situações de acordo com a amplitude da onda resultante, em ordem decrescente.

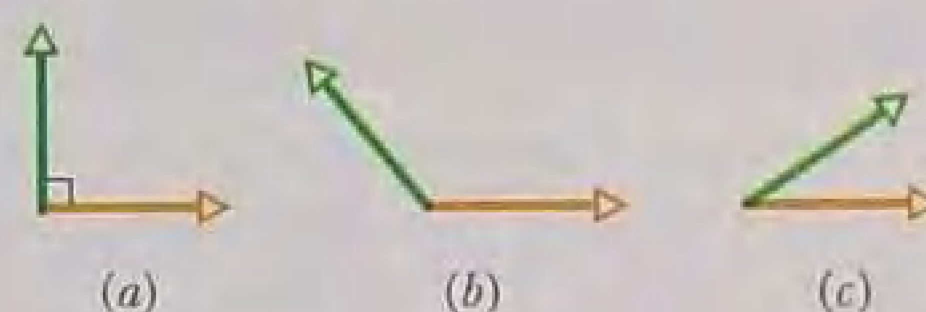


Figura 16-27 Pergunta 11.

PROBLEMAS


• — ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Seção 16-5 A Velocidade de uma Onda Progressiva

•1 Se a função $y(x, t) = (6{,}0 \text{ mm}) \operatorname{sen}(kx + (600 \text{ rad/s})t + \phi)$ descreve uma onda que se propaga em uma corda, quanto tempo um ponto da corda leva para se mover entre os deslocamentos $y = +12{,}0$ mm e $y = -2{,}0$ mm?

•2 *Uma onda humana.* A ola é uma onda, criada pela torcida, que se propaga nos estádios em eventos esportivos (Fig. 16-28). Quando a onda chega a um grupo de espectadores, eles ficam em pé com os braços levantados e depois tornam a se sentar. Em qualquer instante, a largura w da onda é a distância entre a borda dianteira (as pessoas que estão começando a se levantar) e o borda traseira (as pessoas que estão começando a se sentar). Suponha que uma ola percorre uma distância de 853 assentos de um estádio em 39 s e que os espectadores levam, em média, 1,8 s para responder à passagem da onda levantando-se e voltando a se sentar. Determine (a) a velocidade v da onda (em assentos por segundo) e (b) a largura w da onda (em número de assentos).



Figura 16-28 Problema 2.

•3 Uma onda possui uma frequência angular de 110 rad/s e um comprimento de onda de 1,80 m. Calcule (a) o número de onda e (b) a velocidade da onda.

•4 Um escorpião da areia pode detectar a presença de um besouro (sua presa) pelas ondas que o movimento do besouro produz na superfície da areia (Fig. 16-29). As ondas são de dois tipos: transversais, que se propagam com uma velocidade $v_t = 50$ m/s, e longitudinais, que se propagam com uma velocidade $v_l = 150$ m/s. Se um movimento brusco produz essas ondas, o escorpião é capaz de determinar a que distância se encontra o besouro a partir da diferença Δt entre os instantes em que as duas ondas chegam à perna que está mais próxima do besouro. Se $\Delta t = 4{,}0$ ms, a que distância está o besouro?

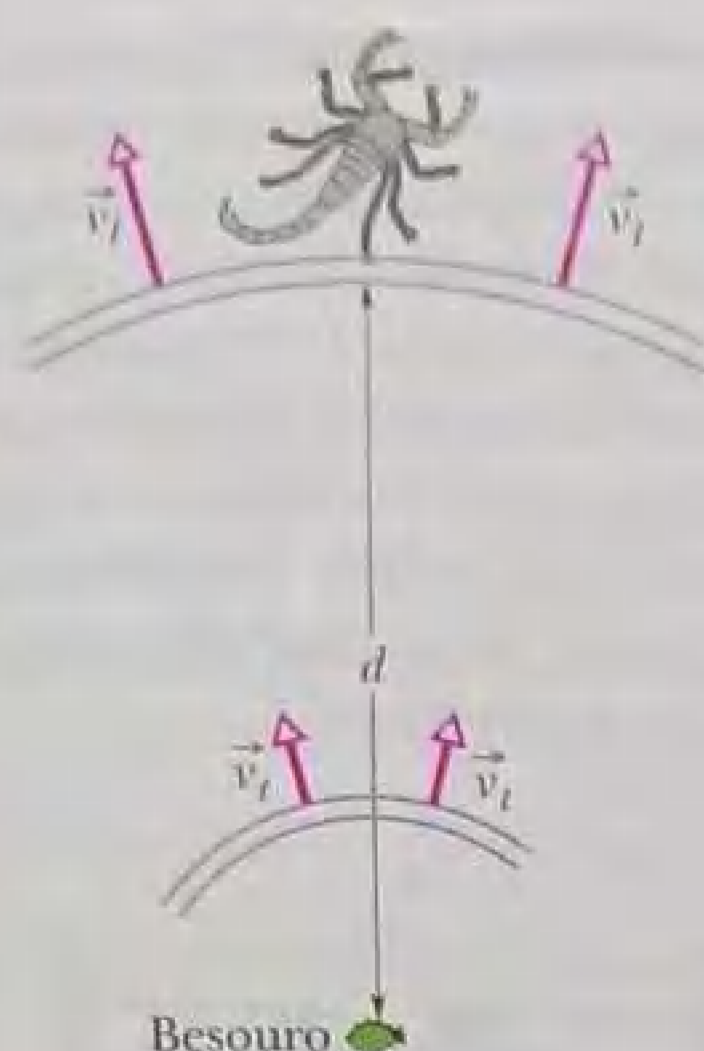


Figura 16-29 Problema 4.

•5 Uma onda senoidal se propaga em uma corda. O tempo necessário para que um ponto da corda se desloque do deslocamento máximo até zero é 0,170 s. Qual é (a) o período e (b) a frequência da onda? (c) O comprimento de onda é 1,40 m; qual é a velocidade da onda?

••6 Uma onda senoidal se propaga em uma corda sob tensão. A Fig. 16-30 mostra a inclinação da corda em função da posição no instante $t = 0$. A escala do eixo x é definida por $x_s = 0{,}80$ m. Qual é a amplitude da onda?



Figura 16-30 Problema 6.

••7 Uma onda senoidal transversal se propaga em corda no sentido positivo de um eixo x com uma velocidade de 80 m/s. No instante $t = 0$, uma partícula da corda situada em $x = 0$ possui um deslocamento transversal de 4,0 cm em relação à posição de equilíbrio e não está se movendo. A velocidade transversal máxima da partícula situada em $x = 0$ é 16 m/s. (a) Qual é a frequência da onda? (b) Qual é o comprimento de onda? Se a equação de onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \phi)$, determine (c) y_m, (d) k, (e) ω, (f) ϕ e (g) o sinal que precede ω.

••8 A Fig. 16-31 mostra a velocidade transversal u em função do tempo t para o ponto de uma corda situado em $x = 0$, quando uma onda passa por ele. A escala do eixo vertical é definida por $u_s = 4{,}0$ m/s. A onda tem a forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi)$. Qual é o valor de ϕ? (*Atenção:* as calculadoras nem sempre fornecem o valor correto de uma função trigonométrica inversa; por isso, verifique se o valor obtido para ϕ é o valor correto, substituindo-o na função $y(x, t)$, usando um valor numérico qualquer para ω e plotando a função assim obtida.)

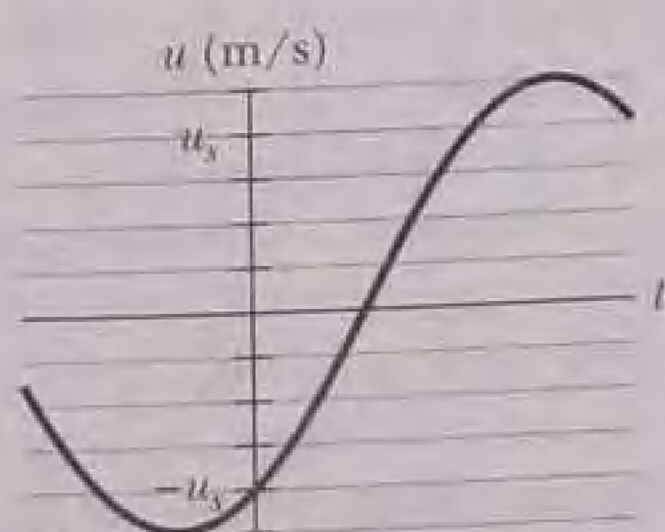


Figura 16-31 Problema 8.

••9 Uma onda senoidal que se propaga em uma corda é mostrada duas vezes na Fig. 16-32, antes e depois que o pico A se desloque 6,0 cm no sentido positivo de um eixo x em 4,0 ms. A distância entre as marcas do eixo horizontal é 10 cm; $H = 6{,}0$ mm. Se a equação da onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)$, determine (a) y_m, (b) k, (c) ω e (d) o sinal que precede ω.

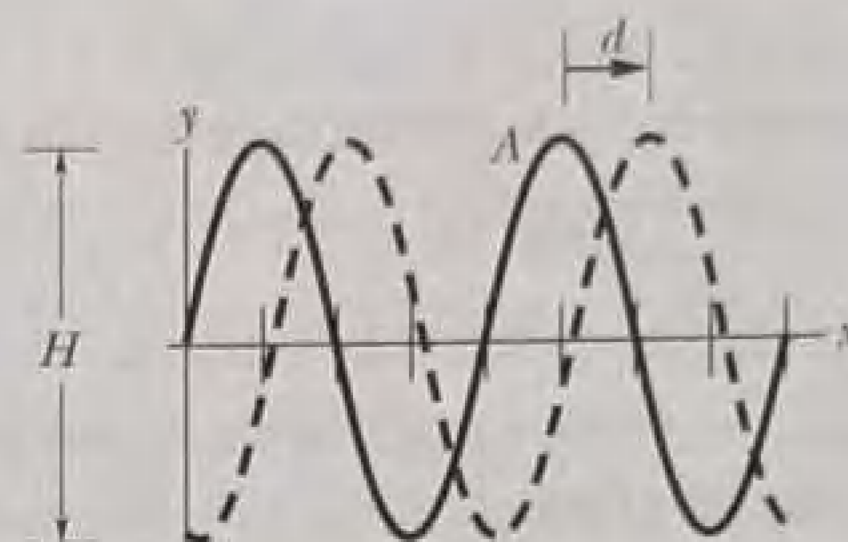


Figura 16-32 Problema 9.

••10 A equação de uma onda transversal que se propaga em uma corda muito longa é $y = 6{,}0 \operatorname{sen}(0{,}020\pi x + 4{,}0\pi t)$, onde x e y estão em centímetros e t em segundos. Determine (a) a amplitude, (b) o comprimento de onda, (c) a frequência, (d) a velocidade, (e) o sentido de propagação da onda e (f) a máxima velocidade transversal de uma partícula da corda. (g) Qual é o deslocamento transversal em $x = 3{,}5$ cm para $t = 0{,}26$ s?

••11 Uma onda transversal senoidal de comprimento de onda 20 cm se propaga em uma corda no sentido positivo de um eixo x. O deslocamento y da partícula da corda situada em $x = 0$ é dado na Fig. 16-33 em função do tempo t. A escala do eixo vertical é definida por $y_s = 4{,}0$ cm. A equação da onda deve ser da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \phi)$. (a) Em $t = 0$, o gráfico de y em função de x tem a forma de uma função seno positiva ou de uma função seno negativa? Determine (b) y_m, (c) k, (d) ω, (e) ϕ, (f) o sinal que precede ω e (g) a velocidade da onda. (h) Qual é a velocidade transversal da partícula em $x = 0$ para $t = 5{,}0$ s?

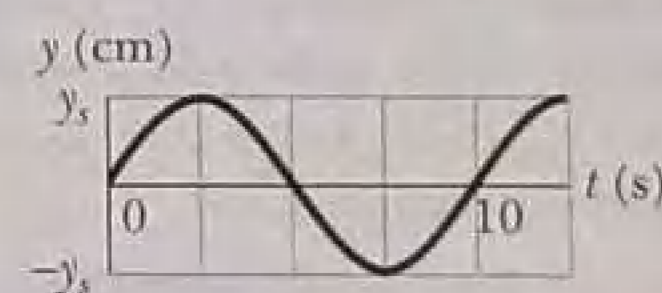


Figura 16-33 Problema 11.

••12 A função $y(x, t) = (15{,}0 \text{ cm}) \cos(\pi x - 15\pi t)$, com x em metros e t em segundos, descreve uma onda em uma corda esticada. Qual é a velocidade transversal de um ponto da corda no instante em que o ponto possui um deslocamento $y = +12{,}0$ cm?

••13 Uma onda senoidal de 500 Hz se propaga em uma corda a 350 m/s. (a) Qual é a distância entre dois pontos da corda cuja diferença de fase é $\pi/3$ rad? (b) Qual é a diferença de fase entre dois deslocamentos de um ponto da corda que acontecem com um intervalo de 1,00 ms?

Seção 16-6 Velocidade da Onda em uma Corda Esticada

•14 A equação de uma onda transversal em uma corda é

$$y = (2{,}0 \text{ mm}) \operatorname{sen}[(20 \text{ m}^{-1})x - (600 \text{ s}^{-1})t].$$

A tensão da corda é 15 N. (a) Qual é a velocidade da onda? (b) Determine a massa específica linear da corda em gramas por metro.

•15 Uma corda esticada tem uma massa específica linear de 5,00 g/cm e está sujeita a uma tensão de 10,0 N. Uma onda senoidal na

corda tem uma amplitude de 0,12 mm, uma frequência de 100 Hz e está se propagando no sentido negativo de um eixo x. Se a equação da onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)$, determine (a) y_m, (b) k, (c) ω e (d) o sinal que precede ω.

•**16** A velocidade de uma onda transversal em uma corda é 170 m/s quando a tensão da corda é 120 N. Qual deve ser o valor da tensão para que a velocidade da onda aumente para 180 m/s?

•**17** A massa específica linear de uma corda é $1{,}6 \times 10^{-4}$ kg/m. Uma onda transversal na corda é descrita pela equação

$$y = (0{,}021 \text{ m}) \operatorname{sen}[(2{,}0 \text{ m}^{-1})x + (30 \text{ s}^{-1})t].$$

Qual é (a) a velocidade da onda e (b) a tensão da corda?

•**18** A corda mais pesada e a corda mais leve de um certo violino têm uma massa específica linear de 3,0 e 0,29 g/m, respectivamente. Qual é a razão entre o diâmetro da corda mais leve e o da corda mais pesada, supondo que as cordas são feitas do mesmo material?

•**19** Qual é a velocidade de uma onda transversal em uma corda de 2,00 m de comprimento e 60,0 g de massa sujeita a uma tensão de 500 N?

•**20** A tensão em um fio preso nas duas extremidades é duplicada sem que o comprimento do fio sofra uma variação apreciável. Qual é a razão entre a nova e a antiga velocidade das ondas transversais que se propagam no fio?

••**21** Um fio de 100 g é mantido sob uma tensão de 250 N com uma extremidade em $x = 0$ e a outra em $x = 10{,}0$ m. No instante $t = 0$, o pulso 1 começa a se propagar no fio a partir do ponto $x = 10{,}0$ m. No instante $t = 30{,}0$ ms, o pulso 2 começa a se propagar no fio a partir do ponto $x = 0$. Em que ponto x os pulsos começam a se superpor?

••**22** Uma onda senoidal se propaga em uma corda com uma velocidade de 40 cm/s. O deslocamento da corda em $x = 10$ cm varia com o tempo de acordo com a equação $y = (5{,}0 \text{ cm}) \operatorname{sen}[1{,}0 - (4{,}0 \text{ s}^{-1})t]$. A massa específica linear da corda é 4,0 g/cm. Qual é (a) a frequência e (b) o comprimento de onda da onda? Se a equação da onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)$, determine (c) y_m, (d) k, (e) ω e (f) o sinal que precede ω. (g) Qual é a tensão da corda?

••**23** Uma onda transversal senoidal se propaga em uma corda no sentido negativo de um eixo x. A Fig. 16-34 mostra um gráfico do deslocamento em função da posição no instante $t = 0$; a escala do eixo y é definida por $y_s = 4{,}0$ cm. A tensão da corda é 3,6 N e a massa específica linear é 25 g/m. Determine (a) a amplitude, (b) o comprimento de onda, (c) a velocidade da onda e (d) o período da onda. (e) Determine a velocidade transversal máxima de uma partícula da corda. Se a onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \phi)$, determine (f) k, (g) ω, (h) ϕ e (i) o sinal que precede ω.

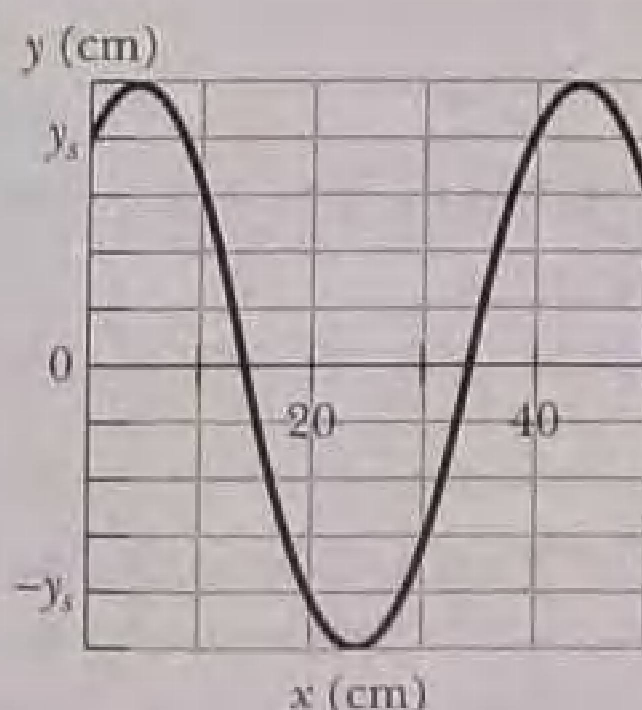


Figura 16-34 Problema 23.

•••**24** Na Fig. 16-35a, a corda 1 tem uma massa específica linear de 3,00 g/m e a corda 2 tem uma massa específica linear de 5,00 g/m. As cordas estão submetidas à tensão produzida por um bloco suspenso de massa $M = 500$ g. Calcule a velocidade da onda (a) na corda 1 e (b) na corda 2. (*Sugestão:* quando uma corda envolve metade de uma polia, exerce sobre a polia uma força duas vezes maior que a tensão da corda.) Em seguida, o bloco é dividido em dois blocos (com $M_1 + M_2 = M$) e o sistema é montado como na Fig. 16-35b. Determine (c) M_1 e (d) M_2 para que as velocidades das ondas nas duas cordas sejam iguais.

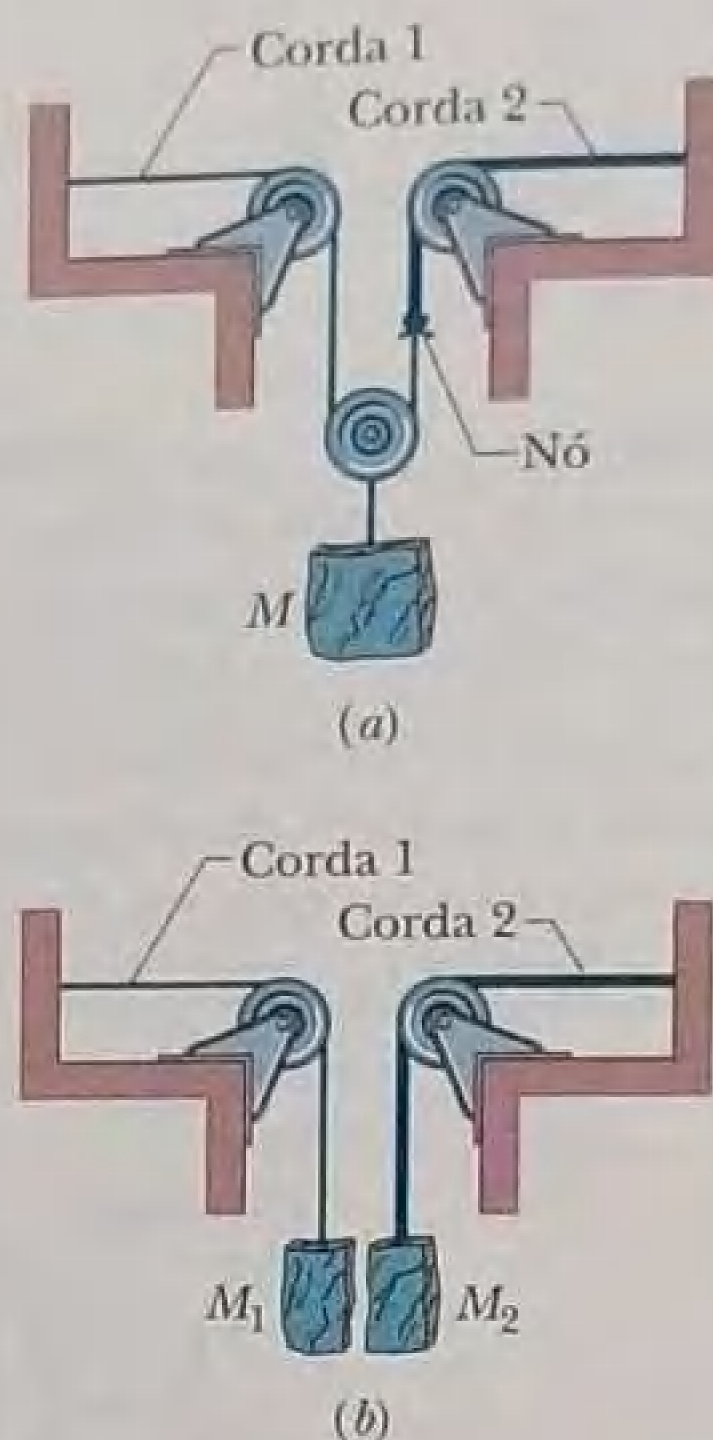


Figura 16-35 Problema 24.

•••**25** Uma corda uniforme de massa m e comprimento L está pendurada em um teto. (a) Mostre que a velocidade de uma onda transversal na corda é função de y, a distância da extremidade inferior, e é dada por $v = \sqrt{gy}$. (b) Mostre que o tempo que uma onda transversal leva para atravessar a corda é dado por $t = 2\sqrt{L/g}$.

Seção 16-7 Energia e Potência de uma Onda Progressiva em uma Corda

•**26** Uma corda na qual ondas podem se propagar tem 2,70 m de comprimento e 260 g de massa. A tensão da corda é 36,0 N. Qual deve ser a frequência de ondas progressivas com uma amplitude de 7,70 mm para que a potência média seja 85,0 W?

••**27** Uma onda senoidal é produzida em uma corda com uma massa específica linear de 2,0 g/m. Enquanto a onda se propaga, a energia cinética dos elementos de massa ao longo da corda varia. A Fig. 16-36a mostra a taxa dK/dt com a qual a energia cinética passa pelos

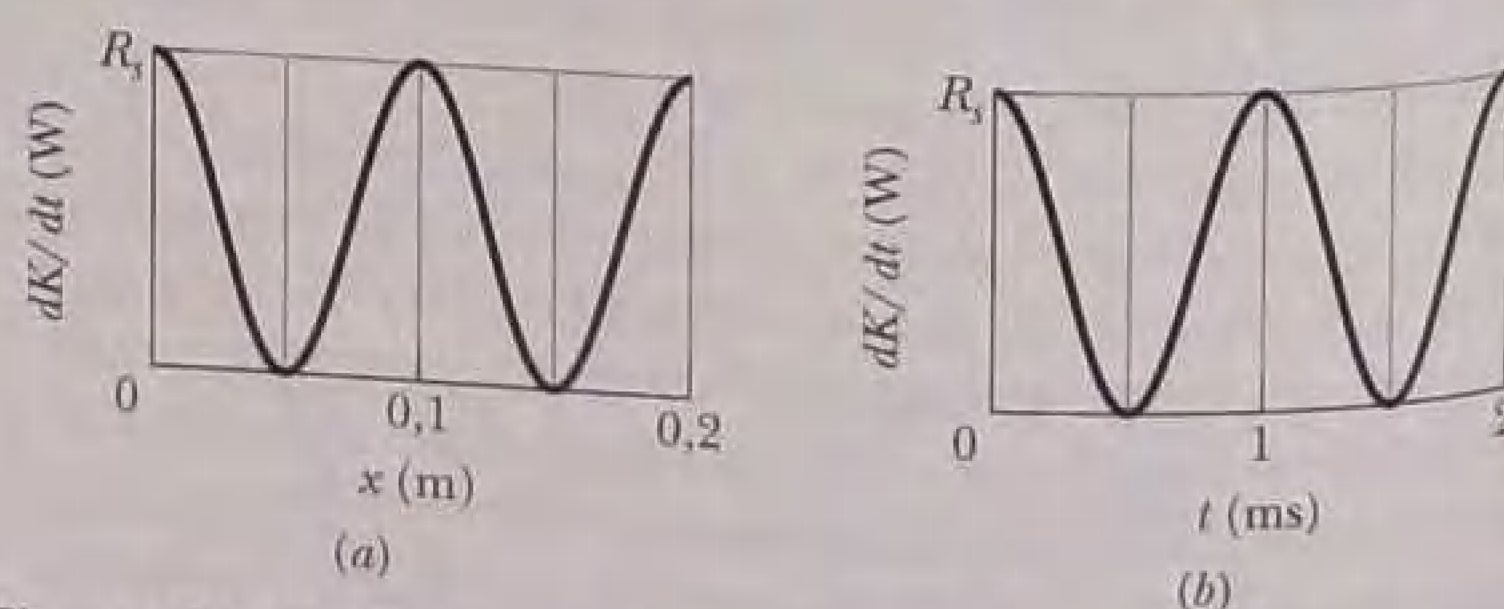


Figura 16-36 Problema 27.

elementos de massa da corda em um certo instante em função da distância x ao longo da corda. A Fig. 16-36b é semelhante, exceto pelo fato de que mostra a taxa com a qual a energia cinética passa por um determinado elemento de massa (situado em um certo ponto da corda) em função do tempo t. Nos dois casos, a escala do eixo vertical é definida por $R_s = 10$ W. Qual é a amplitude da onda?

Seção 16-8 A Equação de Onda

•28 Use a equação de onda para determinar a velocidade de uma onda dada por

$$y(x,t) = (3{,}00\text{ mm})\,\text{sen}[(4{,}00\text{ m}^{-1})x - (7{,}00\text{ s}^{-1})t].$$

••29 Use a equação de onda para determinar a velocidade de uma onda dada por

$$y(x,t) = (2{,}00\text{ mm})[(20\text{ m}^{-1})x - (4{,}0\text{ s}^{-1})t]^{0,5}.$$

•••30 Use a equação de onda para determinar a velocidade de uma onda dada em termos de uma função genérica $h(x, t)$:

$$y(x,t) = (4{,}00\text{ mm})\,h[(30\text{ m}^{-1})x + (6{,}0\text{ s}^{-1})t].$$

Seção 16-10 Interferência de Ondas

•31 Duas ondas progressivas iguais, que se propagam no mesmo sentido, estão defasadas de $\pi/2$ rad. Qual é a amplitude da onda resultante em termos da amplitude comum y_m das duas ondas?

•32 Que diferença de fase entre duas ondas iguais, a não ser pela constante de fase, que se propagam no mesmo sentido em corda esticada, produz uma onda resultante de amplitude 1,5 vez a amplitude comum das duas ondas? Expresse a resposta (a) em graus, (b) em radianos e (c) em comprimentos de onda.

••33 Duas ondas senoidais com a mesma amplitude de 9,00 mm e o mesmo comprimento de onda se propagam em uma corda esticada ao longo de um eixo x. A onda resultante é mostrada duas vezes na Fig. 16-37, antes e depois que o vale A se desloque de uma distância $d = 56{,}0$ cm em 8,0 ms. A distância entre as marcas do eixo horizontal é 10 cm; $H = 8{,}0$ mm. A equação de uma das ondas é da forma $y(x, t) = y_m\,\text{sen}(kx \pm \omega t + \phi_1)$, onde $\phi_1 = 0$ e cabe ao leitor determinar o sinal que precede ω. Na equação da outra onda, determine (a) y_m, (b) k, (c) ω, (d) ϕ_2 e (d) o sinal que precede ω.

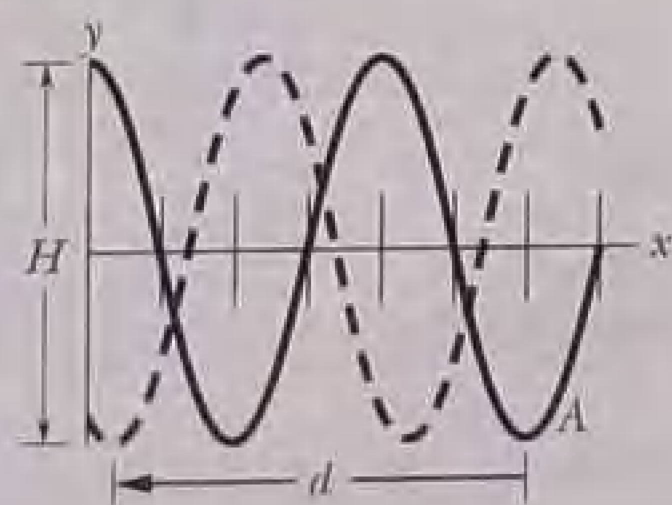


Figura 16-37 Problema 33.

•••34 Uma onda senoidal de frequência angular 1200 rad/s e amplitude 3,00 mm é produzida em uma corda de massa específica linear 2,00 g/m e 1200 N de tensão. (a) Qual é a taxa média com a qual a energia é transportada pela onda para a extremidade oposta da corda? (b) Se, ao mesmo tempo, uma onda igual se propaga em uma corda vizinha, de mesmas características, qual é a taxa média total com a qual a energia é transportada pelas ondas para as extremidades opostas das duas cordas? Se, em vez disso, as duas ondas são produzidas ao mesmo tempo na *mesma* corda, qual é a taxa média total com a qual transportam energia quando a diferença de fase entre as duas ondas é (c) 0, (d) 0,4π rad e (e) π rad?

Seção 16-11 Fasores

•35 Duas ondas senoidais de mesma frequência se propagam no mesmo sentido em uma corda. Se $y_{m1} = 3{,}0$ cm, $y_{m2} = 4{,}0$ cm, $\phi_1 = 0$ e $\phi_2 = \pi/2$ rad, qual é a amplitude da onda resultante?

••36 Quatro ondas são produzidas na mesma corda e no mesmo sentido:

$$y_1(x,t) = (4{,}00\text{ mm})\,\text{sen}(2\pi x - 400\pi t)$$
$$y_2(x,t) = (4{,}00\text{ mm})\,\text{sen}(2\pi x - 400\pi t + 0{,}7\pi)$$
$$y_3(x,t) = (4{,}00\text{ mm})\,\text{sen}(2\pi x - 400\pi t + \pi)$$
$$y_4(x,t) = (4{,}00\text{ mm})\,\text{sen}(2\pi x - 400\pi t + 1{,}7\pi).$$

Qual é a amplitude da onda resultante?

••37 Duas ondas se propagam na mesma corda:

$$y_1(x,t) = (4{,}60\text{ mm})\,\text{sen}(2\pi x - 400\pi t)$$
$$y_2(x,t) = (5{,}60\text{ mm})\,\text{sen}(2\pi x - 400\pi t + 0{,}80\pi\text{ rad}).$$

Qual é (a) a amplitude e (b) o ângulo de fase (em relação à onda 1) da onda resultante? (c) Se uma terceira onda de amplitude 5,00 mm também é produzida na corda com o mesmo sentido que as duas primeiras, qual deve ser o ângulo de fase para que a amplitude da nova onda resultante seja máxima?

••38 Duas ondas senoidais de mesma frequência e mesmo sentido são produzidas em uma corda esticada. Uma das ondas tem uma amplitude de 5,0 mm e a outra uma amplitude de 8,0 mm. (a) Qual deve ser a diferença de fase ϕ_1 entre as duas ondas para que a amplitude da onda resultante seja a menor possível? (b) Qual essa amplitude mínima? (c) Qual deve ser a diferença de fase ϕ_2 entre as duas ondas para que a amplitude da onda resultante seja a maior possível? (d) Qual é essa amplitude máxima? (e) Qual é a amplitude resultante se o ângulo de fase é $(\phi_1 - \phi_2)/2$?

••39 Duas ondas senoidais de mesmo período, com 5,0 e 7,0 mm de amplitude, se propagam no mesmo sentido em uma corda esticada, onde produzem uma onda resultante com uma amplitude de 9,0 mm. A constante de fase da onda de 5,0 mm é 0. Qual é a constante de fase da onda de 7,0 mm?

Seção 16-13 Ondas Estacionárias e Ressonância

•40 Duas ondas senoidais com comprimentos de onda e amplitudes iguais se propagam em sentidos opostos em uma corda com uma velocidade de 10 cm/s. Se o intervalo de tempo entre os instantes nos quais a corda fica reta é 0,50 s, qual é o comprimento de onda das ondas?

•41 Uma corda fixa nas duas extremidades tem 8,40 m de comprimento, uma massa de 0,120 kg e uma tensão de 96,0 N. (a) Qual é a velocidade das ondas na corda? (b) Qual é o maior comprimento de onda possível para uma onda estacionária na corda? (c) Determine a frequência dessa onda.

•42 Uma corda submetida a uma tensão τ_i oscila no terceiro harmônico com uma frequência f_3, e as ondas na corda têm um comprimento de onda λ_3. Se a tensão é aumentada para $\tau_f = 4\tau_i$ e a corda é novamente posta para oscilar no terceiro harmônico, qual é (a) a frequência de oscilação em termos de f_3 e (b) o comprimento de onda das ondas em termos de λ_3?

•43 Qual é (a) a menor frequência, (b) a segunda menor frequência e (c) a terceira menor frequência das ondas estacionárias em um fio com 10,0 m de comprimento, 100 g de massa e 250 N de tensão?

•44 Uma corda com 125 cm de comprimento tem uma massa de 2,00 g e uma tensão de 7,00 N. (a) Qual é a velocidade de uma onda

na corda? (b) Qual é a frequência de ressonância mais baixa da corda?

•**45** Uma corda que está esticada entre suportes fixos separados por uma distância de 75,0 cm possui frequências de ressonância de 420 e 315 Hz, com nenhuma outra frequência de ressonância entre esses dois valores. Determine (a) a frequência de ressonância mais baixa e (b) a velocidade da onda.

•**46** A corda *A* está esticada entre duas presilhas separadas por uma distância *L*. A corda *B*, com a mesma massa específica linear e a mesma tensão que a corda *A*, está esticada entre duas presilhas separadas por uma distância 4*L*. Considere os primeiros oito harmônicos da corda *B*. Para quais dos oito harmônicos de *B* a frequência coincide com a frequência (a) do primeiro harmônico de *A*, (b) do segundo harmônico de *A* e (c) do terceiro harmônico de *A*?

•**47** Uma das frequências harmônicas de uma certa corda sob tensão é 325 Hz. A frequência harmônica seguinte é 390 Hz. Qual é a frequência harmônica que se segue à de 195 Hz?

•**48** Se uma linha de transmissão em um clima frio fica coberta de gelo, o aumento do diâmetro leva à formação de vórtices no vento que passa. As variações de pressão associadas aos vórtices podem fazer a linha oscilar (*galopar*), principalmente se a frequência das variações de pressão coincide com uma das frequências de ressonância da linha. Em linhas compridas, as frequências de ressonância estão tão próximas que praticamente qualquer velocidade do vento pode excitar um modo de ressonância com amplitude suficiente para derrubar as torres de sustentação ou *curto-circuitar* as linhas. Se uma linha de transmissão tem um comprimento de 347 m, uma massa específica linear de 3,35 kg/m e uma tensão de 65,2 MN, qual é (a) a frequência do modo fundamental e (b) a diferença de frequência entre modos sucessivos?

•**49** Uma corda de violão de náilon tem uma massa específica linear de 7,20 g/m e está sujeita a uma tensão de 150 N. Os suportes fixos estão separados por uma distância D = 90,0 cm. A corda está oscilando da forma mostrada na Fig. 16-38. Calcule (a) a velocidade, (b) o comprimento de onda e (c) a frequência das ondas progressivas cuja superposição produz a onda estacionária.



Figura 16-38 Problema 49.

••**50** Uma certa onda estacionária transversal em uma corda longa possui um antinó em $x = 0$ e um nó vizinho em $x = 0{,}10$ m. O deslocamento $y(t)$ da partícula da corda situada em $x = 0$ é mostrado na Fig. 16-39, onde a escala do eixo y é definida por $y_s = 4{,}0$ cm. Para $t = 0{,}50$ s, qual é o deslocamento da partícula da corda situada (a) em $x = 0{,}20$ m e (b) em $x = 0{,}30$ m? Qual é a velocidade transversal da partícula situada em $x = 0{,}20$ (c) no instante $t = 0{,}50$ s e (d) no instante $t = 1{,}0$ s? (e) Plote a onda estacionária, no intervalo de $x = 0$ a $x = 0{,}40$ m, para o instante $t = 0{,}50$ s.

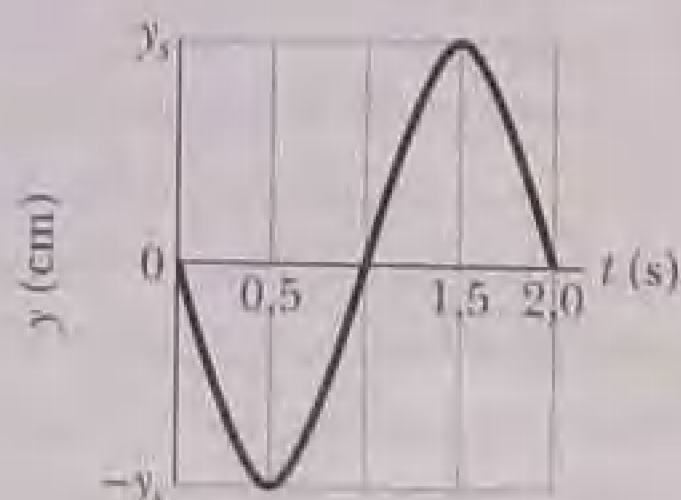


Figura 16-39 Problema 50.

••**51** Duas ondas são geradas em uma corda com 3,0 m de comprimento para produzir uma onda estacionária de três meios comprimentos de onda com uma amplitude de 1,0 cm. A velocidade da onda é 100 m/s. A equação de uma das ondas é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t)$. Na equação da outra onda, determine (a) y_m, (b) k, (c) ω e (d) o sinal que precede ω.

••**52** Uma corda sujeita a uma tensão de 200 N e fixa nas duas extremidades oscila no segundo harmônico de uma onda estacionária. O deslocamento da corda é dado por

$$y = (0{,}10 \text{ m})(\operatorname{sen} \pi x/2) \operatorname{sen} 12\pi t,$$

onde $x = 0$ em uma das extremidades da corda, x está em metros e t está em segundos. Qual é (a) o comprimento da corda, (b) a velocidade das ondas na corda e (c) a massa da corda? (d) Se a corda oscila no terceiro harmônico de uma onda estacionária, qual é o período de oscilação?

••**53** Uma corda oscila de acordo com a equação

$$y' = (0{,}50 \text{ cm}) \operatorname{sen}\left[\left(\frac{\pi}{3} \text{ cm}^{-1}\right)x\right] \cos[(40\pi \text{ s}^{-1})t].$$

Qual é (a) a amplitude e (b) a velocidade das duas ondas (iguais, exceto pelo sentido de propagação) cuja superposição produz esta oscilação? (c) Qual é a distância entre os nós? (d) Qual é a velocidade transversal de uma partícula da corda no ponto $x = 1{,}5$ cm para $t = \frac{9}{8}$ s?

••**54** Duas ondas senoidais com a mesma amplitude e o mesmo comprimento de onda se propagam simultaneamente em uma corda esticada ao longo de um eixo x. A onda resultante é mostrada duas vezes na Fig. 16-40, uma vez com o antinó A na posição de máximo deslocamento para cima e outra, 6,0 ms depois, com o antinó A na posição de máximo deslocamento para baixo. A distância entre as marcas do eixo x é 10 cm; $H = 1{,}80$ cm. A equação de uma das duas ondas é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx + \omega t)$. Na equação da outra onda, determine (a) y_m, (b) k, (c) ω e (d) o sinal que precede ω.

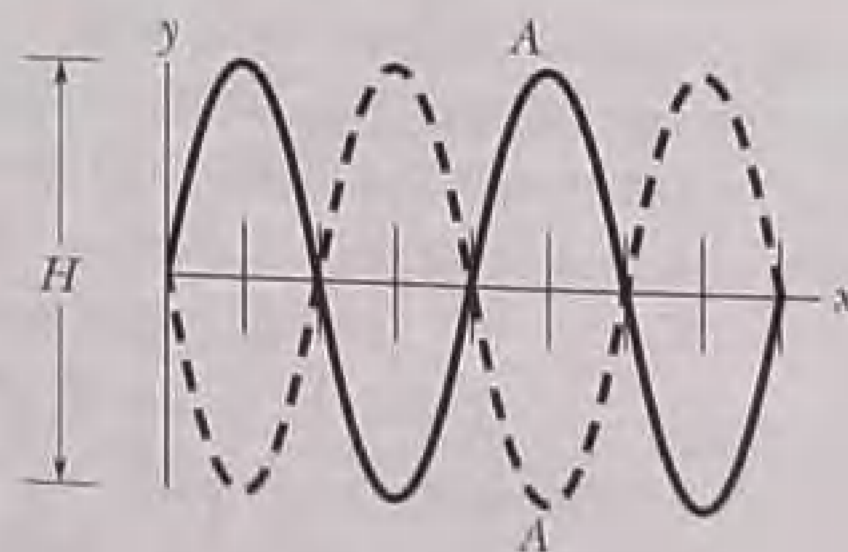


Figura 16-40 Problema 54.

••**55** As duas ondas a seguir se propagam em sentidos opostos em uma corda horizontal, criando uma onda estacionária em um plano vertical:

$$y_1(x, t) = (6{,}00 \text{ mm}) \operatorname{sen}(4{,}00\pi x - 400\pi t)$$
$$y_2(x, t) = (6{,}00 \text{ mm}) \operatorname{sen}(4{,}00\pi x + 400\pi t),$$

onde x está em metros e t em segundos. Um antinó está localizado no ponto A. No intervalo de tempo que esse ponto leva para passar da posição de deslocamento máximo para cima para a posição de deslocamento máximo para baixo, qual é o deslocamento de cada onda ao longo da corda?

••**56** Uma onda estacionária em uma corda é descrita por

$$y(x, t) = 0{,}040 (\operatorname{sen} 5\pi x)(\cos 40\pi t),$$

onde x e y estão em metros e t em segundos. Para $x \geq 0$, qual é a localização do nó com (a) o menor, (b) o segundo menor e (c) o terceiro menor valor de x? (d) Qual é o período do movimento oscilatório em qualquer ponto (que não seja um nó)? (e) Qual é a velocidade e (f) a amplitude das duas ondas progressivas que interferem para produzir essa onda? Para $t \geq 0$, qual é (g) o primeiro, (h) o segundo e (i) o terceiro instante em que todos os pontos da corda possuem velocidade transversal nula?

••57 Um gerador em uma das extremidades de uma corda muito longa produz uma onda dada por

$$y = (6{,}0 \text{ cm}) \cos \frac{\pi}{2} [(2{,}00 \text{ m}^{-1})x + (8{,}00 \text{ s}^{-1})t],$$

e um gerador na outra extremidade produz a onda

$$y = (6{,}0 \text{ cm}) \cos \frac{\pi}{2} [(2{,}00 \text{ m}^{-1})x - (8{,}00 \text{ s}^{-1})t].$$

Calcule (a) a frequência, (b) o comprimento de onda e (c) a velocidade de cada onda. Para $x \geq 0$, qual é a posição do nó com (d) o menor, (e) o segundo menor e (f) o terceiro menor valor de x? Para $x \geq 0$, qual é a posição do antinó com (g) o menor, (h) o segundo menor e (i) o terceiro menor valor de x?

••58 Na Fig. 16-41, uma corda, presa a um oscilador senoidal no ponto P e apoiada em um suporte no ponto Q, é tensionada por um bloco de massa m. A distância entre P e Q é $L = 1{,}20$ m, a massa específica linear da corda é $\mu = 1{,}6$ g/m e a frequência do oscilador é $f = 120$ Hz. A amplitude do deslocamento do ponto P é suficientemente pequena para que esse ponto seja considerado um nó. Também existe um nó no ponto Q. (a) Qual deve ser o valor da massa m para que o oscilador produza na corda o quarto harmônico? (b) Qual é o modo produzido na corda pelo oscilador para $m = 1{,}00$ kg?

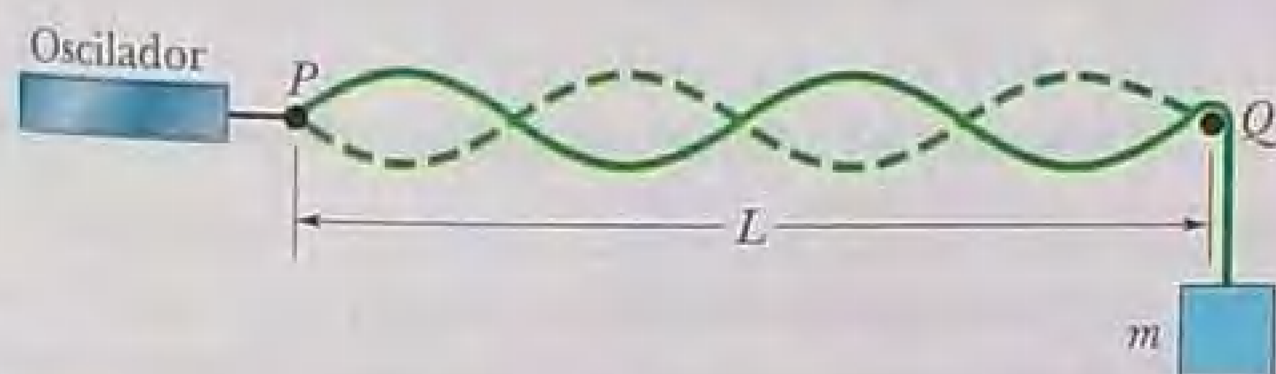


Figura 16-41 Problemas 58 e 60.

•••59 Na Fig. 16-42, um fio de alumínio, de comprimento $L_1 = 60{,}0$ cm, seção reta $1{,}00 \times 10^{-2}$ cm² e massa específica $2{,}60$ g/cm³, está soldado a um fio de aço, de massa específica $7{,}80$ g/cm³ e mesma seção reta. O fio composto, tensionado por um bloco de massa $m = 10{,}0$ kg, está disposto de tal forma que a distância L_2 entre o ponto de solda e a polia é 86,6 cm. Ondas transversais são excitadas no fio por uma fonte externa de frequência variável; um nó está situado na polia. (a) Determine a menor frequência que produz uma onda estacionária tendo o ponto de solda como um dos nós. (b) Quantos nós são observados para essa frequência?

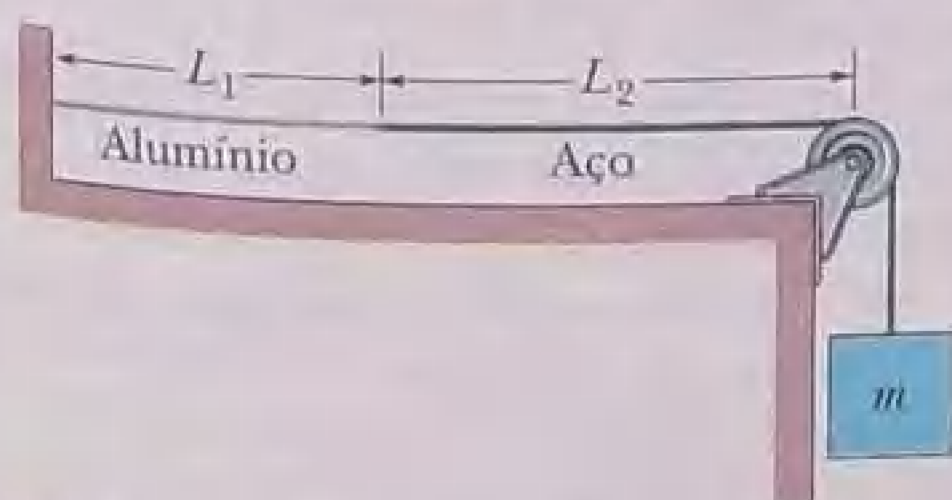


Figura 16-42 Problema 59.

•••60 Na Fig. 16-41, uma corda, presa a um oscilador senoidal no ponto P e apoiada em um suporte no ponto Q, é tensionada por um bloco de massa m. A distância entre P e Q é $L = 1{,}20$ m, e a frequência do oscilador é $f = 120$ Hz. A amplitude do deslocamento do ponto P é suficientemente pequena para que esse ponto seja considerado um nó. Também existe um nó no ponto Q. Uma onda estacionária aparece quando a massa do bloco é 286,1 g ou 447,0 g, mas não aparece para nenhuma massa entre esses dois valores. Qual é a massa específica linear da corda?

Problemas Adicionais

61 Em um experimento com ondas estacionárias, uma corda de 90 cm de comprimento está presa a um dos braços de um diapasão excitado eletricamente, que oscila perpendicularmente à corda com uma frequência de 60 Hz. A massa da corda é 0,044 kg. A que tensão a corda deve ser submetida (há pesos amarrados na outra extremidade) para que oscile com dois comprimentos de onda?

62 Uma onda senoidal transversal que se propaga no sentido positivo de um eixo x tem uma amplitude de 2,0 cm, um comprimento de onda de 10 cm e uma frequência de 400 Hz. Se a equação da onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)$, determine (a) y_m, (b) k, (c) ω e (d) o sinal que precede ω. Qual é (e) a velocidade transversal máxima de um ponto da corda e (f) a velocidade da onda?

63 Uma onda tem uma velocidade de 240 m/s e um comprimento de onda de 3,2 m. Qual é (a) a frequência e (b) o período da onda?

64 A equação de uma onda transversal que se propaga em uma corda é

$$y = 0{,}15 \operatorname{sen}(0{,}79x - 13t),$$

onde x e y estão em metros e t está em segundos. (a) Qual é o deslocamento y em $x = 2{,}3$ m e $t = 0{,}16$ s? Uma segunda onda é combinada com a primeira para produzir uma onda estacionária na corda. Se a equação da segunda onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)$, determine (b) y_m, (c) k, (d) ω e (e) o sinal que precede ω. (f) Qual é o deslocamento da onda estacionária em $x = 2{,}3$ m e $t = 0{,}16$ s?

65 A equação de uma onda transversal que se propaga em uma corda é

$$y = (2{,}0 \text{ mm}) \operatorname{sen}[(20 \text{ m}^{-1})x - (600 \text{ s}^{-1})t].$$

Determine (a) a amplitude, (b) a frequência, (c) a velocidade (incluindo o sinal) e (d) o comprimento de onda da onda. (e) Determine a velocidade transversal máxima de uma partícula da corda.

66 A Fig. 16-43 mostra o deslocamento y do ponto de uma corda situado em $x = 0$ em função do tempo t quando uma onda passa pelo ponto. A escala do eixo y é definida por $y_s = 6{,}0$ mm. A onda tem a forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi)$. Qual é o valor de ϕ? (*Atenção:* as calculadoras nem sempre fornecem o valor correto de uma função trigonométrica inversa; por isso, verifique se o valor obtido para ϕ é o valor correto, substituindo-o na função $y(x, t)$, usando um valor numérico qualquer para ω e plotando a função assim obtida.)

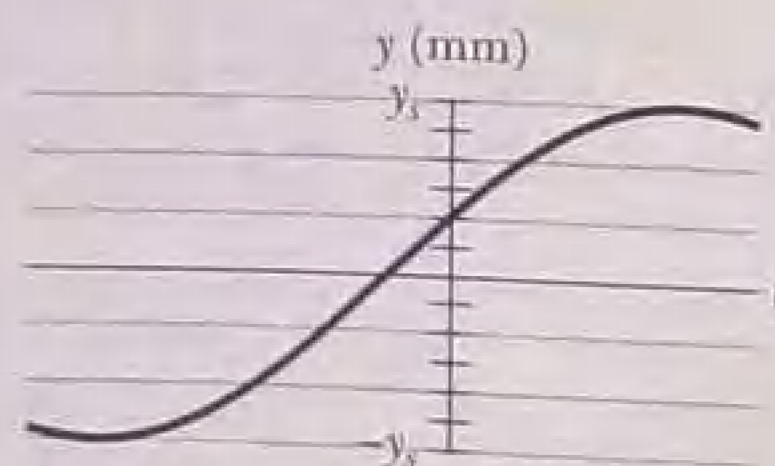


Figura 16-43 Problema 66.

67 Duas ondas senoidais iguais, a não ser pela fase, se propagam no mesmo sentido em uma corda, produzindo uma onda resultante $y'(x, t) = (3,0 \text{ mm}) \text{sen}(20x - 4,0t + 0,820 \text{ rad})$, com x em metros e t em segundos. Determine (a) o comprimento de onda λ das duas ondas, (b) a diferença de fase entre elas e (c) a amplitude y_m das duas ondas.

68 Um pulso isolado, cuja forma de onda é dada por $h(x - 5t)$, com x em centímetros e t em segundos, é mostrado na Fig. 16-44 para $t = 0$. A escala do eixo vertical é definida por $h_s = 2$. Qual é (a) a velocidade e (b) o sentido de propagação do pulso? (c) Plote $h(x - 5t)$ em função de x para $t = 2$ s. (d) Plote $h(x - 5t)$ em função de t para $x = 10$ cm.

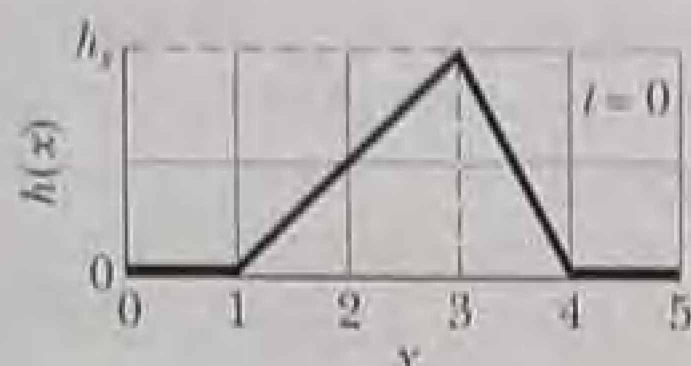


Figura 16-44 Problema 68.

69 Três ondas senoidais de mesma frequência se propagam em uma corda no sentido positivo de um eixo x. As amplitudes das ondas são y_1, $y_1/2$ e $y_1/3$ e as constantes de fase são 0, $\pi/2$ e π, respectivamente. Qual é (a) a amplitude e (b) a constante de fase da onda resultante? (c) Plote a onda resultante no instante $t = 0$ e discuta seu comportamento quando t aumenta.

70 A Fig. 16-45 mostra a aceleração transversal a_y do ponto $x = 0$ de uma corda em função do tempo t, quando uma onda com a forma geral $y(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t + \phi)$ passa pelo ponto. A escala do eixo vertical é definida por $a_s = 400$ m/s². Qual é o valor de ϕ? (*Atenção:* as calculadoras nem sempre fornecem o valor correto de uma função trigonométrica inversa; por isso, verifique se o valor obtido para ϕ é o valor correto, substituindo-o na função $y(x, t)$, usando um valor numérico qualquer para ω e plotando a função assim obtida.)

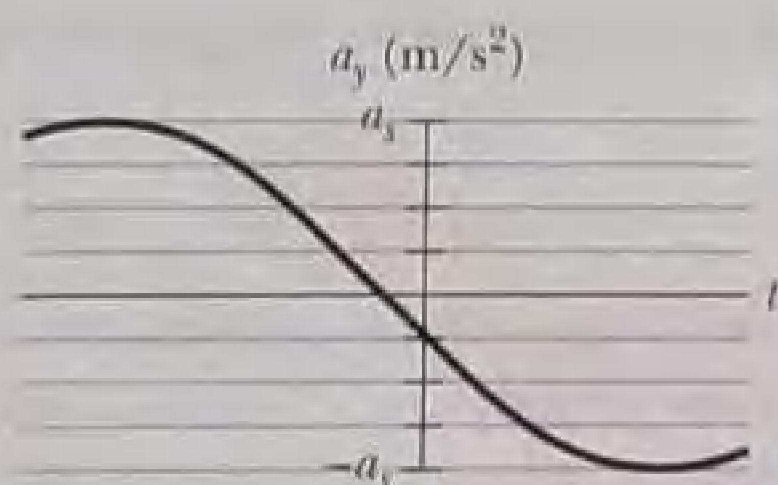


Figura 16-45 Problema 70.

71 Uma onda transversal senoidal é gerada em uma extremidade de uma longa corda horizontal por uma barra que se move para cima e para baixo ao longo de uma distância de 1,00 cm. O movimento é contínuo e repetido regularmente 120 vezes por segundo. A corda tem uma massa específica linear de 120 g/m e é mantida sob uma tensão de 90,0 N. Determine o valor máximo (a) da velocidade transversal u e (b) da componente transversal da tensão τ.

(c) Mostre que os dois valores máximos calculados ocorrem para os mesmos valores da fase da onda. Qual é o deslocamento transversal y da corda nessas fases? (d) Qual é a taxa máxima de transferência de energia ao longo da corda? (e) Qual é o deslocamento transversal y quando a taxa máxima de transferência de energia ocorre? (f) Qual é a taxa mínima de transferência de energia ao longo da corda? (g) Qual é o deslocamento transversal y quando a taxa de transferência de energia é mínima?

72 Duas ondas senoidais de 120 Hz, de mesma amplitude, se propagam no sentido positivo de um eixo x em uma corda sob tensão. As ondas podem ser geradas em fase ou defasadas. A Fig. 16-46 mostra a amplitude y' da onda resultante em função da distância de defasagem (distância entre as ondas no mesmo instante). A escala do eixo vertical é definida por $y'_s = 6,0$ mm. Se as equações das duas ondas são da forma $y(x, t) = y_m \text{sen}(kx \pm \omega t)$, determine (a) y_m, (b) k, (c) ω e (d) o sinal que precede ω.

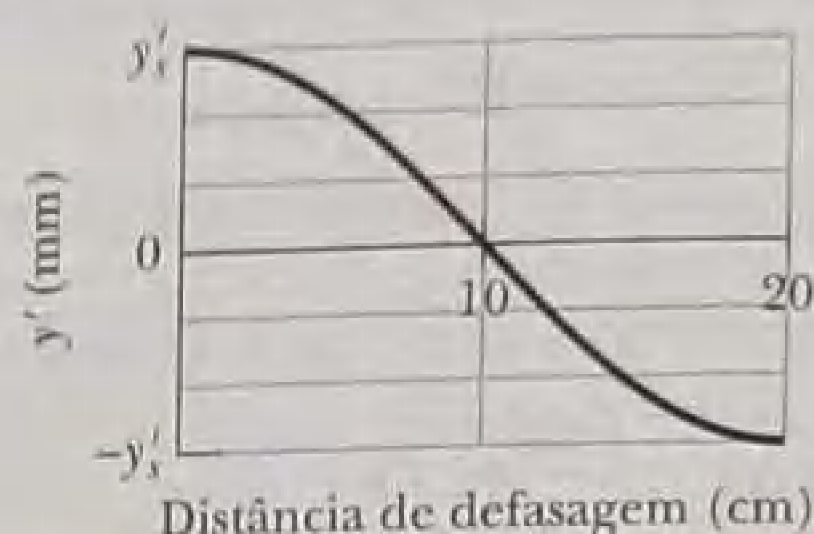


Figura 16-46 Problema 72.

73 No instante $t = 0$ e na posição $x = 0$ de uma corda, uma onda senoidal progressiva com uma frequência angular de 440 rad/s tem um deslocamento $y = +4,5$ mm e uma velocidade transversal $u = -0,75$ m/s. Se a onda tem a forma geral $y(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t + \phi)$, qual é a constante de fase ϕ?

74 Energia é transmitida a uma taxa P_1 por uma onda de frequência f_1 em uma corda sob uma tensão τ_1. Qual é a nova taxa de transmissão de energia P_2, em termos de P_1, (a) se a tensão é aumentada para $\tau_2 = 4\tau_1$ e (b) se, em vez disso, a frequência é reduzida para $f_2 = f_1/2$?

75 Qual é a onda transversal mais rápida que pode ser produzida em um fio de aço? Por motivos de segurança, a tensão máxima à qual um fio de aço deve ser submetido é $7,00 \times 10^8$ N/m². A massa específica do aço é 7800 kg/m³. (b) A resposta depende do diâmetro do fio?

76 Uma onda estacionária resulta da soma de duas ondas transversais progressivas dadas por

$$y_1 = 0,050 \cos(\pi x - 4\pi t)$$

e

$$y_2 = 0,050 \cos(\pi x + 4\pi t),$$

em que x, y_1 e y_2 estão em metros e t está em segundos. (a) Qual é o menor valor positivo de x que corresponde a um nó? Começando em $t = 0$, qual é o (b) primeiro, (c) segundo e (d) terceiro instante em que a partícula situada em $x = 0$ tem velocidade nula?

77 A borracha usada em algumas bolas de beisebol e de golfe obedece à lei de Hooke para uma larga faixa de alongamentos. Uma tira desse material tem um comprimento λ no estado relaxado e uma massa m. Quando uma força F é aplicada, a tira sofre um alongamento $\Delta\lambda$. (a) Qual é a velocidade (em termos de m, $\Delta\lambda$ e da constante elástica k) das ondas transversais nessa tira de borracha sob tensão? (b) Use a resposta do item (a) para mostrar que o tempo necessário para que um pulso transversal atravesse a tira de borracha é proporcional a $1/\sqrt{\Delta\lambda}$ se $\Delta\lambda \ll \lambda$ e é constante se $\Delta\lambda \gg \lambda$.

78 A velocidade no vácuo das ondas eletromagnéticas (como as ondas de luz visível, as ondas de rádio e os raios X) é $3,0 \times 10^8$ m/s. (a) Os comprimentos de onda da luz visível vão de aproximadamente 400 nm no violeta a 700 nm no vermelho. Qual é o intervalo de frequências dessas ondas? (b) O intervalo de frequências das ondas curtas de rádio (como as ondas de rádio FM e de VHF da televisão) é de 1,5 a 300 MHz. Qual é o intervalo de comprimentos de onda correspondente? (c) Os comprimentos de onda dos raios X vão de

aproximadamente 5,0 nm a $1,0 \times 10^{-2}$ nm. Qual é o intervalo de frequências dos raios X?

79 Um fio de 1,50 m de comprimento tem uma massa de 8,70 g e está sob uma tensão de 120 N. O fio é fixado rigidamente nas duas extremidades e posto para oscilar. (a) Qual é a velocidade das ondas no fio? Qual é o comprimento de onda das ondas que produzem ondas estacionárias com (b) meio comprimento de onda e (c) um comprimento de onda? Qual é a frequência das ondas que produzem ondas estacionárias com (d) meio comprimento de onda e (e) um comprimento de onda?

80 A menor frequência de ressonância de uma corda de um violino é a da nota lá de concerto (440 Hz). Qual é a frequência (a) do segundo e (b) do terceiro harmônico da corda?

81 Uma onda senoidal transversal que se propaga no sentido negativo de um eixo x tem uma amplitude de 1,00 cm, uma frequência de 550 Hz e uma velocidade de 330 m/s. Se a equação da onda é da forma $y(x, t) = y_m \operatorname{sen}(kx \pm \omega t)$, determine (a) y_m, (b) ω, (c) k e (d) o sinal que precede ω.

82 Duas ondas senoidais de mesmo comprimento de onda se propagam no mesmo sentido em uma corda esticada. Para a onda 1, $y_m = 3{,}0$ mm e $\phi = 0$; para a onda 2, $y_m = 5{,}0$ mm e $\phi = 70°$. Qual é (a) a amplitude e (b) a constante de fase da onda resultante?

83 Uma onda transversal senoidal de amplitude y_m e comprimento de onda λ se propaga em uma corda esticada. (a) Determine a razão entre a velocidade máxima de uma partícula (a velocidade com a qual uma partícula da corda se move na direção transversal à corda) e a velocidade da onda. (b) Essa razão depende do material do qual a corda é feita?

84 As oscilações de um diapasão de 600 Hz produzem ondas estacionárias em uma corda presa nas duas extremidades. A velocidade das ondas na corda é 400 m/s. A onda estacionária tem dois comprimentos de onda e uma amplitude de 2,0 mm. (a) Qual é o comprimento da corda? (b) Escreva uma expressão para o deslocamento da corda em função da posição e do tempo.

85 Uma corda de 120 cm de comprimento está esticada entre dois suportes fixos. Qual é (a) o maior, (b) o segundo maior e (c) o terceiro maior comprimento de onda das ondas que se propagam na corda para produzir ondas estacionárias? (d) Esboce essas ondas estacionárias.

86 (a) Escreva uma equação que descreva uma onda transversal senoidal se propagando em uma corda no sentido positivo de um eixo y com um número de onda de 60 cm^{-1}, um período de 0,20 s e uma amplitude de 3,0 mm. Tome a direção transversal como a direção z. (b) Qual é a velocidade transversal máxima de um ponto da corda?

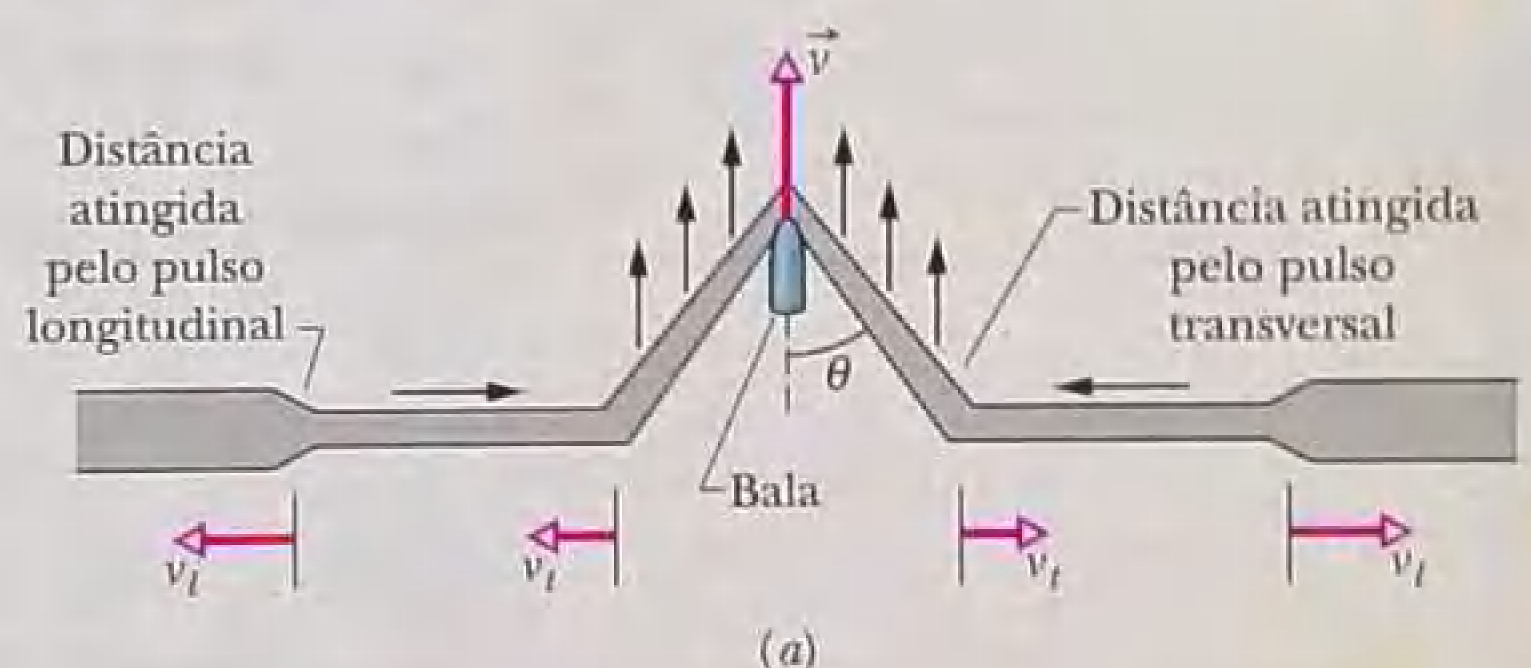
87 Uma onda em uma corda é descrita pela equação

$$y(x, t) = 15{,}0 \operatorname{sen}(\pi x/8 - 4\pi t),$$

onde x e y estão em centímetros e t está em segundos. (a) Qual é a velocidade transversal de um ponto da corda situado em $x = 6{,}00$ cm para $t = 0{,}250$ s? (b) Qual é a máxima velocidade transversal em qualquer ponto da corda? (c) Qual é o módulo da aceleração transversal em um ponto da corda situado em $x = 6{,}00$ cm para $t = 0{,}250$ s? (d) Qual é o módulo da aceleração transversal máxima em qualquer ponto da corda?

88 *Colete à prova de balas.* Quando um projétil veloz, como uma bala ou um fragmento de bomba, atinge um colete moderno à prova de balas, o tecido do colete detém o projétil e impede a perfuração dispersando rapidamente a energia por uma grande área. Essa dispersão é realizada por pulsos longitudinais e transversais que se afastam *radialmente* do ponto de impacto, onde o projétil produz uma depressão em forma de cone no tecido. O pulso longitudinal, que se propaga ao longo das fibras do tecido com velocidade v_l, faz com que as fibras se afinem e se distendam, com uma transferência radial de massa na direção do ponto de impacto. Uma dessas fibras radiais aparece na Fig. 16-47a. Parte da energia do projétil é dissipada na deformação dessas fibras. O pulso transversal, que se propaga com uma velocidade menor v_t, está associado à depressão. À medida que o projétil penetra no tecido, o raio da depressão aumenta, fazendo com que o material do colete se mova na mesma direção que o projétil (perpendicularmente à direção de propagação do pulso transversal). O resto da energia do projétil é dissipado nesse movimento. Toda a energia que não está envolvida na deformação permanente das fibras é convertida em energia térmica.

A Fig. 16-47b mostra um gráfico da velocidade v em função do tempo t para uma bala com uma massa de 10,2 g disparada por um revólver 38 Special em um colete à prova de balas. As escalas dos eixos vertical e horizontal são definidas por $v_s = 300$ m/s e $t_s = 40{,}0$ μs. Suponha que $v_l = 2000$ m/s e que o meio ângulo θ da depressão causada pela bala é 60°. No final da colisão, qual é o raio (a) da região deformada e (b) da depressão (supondo que a pessoa que usava o colete tenha permanecido imóvel)?



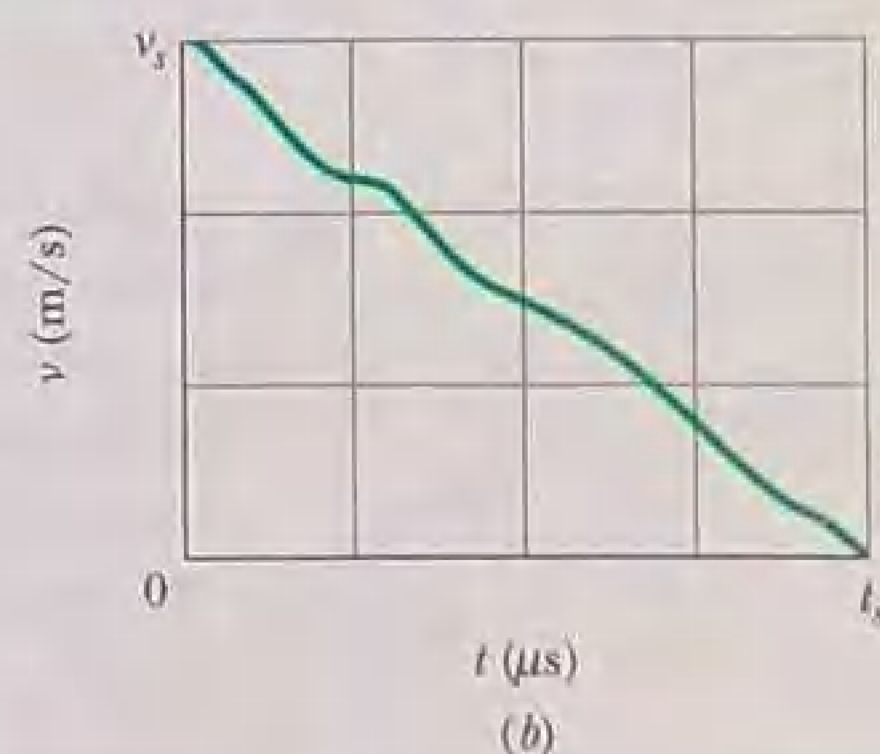


Figura 16-47 Problema 88.

89 Duas ondas são descritas por

$$y_1 = 0{,}30 \operatorname{sen}[\pi(5x - 200)t]$$

e

$$y_2 = 0{,}30 \operatorname{sen}[\pi(5x - 200t) + \pi/3],$$

onde y_1, y_2 e x estão em metros e t está em segundos. Quando as duas ondas são combinadas, é produzida uma onda progressiva. Determine (a) a amplitude, (b) a velocidade e (c) o comprimento de onda da onda progressiva.

90 Uma certa onda transversal senoidal com um comprimento de onda de 20 cm está se propagando no sentido positivo de um eixo x. A Fig. 16-48 mostra a velocidade transversal da partícula situada

em $x = 0$ em função do tempo; a escala do eixo vertical é definida por $u_s = 5{,}0$ cm/s. Qual é (a) a velocidade, (b) a amplitude e (c) a frequência da onda? (d) Plote a onda entre $x = 0$ e $x = 20$ cm para o instante $t = 2{,}0$ s.

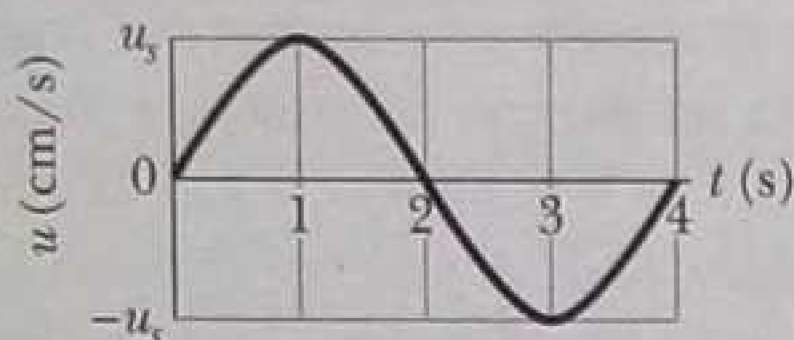


Figura 16-48 Problema 90.

91 Em uma experiência de laboratório, uma corda horizontal de 1,2 kg é fixada nas duas extremidades ($x = 0$ e $x = 2{,}0$ m) e colocada para oscilar para cima e para baixo no modo fundamental, com uma frequência de 5,0 Hz. No instante $t = 0$, o ponto situado em $x = 1{,}0$ m tem deslocamento nulo e se move para cima no sentido positivo de um eixo y com uma velocidade transversal de 5,0 m/s. Qual é (a) a amplitude do movimento nesse ponto e (b) a tensão da corda? (c) Escreva a equação da onda estacionária para o modo fundamental.

92 Duas ondas,

$$y_1 = (2{,}50 \text{ mm}) \operatorname{sen}[(25{,}1 \text{ rad/m})x - (440 \text{ rad/s})t]$$

e

$$y_2 = (1{,}50 \text{ mm}) \operatorname{sen}[(25{,}1 \text{ rad/m})x + (440 \text{ rad/s})t],$$

se propagam em uma corda esticada. (a) Plote a onda resultante em função de t para $x = 0$, $\lambda/8$, $\lambda/4$, $3\lambda/8$ e $\lambda/2$, onde λ é o comprimento de onda. Os gráficos devem se estender de $t = 0$ até pouco mais de um período. (b) A onda resultante é a superposição de uma onda estacionária e uma onda progressiva. Em que sentido se propaga a onda progressiva? (c) Como devem ser mudadas as ondas originais para que a onda resultante seja uma superposição de uma onda estacionária e uma onda progressiva com as mesmas amplitudes que antes, mas com a onda progressiva se propagando no sentido oposto? Use os gráficos do item (a) para determinar o local em que a amplitude das oscilações é (d) máxima e (e) mínima. (f) Qual é a relação entre a amplitude máxima das oscilações e as amplitudes das duas ondas originais? (g) Qual é a relação entre a amplitude mínima das oscilações e as amplitudes das duas ondas originais?

93 Uma onda progressiva em uma corda é descrita pela equação

$$y = 2{,}0 \operatorname{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{0{,}40} + \frac{x}{80}\right)\right],$$

onde x e y estão em centímetros e t em segundos. (a) Para $t = 0$, plote y em função de x para $0 \leq x \leq 160$ cm. (b) Repita o item (a) para $t = 0{,}05$ s e para $t = 0{,}10$ s. A partir desses gráficos, determine (c) a velocidade da onda e (d) o sentido de propagação da onda.

CAPÍTULO 17

ONDAS-II

17-1 O QUE É FÍSICA?

A física dos sons está presente nos artigos científicos de muitas especialidades. Vamos dar apenas alguns exemplos. Os fisiologistas querem saber como a fala é produzida, como corrigir os defeitos de dicção, como reduzir a perda da audição e até mesmo como evitar que uma pessoa ronque. Os engenheiros acústicos procuram melhorar a acústica das catedrais e das salas de concertos, reduzir o nível de ruído perto de rodovias e obras públicas e reproduzir sons musicais em sistemas de alto-falantes com o máximo de fidelidade. Os engenheiros aeronáuticos estudam as ondas de choque produzidas pelos caças supersônicos e o ruído dos jatos comerciais nas proximidades dos aeroportos. Os engenheiros biomédicos procuram descobrir o que os ruídos produzidos pelo coração e pelos pulmões significam em termos da saúde do paciente. Os paleontólogos tentam associar os ossos dos dinossauros ao modo como emitiam sons. Os engenheiros militares verificam se é possível localizar um atirador de tocaia pelo som dos disparos e, do lado mais ameno, os biólogos estudam o ronronar dos gatos.

Antes de começar a discutir a física dos sons, devemos responder à seguinte pergunta: "O que *são* ondas sonoras?"

17-2 Ondas Sonoras

Como vimos no Capítulo 16, as ondas mecânicas necessitam de um meio material para se propagar. Existem dois tipos de ondas mecânicas: *ondas transversais*, nas quais as oscilações acontecem em uma direção perpendicular à direção de propagação da onda, e *ondas longitudinais*, nas quais as oscilações acontecem na direção de propagação da onda.

Neste livro, **onda sonora** é definida genericamente como qualquer onda longitudinal. As equipes de prospecção usam essas ondas para sondar a crosta terrestre em busca de petróleo. Os navios possuem equipamentos de localização através do som (sonar) para detectar obstáculos submersos. Os submarinos usam ondas sonoras para emboscar outros submarinos ouvindo os ruídos produzidos pelo sistema de propulsão. A Fig. 17-1 ilustra o uso de ondas sonoras para visualizar os tecidos mo-



Figura 17-1 Esta tartaruga-cabeçuda está sendo examinada com ultrassom (que possui uma frequência acima de nossa faixa de audição); uma imagem do interior do animal está sendo mostrada em um monitor à direita da foto. *(Mauro Fermariello/SPL/Photo Researchers)*

les dos seres vivos. Neste capítulo, vamos nos concentrar nas ondas sonoras que se propagam no ar e podem ser ouvidas pelas pessoas.

A Fig. 17-2 ilustra várias ideias que serão usadas em nossas discussões. O ponto *S* representa uma pequena fonte sonora, chamada de *fonte pontual*, que emite ondas sonoras em todas as direções. As *frentes de onda* e os *raios* indicam a direção de propagação e o espalhamento das ondas sonoras. **Frentes de onda** são superfícies nas quais as oscilações produzidas pelas ondas sonoras têm o mesmo valor; essas superfícies são representadas por circunferências completas ou parciais em um desenho bidimensional de uma fonte pontual. **Raios** são retas perpendiculares às frentes de onda que indicam a direção de propagação das frentes de onda. As setas duplas sobrepostas aos raios da Fig. 17-2 indicam que as oscilações longitudinais do ar são paralelas aos raios.

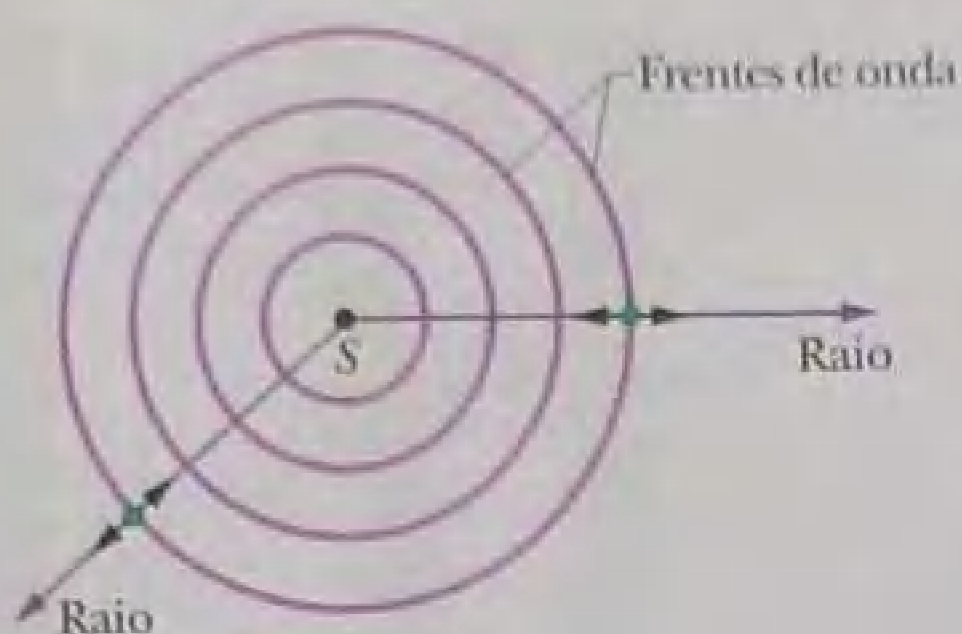


Figura 17-2 Uma onda sonora se propaga a partir de uma fonte pontual *S* em um meio tridimensional. As frentes de onda formam esferas com centro em *S*; os raios são perpendiculares às frentes de onda. As setas de duas cabeças mostram que os elementos do meio oscilam paralelamente aos raios.

Nas proximidades de uma fonte pontual como a da Fig. 17-2, as frentes de onda são esféricas e se espalham em três dimensões; ondas desse tipo são chamadas de *ondas esféricas*. À medida que as frentes de onda se expandem e seu raio aumenta, a curvatura diminui. Muito longe da fonte, as frentes de onda são aproximadamente planas (ou retas, em desenhos bidimensionais); ondas desse tipo são chamadas de *ondas planas*.

17-3 A Velocidade do Som

A velocidade de uma onda mecânica, seja ela transversal ou longitudinal, depende tanto das propriedades inerciais do meio (para armazenar energia cinética) como das propriedades elásticas do meio (para armazenar energia potencial). Assim, podemos generalizar a Eq. 16-26, que fornece a velocidade de uma onda transversal em uma corda, escrevendo

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{\text{propriedade elástica}}{\text{propriedade inercial}}}, \tag{17-1}$$

em que (para ondas transversais) τ é a tensão da corda e μ é a massa específica linear da corda. Se o meio de propagação é o ar e a onda é longitudinal, podemos deduzir facilmente que a propriedade inercial que corresponde a μ é a massa específica ρ do ar. O que corresponde, porém, à propriedade elástica?

Em uma corda esticada, a energia potencial está associada à deformação periódica dos elementos da corda quando a onda passa por esses elementos. Quando uma onda sonora se propaga no ar, a energia potencial está associada à compressão e expansão de pequenos elementos de volume do ar. A propriedade que determina o quanto um elemento de um meio muda de volume quando é submetido a uma pressão (força por unidade de área) é o **módulo de elasticidade volumétrico** B, definido (pela Eq. 12-25) como

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} \quad \text{(definição de módulo de elasticidade volumétrico)}, \tag{17-2}$$

em que $\Delta V/V$ é a variação relativa de volume produzida por uma variação de pressão Δp. Como vimos na Seção 14-3, a unidade de pressão no SI para pressão é o newton por metro quadrado, que recebe um nome especial, o *pascal* (Pa). De acordo com a Eq. 17-2, a unidade de B também é o pascal. Os sinais de Δp e ΔV são opostos: quando aumentamos a pressão sobre um elemento (ou seja, Δp é positivo), o volume diminui (ΔV é negativo). Incluímos um sinal negativo na Eq. 17-2 para que B seja um número positivo. Substituindo τ por B e μ por ρ na Eq. 17-1, obtemos

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad \text{(velocidade do som)} \tag{17-3}$$

como a velocidade do som em um meio de módulo de elasticidade volumétrico B e massa específica ρ. A Tabela 17-1 mostra a velocidade de som em vários meios.

A massa específica da água é quase 1000 vezes maior que a do ar. Se esse fosse o único fator importante, esperaríamos, de acordo com a Eq. 17-3, que a velocida-

Tabela 17-1

A Velocidade do Som[a]

Meio	Velocidade (m/s)
Gases	
Ar (0°C)	331
Ar (20°C)	343
Hélio	965
Hidrogênio	1284
Líquidos	
Água (0°C)	1402
Água (20°C)	1482
Água salgada[b]	1522
Sólidos	
Alumínio	6420
Aço	5941
Granito	6000

[a]A 0°C e 1 atm de pressão, a menos que haja uma indicação em contrário.
[b]A 20°C e com 3,5% de salinidade.

de do som na água fosse muito menor que a velocidade do som no ar. Entretanto, a Tabela 17-1 mostra o contrário. Concluímos (novamente a partir da Eq. 17-3) que o módulo de elasticidade volumétrico da água é mais de 1000 vezes maior que o do ar. Este é, realmente, o caso. A água é muito mais incompressível do que o ar, o que (veja a Eq. 17-2) é outra forma de dizer que o módulo de elasticidade volumétrico da água é muito maior que o do ar.

Demonstração Formal da Equação 17-3

Vamos agora demonstrar a Eq. 17-3 aplicando diretamente as leis de Newton. Considere um pulso isolado de compressão do ar que se propaga da direita para a esquerda, com velocidade v, em um tubo como o da Fig. 16-2. Vamos escolher um referencial que se move com a mesma velocidade que o pulso. A Fig. 17-3*a* mostra a situação do ponto de vista desse referencial. O pulso permanece estacionário e o ar passa por ele com velocidade v, movendo-se da esquerda para a direita.

Seja p a pressão do ar não perturbado e $p + \Delta p$ a pressão na região do pulso, onde Δp é positivo devido à compressão. Considere um elemento de ar de espessura Δx e seção reta A, movendo-se em direção ao pulso com velocidade v. Quando o elemento de ar penetra no pulso, a borda dianteira encontra uma região de maior pressão, que reduz a velocidade do elemento para $v + \Delta v$, onde Δv é um número negativo. A redução de velocidade termina quando a borda traseira do elemento penetra no pulso, o que acontece após um intervalo de tempo dado por

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}. \tag{17-4}$$

Vamos aplicar a segunda lei de Newton ao elemento. Durante o intervalo de tempo Δt, a força média exercida sobre a borda traseira do elemento é pA, dirigida para a direita, e a força média exercida sobre a face dianteira é $(p + \Delta p)A$, dirigida para a esquerda (Fig. 17-3*b*). Assim, a força resultante média exercida sobre o elemento durante o intervalo Δt é

$$\begin{aligned} F &= pA - (p + \Delta p)A \\ &= -\Delta p\, A \qquad \text{(força resultante)}. \end{aligned} \tag{17-5}$$

O sinal negativo indica que a força resultante que age sobre o elemento de ar aponta para a esquerda na Fig. 17-3*b*. O volume do elemento é $A\Delta x$; assim, com a ajuda da Eq. 17-4, podemos escrever a massa como

$$\Delta m = \rho\,\Delta V = \rho A\,\Delta x = \rho A v\,\Delta t \qquad \text{(massa)}. \tag{17-6}$$

A aceleração média do elemento durante o intervalo Δt é

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \text{(aceleração)}. \tag{17-7}$$

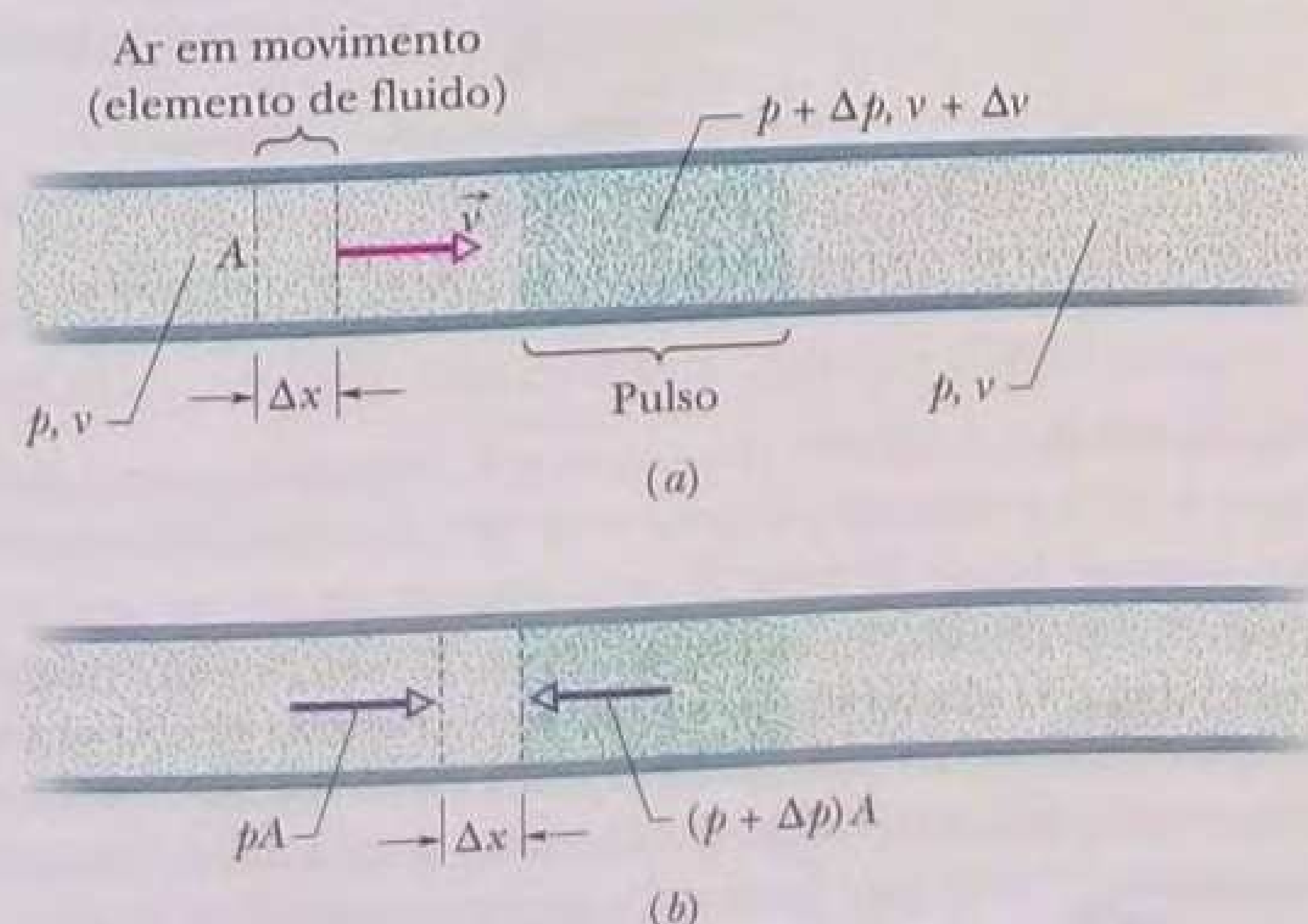


Figura 17-3 Um pulso de compressão se propaga da direita para a esquerda em um tubo longo cheio de ar. O referencial da figura foi escolhido de tal forma que o pulso permanece em repouso e o ar se move da esquerda para a direita. (*a*) Um elemento de ar de largura Δx se move em direção ao pulso com velocidade v. (*b*) A borda dianteira do elemento penetra no pulso. São mostradas as forças (associadas à pressão do ar) que agem sobre as bordas dianteira e traseira.

De acordo com a segunda lei de Newton ($F = ma$) e as Eqs. 17-5, 17-6 e 17-7, temos:

$$-\Delta p\, A = (\rho A v\, \Delta t)\,\frac{\Delta v}{\Delta t}, \tag{17-8}$$

que podem ser escrita na forma

$$\rho v^2 = -\frac{\Delta p}{\Delta v/v}. \tag{17-9}$$

O ar que ocupa um volume $V\,(= Av\Delta t)$ fora do pulso sofre uma redução de volume $\Delta V\,(= A\Delta v\Delta t)$ ao penetrar no pulso. Assim,

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A\,\Delta v\,\Delta t}{Av\,\Delta t} = \frac{\Delta v}{v}. \tag{17-10}$$

Substituindo a Eq. 17-10 e a Eq. 17-2 na Eq. 17-9, temos:

$$\rho v^2 = -\frac{\Delta p}{\Delta v/v} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} = B. \tag{17-11}$$

Explicitando v, obtemos a Eq. 17-3 para a velocidade do ar para a direita na Fig. 17-3 e, portanto, a velocidade do pulso para a esquerda.

17-4 Ondas Sonoras Progressivas

Vamos agora examinar os deslocamentos e variações de pressão associados a uma onda sonora senoidal que se propaga no ar. A Fig. 17-4*a* mostra uma onda se propagando para a direita em um tubo longo cheio de ar. Como vimos no Capítulo 16, uma onda desse tipo pode ser produzida movendo senoidalmente um êmbolo na extremidade esquerda do tubo (como na Fig. 16-2). O movimento do êmbolo para a direita desloca o elemento de ar mais próximo e comprime o ar; o movimento do êmbolo para a esquerda permite que o elemento de ar se desloque de volta para a esquerda e que a pressão diminua. Como cada elemento de ar afeta o elemento que está ao lado, os movimentos do ar para a direita e para a esquerda e as variações de pressão se propagam ao longo do tubo na forma de uma onda sonora.

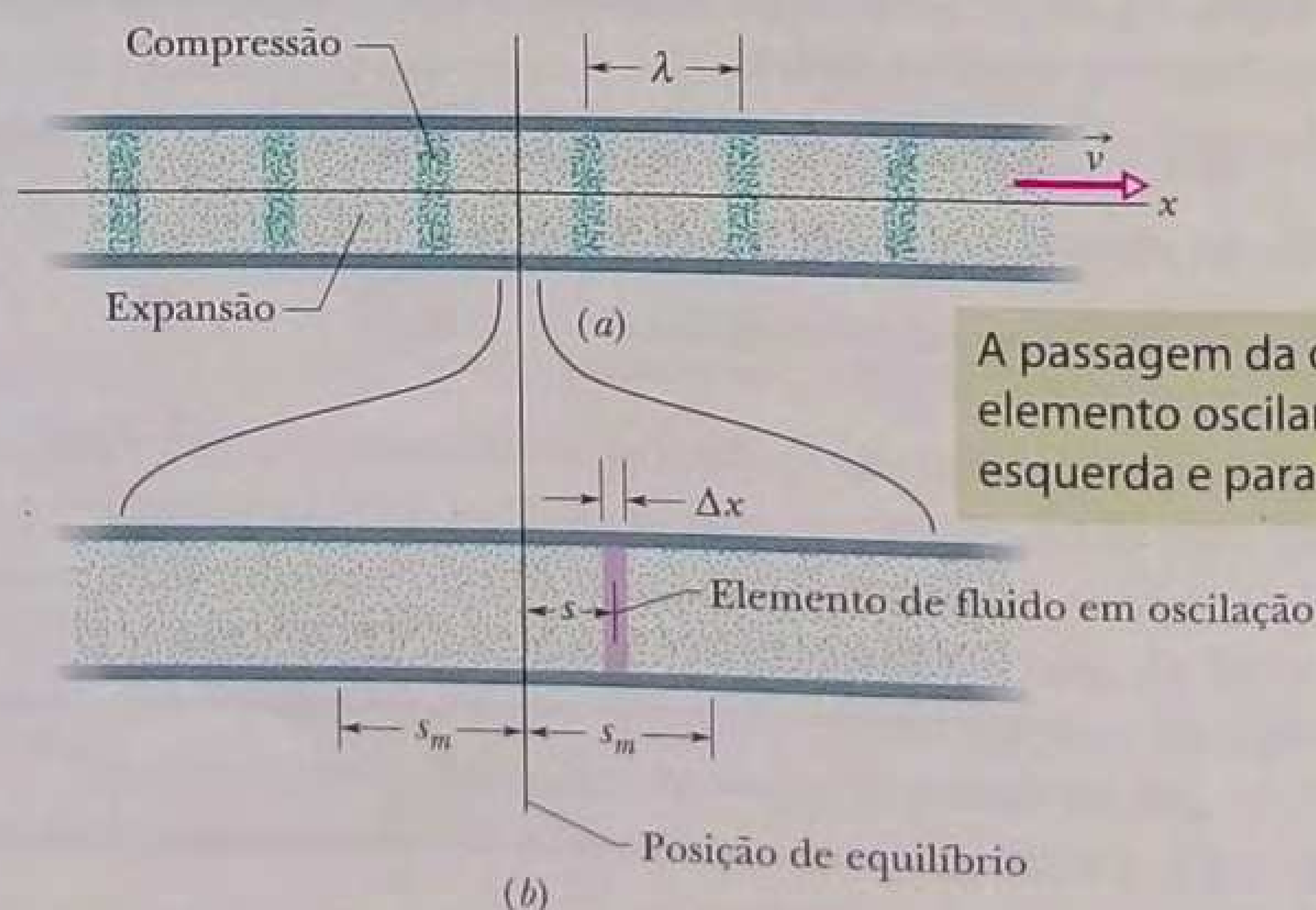


Figura 17-4 (*a*) Uma onda sonora que se propaga com velocidade v em tubo longo cheio de ar é composta por uma série de expansões e compressões periódicas do ar que se deslocam ao longo do tubo. A onda é mostrada em um instante arbitrário. (*b*) Uma vista horizontal ampliada de uma pequena parte do tubo. Quando a onda passa, um elemento de ar de espessura Δx oscila para a esquerda e para a direita em um movimento harmônico simples em torno da posição de equilíbrio. No instante mostrado em (*b*), o elemento se encontra deslocado de uma distância s para a direita da posição de equilíbrio. O deslocamento máximo, para a direita ou para a esquerda, é s_m.

Considere o elemento de ar de espessura Δx da Fig. 17-4*b*. Quando a onda atravessa essa parte do tubo, o elemento de ar oscila para a esquerda e para a direita em um movimento harmônico simples em torno da posição de equilíbrio. Assim, as oscilações dos elementos de ar produzidas pela onda sonora progressiva são semelhantes às oscilações dos elementos de uma corda produzidas por uma onda transversal, exceto pelo fato de que a oscilação dos elementos de ar é *longitudinal* e não *transversal*. Como os elementos da corda oscilam paralelamente ao eixo y, escrevemos os deslocamentos na forma $y(x, t)$. Por analogia, como os elementos de ar oscilam paralelamente ao eixo x, poderíamos escrever os deslocamentos na forma $x(x, t)$; entretanto, para evitar confusão da função x com a variável x, vamos usar a notação $s(x, t)$.

Para representar os deslocamentos $s(x, t)$ como funções senoidais de x e de t, poderíamos usar uma função seno ou uma função cosseno. Neste capítulo, vamos usar uma função cosseno, escrevendo

$$s(x, t) = s_m \cos(kx - \omega t). \qquad (17\text{-}12)$$

A Fig. 17-5*a* identifica as várias partes da Eq. 17-12. O fator s_m é a **amplitude do deslocamento**, ou seja, o deslocamento máximo do elemento de ar em qualquer sentido a partir da posição de equilíbrio (veja a Fig. 17-4*b*). O número de onda k, a frequência angular ω, a frequência f, o comprimento de onda λ, a velocidade v e o período T de uma onda sonora (longitudinal) são definidos do mesmo modo e obedecem às mesmas relações que para uma onda transversal, exceto pelo fato de que agora λ é a distância (na direção de propagação) para a qual o padrão de compressões e expansões associado à onda começa a se repetir (veja a Fig. 17-4*a*). (Estamos supondo que s_m é muito menor do que λ.)

Quando a onda se propaga, a pressão do ar em qualquer posição x da Fig. 17-4*a* varia senoidalmente, como será demonstrado a seguir. Para descrever essa variação, escrevemos

$$\Delta p(x, t) = \Delta p_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \qquad (17\text{-}13)$$

A Fig. 17-5*b* identifica as várias partes da Eq. 17-13. Um valor negativo de Δp na Eq. 17-13 corresponde a uma expansão do ar; um valor positivo, a uma compressão. O fator Δp_m é a **amplitude da pressão**, ou seja, o máximo aumento ou diminuição de pressão associado à onda; Δp_m é normalmente muito menor que a pressão p na ausência da onda. Como vamos demonstrar, a amplitude da pressão Δp_m está relacionada à amplitude do deslocamento s_m da Eq. 17-12 através da equação

$$\Delta p_m = (v\rho\omega)s_m. \qquad (17\text{-}14)$$

A Fig. 17-6 mostra os gráficos das Eqs. 17-12 e 17-13 no instante $t = 0$; com o passar do tempo, as duas curvas se movem para a direita ao longo do eixo horizontal. Note que o deslocamento e a variação de pressão estão defasados de $\pi/2$ rad (90°). Assim, por exemplo, a variação de pressão Δp em qualquer ponto da onda é nula no instante em que o deslocamento é máximo.

Deslocamento

(*a*) $s(x,t) = s_m \cos(kx - \omega t)$

Amplitude do deslocamento — Termo oscilatório

(*b*) $\Delta p(x,t) = \Delta p_m \operatorname{sen}(kx - \omega t)$

Amplitude da pressão — Variação de pressão

Figura 17-5 (*a*) A função deslocamento e (*b*) a função variação de pressão de uma onda sonora progressiva são um produto de dois fatores: uma amplitude e um termo oscilatório.

TESTE 1

Quando o elemento de ar oscilante da Fig. 17-4*b* está passando pelo ponto de deslocamento nulo (ponto de equilíbrio), a pressão do elemento está começando a aumentar ou começando a diminuir?

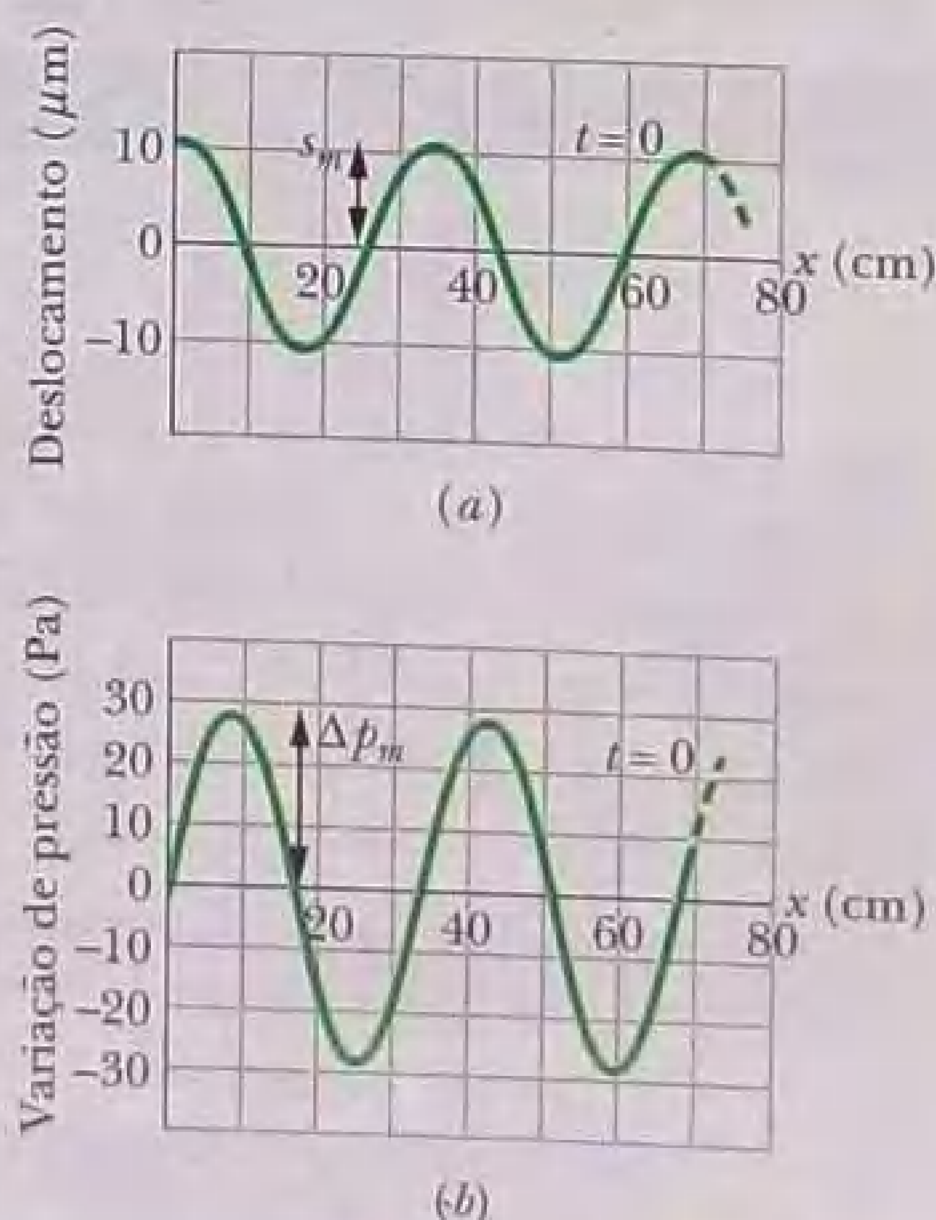


Figura 17-6 (*a*) Um gráfico da função deslocamento (Eq. 17-12) para $t = 0$. (*b*) Um gráfico semelhante da função variação de pressão (Eq. 17-13). Os dois gráficos são para uma onda sonora de 1000 Hz cuja amplitude de pressão está no limiar da dor.

Demonstração das Equações 17-13 e 17-14

A Fig. 17-4*b* mostra um elemento de ar oscilante de seção reta A e espessura Δx, com o centro deslocado de uma distância s em relação à posição de equilíbrio. De acordo com a Eq. 17-2, podemos escrever, para a variação de pressão do elemento deslocado,

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V}. \quad (17\text{-}15)$$

A grandeza V da Eq. 17-15 é o volume do elemento, dado por

$$V = A\,\Delta x. \quad (17\text{-}16)$$

A grandeza ΔV da Eq. 17-15 é a variação de volume que ocorre quando o elemento é deslocado. Essa variação de volume acontece porque os deslocamentos das duas extremidades do elemento não são exatamente iguais, diferindo de um valor Δs. Assim, podemos escrever a variação de volume como

$$\Delta V = A\,\Delta s. \quad (17\text{-}17)$$

Substituindo as Eqs. 17-16 e 17-17 na Eq. 17-15 e passando ao limite diferencial, obtemos

$$\Delta p = -B\frac{\Delta s}{\Delta x} = -B\frac{\partial s}{\partial x}. \quad (17\text{-}18)$$

O símbolo ∂ é usado para indicar que a derivada da Eq. 17-18 é uma *derivada parcial*, que nos diz como s varia com x quando o tempo t é mantido constante. De acordo com a Eq. 17-12, tratando t como uma constante, temos:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[s_m\cos(kx - \omega t)] = -ks_m\,\mathrm{sen}(kx - \omega t). \quad (17\text{-}19)$$

Substituindo este resultado para a derivada parcial na Eq. 17-18, obtemos

$$\Delta p = Bks_m\,\mathrm{sen}(kx - \omega t).$$

Isso significa que a pressão é uma função senoidal do tempo e que a amplitude da variação é igual ao termo que multiplica a função seno. Fazendo $\Delta p_m = Bks_m$, obtemos a Eq. 17-13, que queríamos demonstrar.

Usando a Eq. 17-3, podemos agora escrever

$$\Delta p_m = (Bk)s_m = (v^2\rho k)s_m.$$

A Eq. 17-14, que também queríamos demonstrar, é obtida usando a Eq. 16-12 para substituir k por ω/v.

Exemplo

Amplitude da pressão e do deslocamento

A amplitude máxima de pressão Δp_m que o ouvido humano pode suportar em sons muito altos é da ordem de 28 Pa (muito menor, portanto, que a pressão normal do ar, aproximadamente 10^5 Pa). Qual é a amplitude do deslocamento s_m correspondente, supondo que a massa específica do ar é $\rho = 1{,}21$ kg/m³, a frequência do som é 1000 Hz e a velocidade do som é 343 m/s?

IDEIA-CHAVE

A amplitude do deslocamento s_m de uma onda sonora está relacionada à amplitude da pressão Δp_m da onda através da Eq. 17-14.

Cálculos Explicitando s_m na Eq. 17-14, obtemos

$$s_m = \frac{\Delta p_m}{v\rho\omega} = \frac{\Delta p_m}{v\rho(2\pi f)}.$$

Substituindo os valores conhecidos, temos:

$$s_m = \frac{28\ \text{Pa}}{(343\ \text{m/s})(1{,}21\ \text{kg/m}^3)(2\pi)(1000\ \text{Hz})}$$
$$= 1{,}1 \times 10^{-5}\ \text{m} = 11\ \mu\text{m}. \quad \text{(Resposta)}$$

Este valor corresponde a um sétimo da espessura desta página. Obviamente, a amplitude do deslocamento que o ouvido pode tolerar é muito pequena. Uma curta exposição a sons muito altos produz uma perda temporária da audição, causada provavelmente por uma diminuição da irrigação sanguínea do ouvido interno. Uma exposição prolongada pode produzir danos irreversíveis.

A amplitude da pressão Δp_m para o som *mais fraco* de 1000 Hz que o ouvido humano pode detectar é $2{,}8 \times 10^{-5}$ Pa. Procedendo como antes, obtemos $s_m = 1{,}1 \times 10^{-11}$ m ou 11 pm, que corresponde a um décimo do raio de um átomo típico. O ouvido é, de fato, um detector muito sensível de ondas sonoras.

17-5 Interferência

Como as ondas transversais, as ondas sonoras podem sofrer interferência. Vamos considerar, em particular, a interferência entre duas ondas sonoras iguais que se propagam no mesmo sentido. A Fig. 17-7a mostra como é possível produzir essa interferência: duas fontes pontuais S_1 e S_2 emitem ondas sonoras que estão em fase e têm o mesmo comprimento de onda λ. Em casos como esse, dizemos que as fontes estão em fase, ou seja, as ondas deixam as fontes com o mesmo deslocamento de fase. Estamos interessados nas ondas que passam pelo ponto P da Fig. 17-7a. Supomos que a distância até o ponto P é muito maior que a distância entre as fontes, de modo que podemos supor que as ondas são aproximadamente paralelas ao chegarem ao ponto P.

Se as ondas percorressem distâncias iguais para chegar ao ponto P, estariam em fase nesse ponto. Como no caso das ondas transversais, isso significa que sofreriam interferência totalmente construtiva. Entretanto, na Fig. 17-7a, o caminho L_2 percorrido pela onda gerada pela fonte S_2 é maior do que o caminho L_1 percorrido pela onda gerada pela fonte S_1. A diferença de percurso significa que as ondas podem não estar em fase no ponto P. Em outras palavras, a diferença de fase ϕ no ponto P depende da **diferença de percurso** $\Delta L = |L_2 - L_1|$.

Para relacionar a diferença de fase ϕ à diferença de percurso ΔL, levamos em conta o fato de que, como foi visto na Seção 16-4, uma diferença de fase de 2π rad corresponde a um comprimento de onda. Assim, podemos escrever a relação

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\Delta L}{\lambda}, \tag{17-20}$$

que nos dá

$$\phi = \frac{\Delta L}{\lambda} 2\pi. \tag{17-21}$$

A interferência totalmente construtiva acontece se ϕ é zero, 2π ou qualquer múltiplo inteiro de 2π. Podemos escrever essa condição na forma

$$\phi = m(2\pi), \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(interferência totalmente construtiva).} \tag{17-22}$$

De acordo com a Eq. 17-21, isso acontece quando a razão $\Delta L/\lambda$ é

$$\frac{\Delta L}{\lambda} = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(interferência totalmente construtiva).} \tag{17-23}$$

Assim, por exemplo, se a diferença de percurso $\Delta L = |L_2 - L_1|$ da Fig. 17-7a é 2λ, $\Delta L/\lambda = 2$ e as ondas sofrem interferência totalmente construtiva no ponto P (Fig. 17-7b). A interferência é totalmente construtiva porque a onda proveniente de S_2 está deslocada em fase de 2λ em relação à onda proveniente de S_1, o que coloca as duas ondas *exatamente em fase* no ponto P.

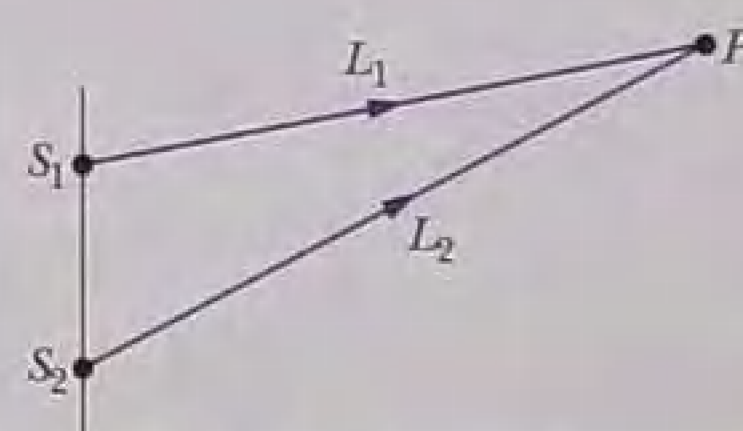
A interferência totalmente destrutiva acontece se ϕ é um múltiplo ímpar de π, condição que podemos escrever como

$$\phi = (2m + 1)\pi, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(interferência totalmente destrutiva).} \tag{17-24}$$

De acordo com a Eq. 17-21, isso acontece quando a razão $\Delta L/\lambda$ é

$$\frac{\Delta L}{\lambda} = 0{,}5,\ 1{,}5,\ 2{,}5, \ldots \quad \text{(interferência totalmente destrutiva).} \tag{17-25}$$

Assim, por exemplo, se a diferença de percurso $\Delta L = |L_2 - L_1|$ da Fig. 17-7a é $2{,}5\lambda$, $\Delta L/\lambda = 2{,}5$ e as ondas sofrem interferência totalmente destrutiva no ponto P (Fig. 17-7c). A interferência é totalmente destrutiva porque a onda proveniente de S_2 está deslocada em fase de $2{,}5\lambda$ em relação à onda proveniente de S_1, o que coloca as duas ondas *com fases opostas* no ponto P.



A interferência no ponto P depende da *diferença de percurso.*

(a)



Se a diferença é igual a um número inteiro de comprimentos de onda, 2,0 λ, as ondas chegam em fase. Na figura, a pressão está representada em um eixo perpendicular à direção de propagação da onda.

(b)



Se a diferença é igual a um número ímpar de meios comprimentos de onda, 2,5 λ, as ondas chegam com fases opostas.

(c)

Figura 17-7 (a) Duas fontes pontuais, S_1 e S_2, emitem ondas sonoras esféricas em fase. Os raios mostram que as ondas passam por um ponto comum P. As ondas (representadas por gráficos *transversais*) chegam ao ponto P (b) exatamente em fase e (c) exatamente fora de fase.

Naturalmente, duas ondas podem produzir uma interferência intermediária. Se $\Delta L/\lambda = 1{,}2$, por exemplo, a interferência nem é totalmente construtiva nem totalmente destrutiva, mas está mais próxima de ser totalmente construtiva ($\Delta L/\lambda = 1{,}0$) do que de ser totalmente destrutiva ($\Delta L/\lambda = 1{,}5$).

Exemplo

Interferência em pontos de uma circunferência

Na Fig. 17-8*a*, duas fontes pontuais F_1 e F_2 separadas por uma distância $D = 1{,}5\lambda$, emitem ondas sonoras de mesma amplitude, fase e comprimento de onda λ.

(a) Qual é a diferença de percurso das ondas de F_1 e F_2 no ponto P_1, que está sobre a mediatriz do segmento de reta que liga as duas fontes, a uma distância das fontes maior que D? (Fig. 17-8*b*)? (Ou seja, qual é a diferença entre a distância da fonte F_1 ao ponto P_1 e a distância da fonte F_2 ao ponto P_1?) Que tipo de interferência ocorre em P_1?

Raciocínio Como as duas ondas percorrem distâncias iguais para chegar a P_1, a diferença de percurso é

$$\Delta L = 0. \qquad \text{(Resposta)}$$

De acordo com a Eq. 17-23, isso significa que as ondas sofrem interferência totalmente construtiva em P_1.

(b) Quais são a diferença de percurso e o tipo de interferência no ponto P_2 na Fig. 17-8*c*?

Raciocínio A onda produzida por F_1 percorre uma distância adicional D ($= 1{,}5\lambda$) para chegar a P_2. Assim, a diferença de percurso é

$$\Delta L = 1{,}5\lambda. \qquad \text{(Resposta)}$$

De acordo com a Eq. 17-25, isso significa que as ondas estão com fases opostas em P_2 e interferem de forma totalmente destrutiva.

(c) A Fig. 17-8*d* mostra uma circunferência de raio muito maior que D cujo centro está no ponto médio entre F_1 e F_2. Qual é o número de pontos N da circunferência nos quais a interferência é totalmente construtiva? (Ou seja, em quantos pontos as ondas chegam exatamente em fase?)

Raciocínio Imagine que, partindo do ponto a, nos deslocamos no sentido horário ao longo da circunferência até o ponto d. No caminho, a diferença de percurso ΔL aumenta continuamente. Como foi visto no item (a), a diferença de percurso no ponto a é $\Delta L = 0\lambda$. Como foi visto no item (b), $\Delta L = 1{,}5\lambda$ no ponto d. Assim, deve existir um ponto entre a e d ao longo da circunferência no qual $\Delta L = \lambda$, como mostra a Fig. 17-8*e*. De acordo com a Eq. 17-23, uma interferência totalmente construtiva ocorre nesse ponto. Além disso, não existe outro ponto ao longo do percurso de a a d no qual ocorre interferência totalmente construtiva, já que 1 é o único número inteiro entre 0 e 1,5.

Podemos agora usar a simetria para localizar os outros pontos de interferência totalmente construtiva no resto da circunferência (Fig. 17-8*f*). A simetria em relação à reta cd nos dá o ponto b, no qual $\Delta L = 0\lambda$. (Como o ponto a, o ponto b está sobre a mediatriz do segmento de reta que liga as duas fontes e, portanto, a diferença de percurso até o ponto b é zero.) Existem mais três pontos para os quais $\Delta L = \lambda$. No total (Fig. 17-8*g*) temos

$$N = 6. \qquad \text{(Resposta)}$$

17-6 Intensidade e Nível Sonoro

Se você já tentou dormir enquanto alguém ouvia música a todo volume, sabe muito bem que existe algo no som além da frequência, comprimento de onda e velocidade: há também a intensidade. A **intensidade** I de uma onda sonora em uma superfície é a taxa média por unidade de área com a qual a energia contida na onda atravessa a superfície ou é absorvida pela superfície. Matematicamente, temos:

$$I = \frac{P}{A}, \qquad (17\text{-}26)$$

em que P é a taxa de variação com o tempo da transferência de energia (ou seja, a potência) da onda sonora e A é a área da superfície que intercepta o som. Como vamos mostrar daqui a pouco, a intensidade I está relacionada à amplitude do deslocamento s_m da onda sonora através da equação

$$I = \tfrac{1}{2}\rho v \omega^2 s_m^2. \qquad (17\text{-}27)$$



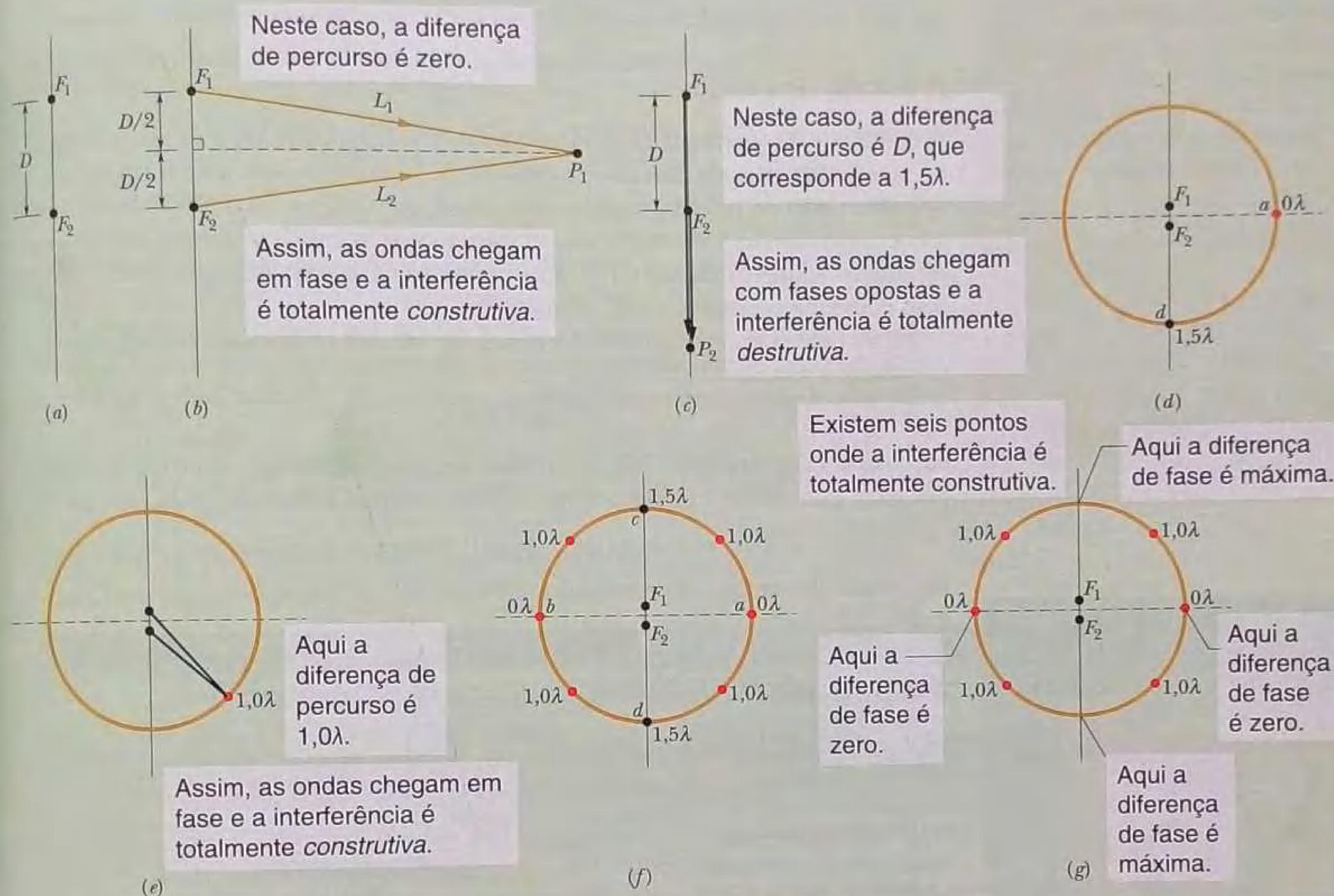


Figura 17-8 (*a*) Duas fontes pontuais F_1 e F_2, separadas por uma distância D, emitem ondas sonoras esféricas em fase. (*b*) As ondas percorrem distâncias iguais para chegar ao ponto P_1. (*c*) O ponto P_2 está sobre a linha reta que passa por F_1 e F_2. (*d*) Consideramos uma circunferência de raio muito maior que a distância entre F_1 e F_2. (*e*) Outro ponto de interferência totalmente construtiva. (*f*) Uso da simetria para determinar outros pontos. (*g*) Os seis pontos de interferência totalmente construtiva.

Variação da Intensidade com a Distância

Em geral, a intensidade do som varia com a distância de uma fonte real de uma forma bastante complexa. Algumas fontes reais, como os alto-falantes, podem emitir o som apenas em certas direções, e o ambiente normalmente produz ecos (ondas sonoras refletidas) que se superpõem às ondas sonoras originais. Em algumas situações, porém, podemos ignorar os ecos e supor que a fonte sonora é uma fonte pontual e *isotrópica*, ou seja, que emite o som com a mesma intensidade em todas as direções. As frentes de onda que existem em torno de uma fonte pontual isotrópica F em um dado instante são mostradas na Fig. 17-9.

Vamos supor que a energia mecânica das ondas sonoras é conservada quando as ondas se espalham a partir de uma fonte pontual isotrópica e construir uma esfera imaginária de raio r e centro na fonte, como mostra a Fig. 17-9. Como toda a energia emitida pela fonte passa pela superfície da esfera, a taxa com a qual a energia das ondas sonoras atravessa a superfície é igual à taxa com a qual a energia é emitida pela fonte (ou seja, a potência P_s da fonte). De acordo com a Eq. 17-26, a intensidade I da onda sonora na superfície da esfera é dada por

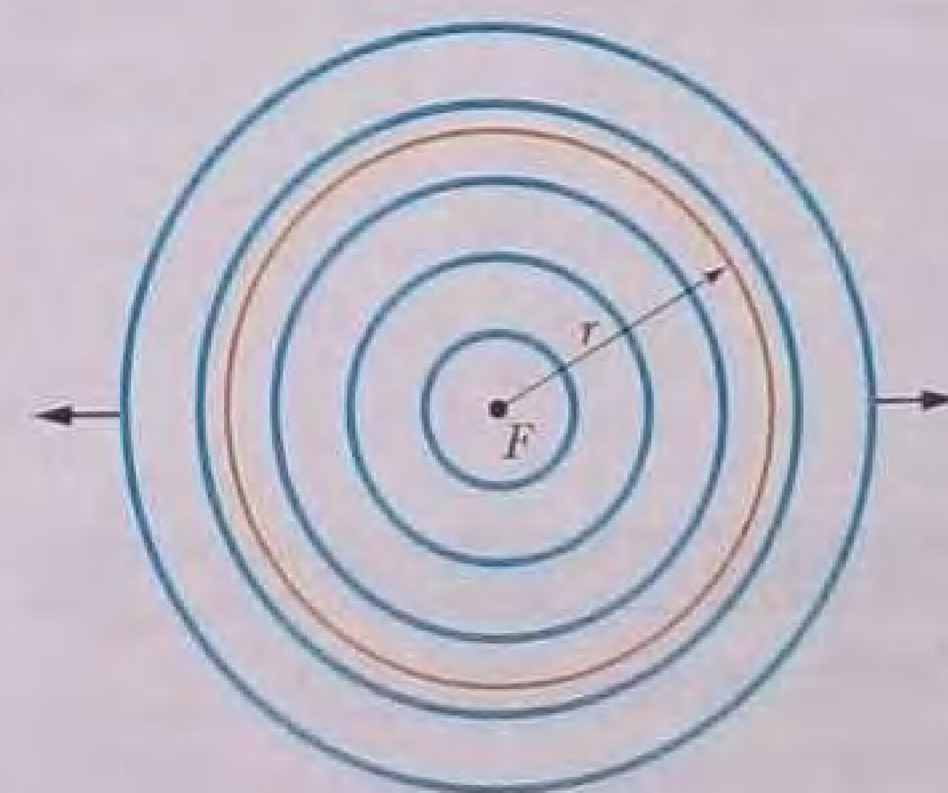
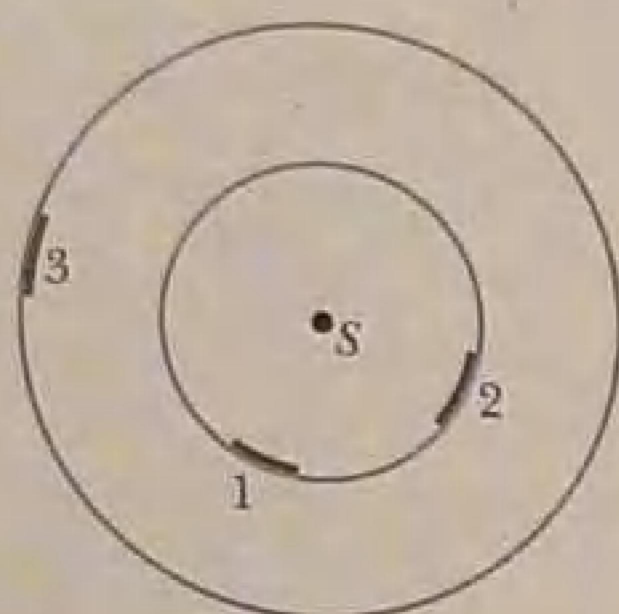


Figura 17-9 Uma fonte pontual F emite ondas sonoras com a mesma intensidade em todas as direções. As ondas atravessam uma esfera imaginária de raio r e centro em F.

TESTE 2

A figura mostra três pequenas regiões, 1, 2 e 3, na superfície de duas esferas imaginárias, cujo centro está em uma fonte sonora pontual isotrópica S. As taxas com as quais a energia das ondas sonoras atravessa as três regiões são iguais. Ordene as regiões de acordo (a) com a intensidade do som na região e (b) com a área da região, em ordem decrescente.



$$I = \frac{P_s}{4\pi r^2}, \tag{17-28}$$

onde $4\pi r^2$ é a área da esfera. A Eq. 17-28 nos diz que a intensidade do som emitido por uma fonte pontual isotrópica diminui com o quadrado da distância r da fonte.

A Escala de Decibéis

A amplitude do deslocamento no interior do ouvido humano varia de cerca de 10^{-5} m, para o som mais alto tolerável, a cerca de 10^{-11} m para o som mais fraco detectável, uma razão de 10^6. Como, de acordo com a Eq. 17-27, a intensidade de um som varia com o *quadrado* da amplitude, a razão entre as intensidades nesses dois limites do sistema auditivo humano é 10^{12}. Isso significa que os seres humanos podem ouvir sons com uma enorme faixa de intensidades.

Para lidar com um intervalo tão grande de valores, recorremos aos logaritmos. Considere a relação

$$y = \log x,$$

em que x e y são variáveis. Uma propriedade dessa equação é que, se x é *multiplicado* por 10, y aumenta de 1 unidade. Para verificar que isso é verdade, basta escrever

$$y' = \log(10x) = \log 10 + \log x = 1 + y.$$

Da mesma forma, quando multiplicamos x por 10^{12}, y aumenta apenas de 12 unidades.

Assim, em vez de falarmos da intensidade I de uma onda sonora, é muito mais conveniente falarmos do **nível sonoro** β, definido através da expressão

$$\beta = (10 \text{ dB}) \log \frac{I}{I_0}, \tag{17-29}$$

em que dB é a abreviação de **decibel**, a unidade de nível sonoro, um nome escolhido em homenagem a Alexander Graham Bell.* I_0 na Eq. 17-29 é uma intensidade de referência ($= 10^{-12}$ W/m^2), cujo valor foi escolhido porque está próximo do limite inferior da faixa de audição humana. Para $I = I_0$, a Eq. 17-29 fornece $\beta = 10 \log 1 = 0$, de modo que a intensidade de referência corresponde a zero decibel. O valor de β aumenta em 10 dB toda vez que a intensidade sonora aumenta de uma ordem de grandeza (um fator de 10). Assim, $\beta = 40$ corresponde a uma intensidade 10^4 vezes maior que a intensidade de referência. A Tabela 17-2 mostra os níveis sonoros em alguns ambientes.



O som pode fazer um copo de vidro oscilar. Se o som produz uma onda estacionária e se a intensidade do som é elevada, o vidro pode quebrar. *(Ben Rose/The Image Bank/Getty Images)*

Tabela 17-2

Alguns Níveis Sonoros (dB)

Limiar de audição	0
Farfalhar de folhas	10
Conversa	60
Show de rock	110
Limiar da dor	120
Turbina a jato	130

Demonstração da Equação 17-27

Considere, na Fig. 17-4a, uma fatia fina de ar de espessura dx, área A e massa dm, oscilando para a frente e para trás enquanto a onda sonora da Eq. 17-12 passa por ela. A energia cinética dK da fatia de ar é

$$dK = \tfrac{1}{2}\, dm\, v_s^2, \tag{17-30}$$

em que v_s não é a velocidade da onda, mas a velocidade de oscilação do elemento de ar, obtida a partir da Eq. 17-12:

$$v_s = \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega s_m \operatorname{sen}(kx - \omega t).$$

Usando essa relação e fazendo $dm = \rho A\, dx$, podemos escrever a Eq. 17-30 na forma

$$dK = \tfrac{1}{2}(\rho A\, dx)(-\omega s_m)^2 \operatorname{sen}^2(kx - \omega t). \tag{17-31}$$

* Na verdade, a unidade de volume sonoro é o bel (B) e o decibel é um submúltiplo (1 dB = 0,1 B), mas o decibel é muito mais usado na prática que o bel. (N.T.)

Dividindo a Eq. 17-31 por dt, obtemos a taxa com a qual a energia cinética se desloca com a onda. Como vimos no Capítulo 16 para ondas transversais, dx/dt é a velocidade v da onda, de modo que

$$\frac{dK}{dt} = \tfrac{1}{2}\rho A v \omega^2 s_m^2 \operatorname{sen}^2(kx - \omega t). \tag{17-32}$$

A taxa *média* com a qual a energia cinética é transportada é

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)_{\text{méd}} = \tfrac{1}{2}\rho A v \omega^2 s_m^2 [\operatorname{sen}^2(kx - \omega t)]_{\text{méd}}$$

$$= \tfrac{1}{4}\rho A v \omega^2 s_m^2. \tag{17-33}$$

Para obter essa equação, usamos o fato de que o valor médio do quadrado de uma função seno (ou cosseno) para uma oscilação completa é 1/2.

Supomos que a energia *potencial* é transportada pela onda com a mesma taxa média. A intensidade I da onda, que é a taxa média por unidade de área com a qual a energia nas duas formas é transmitida pela onda é, portanto, de acordo com a Eq. 17-33,

$$I = \frac{2(dK/dt)_{\text{méd}}}{A} = \tfrac{1}{2}\rho v \omega^2 s_m^2,$$

que é a Eq. 17-27, a equação que queríamos demonstrar.

Exemplo

Variação da intensidade de uma onda sonora cilíndrica com a distância

Uma centelha elétrica tem a forma de um segmento de reta de comprimento $L = 10$ m e emite um pulso sonoro que se propaga radialmente. (Dizemos que a centelha é uma *fonte linear* de som.) A potência da emissão é $P_s = 1{,}6 \times 10^4$ W.

(a) Qual é a intensidade I do som a uma distância $r = 12$ m da centelha?

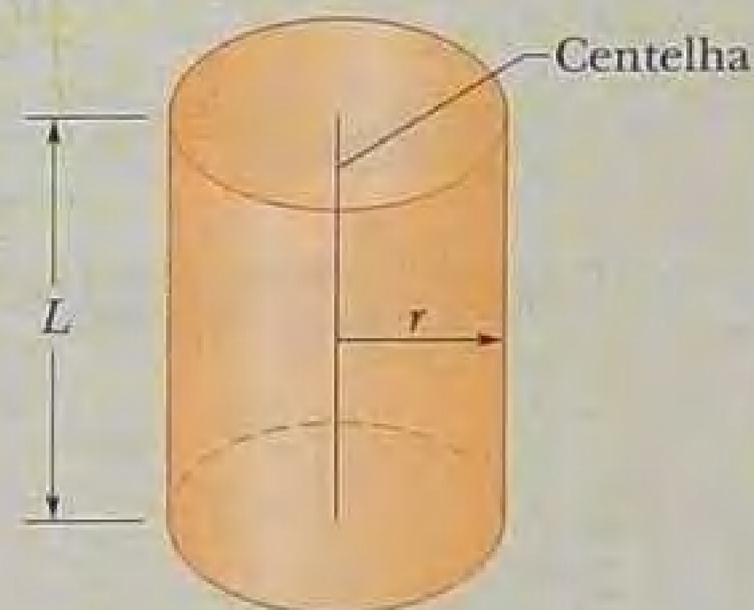


Figura 17-10 Uma centelha na forma de um segmento de reta de comprimento L emite ondas sonoras radiais. As ondas atravessam um cilindro imaginário de raio r e comprimento L cujo eixo coincide com a centelha.

IDEIAS-CHAVE

(1) Vamos construir um cilindro imaginário de raio $r = 12$ m e comprimento $L = 10$ m (aberto nas extremidades) em torno da centelha, como mostra na Fig. 17-10. A intensidade I na superfície do cilíndrico é dada pela razão P/A, onde P é a taxa com a qual a energia sonora atravessa a superfície e A é a área da superfície. (2) Supomos que o princípio de conservação da energia se aplica à energia sonora. Isso significa que a taxa P com a qual a energia passa pela superfície do cilindro é igual à taxa P_s com a qual a energia é emitida pela fonte.

Cálculos Juntando essas ideias e notando que a área da superfície cilíndrica é $A = 2\pi rL$, temos

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P_s}{2\pi rL}. \tag{17-34}$$

Isso nos diz que a intensidade do som produzido por uma fonte sonora linear diminui com a distância r (e não com o quadrado da distância r, como no caso de fonte pontual). Substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$I = \frac{1{,}6 \times 10^4 \text{ W}}{2\pi(12 \text{ m})(10 \text{ m})}$$

$$= 21{,}2 \text{ W/m}^2 \approx 21 \text{ W/m}^2. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Com que taxa P_d a energia sonora é interceptada por um detector acústico de área $A_d = 2{,}0$ cm², apontado para a centelha e situado a uma distância $r = 12$ m da centelha?

Cálculos Sabemos que a intensidade do som no detector é a razão entre a taxa de transferência de energia P_d nesse local e a área A_d do detector:

$$I = \frac{P_d}{A_d}. \tag{17-35}$$

Podemos imaginar que o detector está na superfície cilíndrica do item (a). Nesse caso, a intensidade sonora no detector é igual à intensidade I (= 21,2 W/m²) na superfície cilíndrica. Explicitando P_d na Eq. 17-35, obtemos:

$$P_d = (21{,}2 \text{ W/m}^2)(2{,}0 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 4{,}2 \text{ mW}. \quad \text{(Resposta)}$$

Exemplo

Intensidade sonora em decibéis

Muitos músicos veteranos de rock sofrem de perda aguda da audição por causa dos altos níveis sonoros a que foram submetidos durante anos tocando música perto de alto-falantes ou ouvindo música em fones de ouvido. Alguns, como Ted Nugent, perderam totalmente a audição em um ouvido. Outros, como Peter Townshend do The Who, ouvem sons inexistentes (tinido). Recentemente, vários músicos de rock, como Lars Ulrich da banda Metallica (Fig. 17-11) começaram a usar proteções especiais nos ouvidos durante as apresentações. Se um protetor de ouvido diminui o nível sonoro em 20 dB, qual é a razão entre a intensidade final I_f e a intensidade inicial I_i?

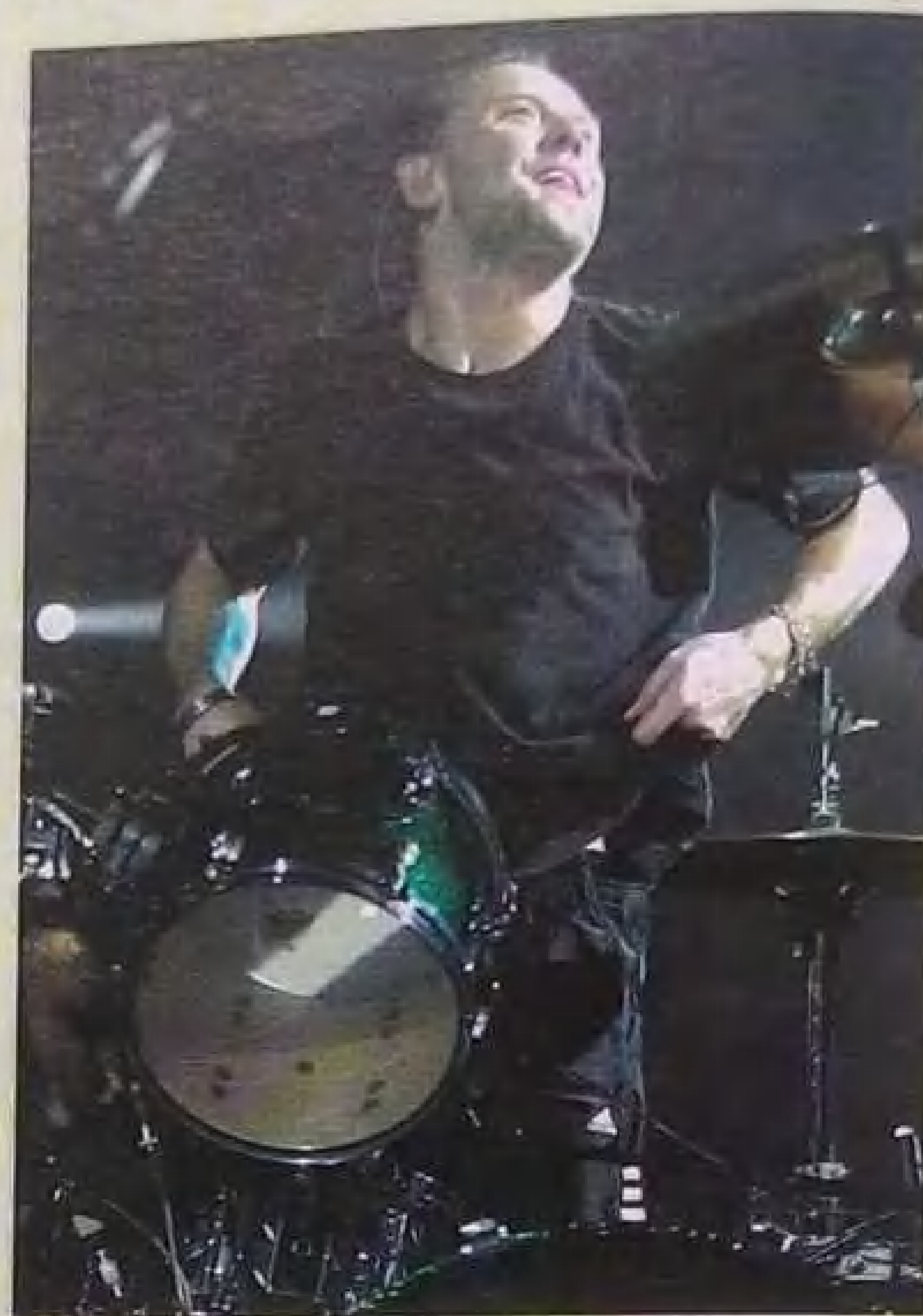


Figura 17-11 Lars Ulrich, da banda Metallica, é um dos que apoiam a organização HEAR (Hearing Education and Awareness for Rockers), que alerta para os danos que altos níveis sonoros podem causar à audição. *(Tim Mosenfelder/ Getty Images News and Sport Services)*

IDEIA-CHAVE

Tanto para a onda final como para a inicial, o nível sonoro β está relacionado à intensidade através da definição de nível sonoro da Eq. 17-29.

Cálculos Para a onda final, temos:

$$\beta_f = (10\text{ dB})\log\frac{I_f}{I_0},$$

e para a onda inicial, temos:

$$\beta_i = (10\text{ dB})\log\frac{I_i}{I_0}.$$

A diferença entre os níveis sonoros é

$$\beta_f - \beta_i = (10\text{ dB})\left(\log\frac{I_f}{I_0} - \log\frac{I_i}{I_0}\right). \qquad (17\text{-}36)$$

Usando a identidade

$$\log\frac{a}{b} - \log\frac{c}{d} = \log\frac{ad}{bc},$$

podemos escrever a Eq. 17-36 na forma

$$\beta_f - \beta_i = (10\text{ dB})\log\frac{I_f}{I_i}. \qquad (17\text{-}37)$$

Reagrupando os termos e substituindo a redução do nível sonoro $\beta_f - \beta_i$ por -20 dB, obtemos

$$\log\frac{I_f}{I_i} = \frac{\beta_f - \beta_i}{10\text{ dB}} = \frac{-20\text{ dB}}{10\text{ dB}} = -2{,}0.$$

Em seguida, tomamos o antilogaritmo de ambos os membros da equação. (Embora o antilogaritmo de $-2{,}0$, que é $10^{-2{,}0}$, possa ser calculado mentalmente, você pode utilizar uma calculadora digitando 10^−2,0 ou usando a tecla 10^x.) O resultado é o seguinte:

$$\frac{I_f}{I_i} = \log^{-1}(-2{,}0) = 0{,}010. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, o protetor de ouvido reduz a intensidade das ondas sonoras para 0,010 da intensidade inicial, o que corresponde a uma redução de duas ordens de grandeza.

17-7 Fontes de Sons Musicais

Os sons musicais podem ser produzidos pelas oscilações de cordas (violão, piano, violino), membranas (tímpano, tambor), colunas de ar (flauta, oboé, tubos de órgão e o digeridu da Fig. 17-12), blocos de madeira ou barras de aço (marimba, xilofone) e muitos outros corpos. Na maioria dos instrumentos, as oscilações envolvem mais de uma peça.

Como vimos no Capítulo 16, é possível produzir ondas estacionárias em uma corda mantida fixa nas duas extremidades porque as ondas que se propagam na corda

são refletidas em cada extremidade. Para certos valores do comprimento de onda, a combinação das ondas que se propagam em sentidos opostos produz uma onda estacionária (ou modo de oscilação). Os comprimentos de onda para os quais isso acontece correspondem às *frequências de ressonância* da corda. A vantagem de produzir ondas estacionárias é que, nessas condições, a corda passa a oscilar com grande amplitude, movimentando periodicamente o ar ao redor e produzindo assim uma onda sonora audível com a mesma frequência que as oscilações da corda. Essa forma de produção de som é de óbvia importância para, digamos, um violonista.

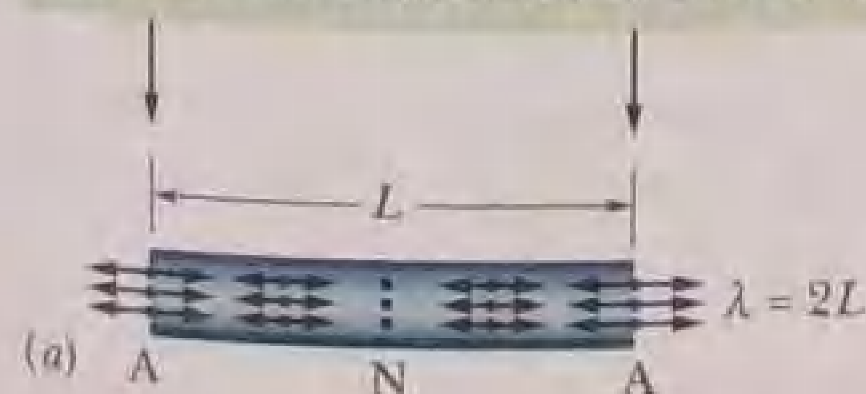
Podemos usar um método semelhante para produzir ondas sonoras estacionárias em um tubo cheio de ar. As ondas que se propagam no interior de um tubo são refletidas nas extremidades do tubo. (A reflexão ocorre mesmo que uma extremidade esteja aberta, embora, nesse caso, a reflexão não seja tão completa.) Para certos comprimentos de onda das ondas sonoras, a superposição das ondas que se propagam no tubo em sentidos opostos produz uma onda estacionária. Os comprimentos de onda para os quais isso acontece correspondem às *frequências de ressonância* do tubo. A vantagem de produzir ondas estacionárias é que, nessas condições, o ar no interior do tubo passa a oscilar com grande amplitude, movimentando periodicamente o ar ao redor e produzindo assim uma onda sonora audível com a mesma frequência que as oscilações do ar no tubo. Essa forma de produção de som é de óbvia importância para, digamos, um organista.

Muitos outros aspectos das ondas sonoras estacionárias são semelhantes aos das ondas em cordas: a extremidade fechada de um tubo é como a extremidade fixa de uma corda, pois deve existir um nó (deslocamento nulo) no local; a extremidade aberta de um tubo é como a extremidade de uma corda presa a um anel que se move livremente, como na Fig. 16-18*b*, pois deve existir um antinó (deslocamento máximo) no local. (Na verdade, o antinó associado à extremidade aberta de um tubo está localizado ligeiramente para fora da extremidade, mas isso é irrelevante para nossa discussão.)

A Fig. 17-13*a* mostra a onda estacionária mais simples que pode ser produzida em um tubo com as duas extremidades abertas. Existe um antinó em cada extremidade e um nó no ponto médio do tubo. Um modo mais simples de representar uma onda sonora longitudinal estacionária é mostrado na Fig. 17-13*b*, na qual a onda sonora foi desenhada como se fosse uma onda em uma corda (no caso da onda sonora, a coordenada perpendicular à direção de propagação da onda representa uma variação de pressão e não um deslocamento no espaço).

A onda estacionária da Fig. 17-13*a* é chamada de *modo fundamental* ou *primeiro harmônico*. Para produzi-la, as ondas sonoras em um tubo de comprimento L devem ter um comprimento de onda tal que $\lambda = 2L$. A Fig. 17-14*a* mostra outras ondas sonoras estacionárias que podem ser produzidas em um tubo com as duas extremidades abertas (usando a representação da Fig. 17-13*b*). No caso do *segundo harmônico*, o comprimento das ondas sonoras é $\lambda = L$, no caso do *terceiro harmônico* é $\lambda = 2L/3$ e assim por diante.

Antinós (máxima oscilação) ocorre nas extremidades abertas.



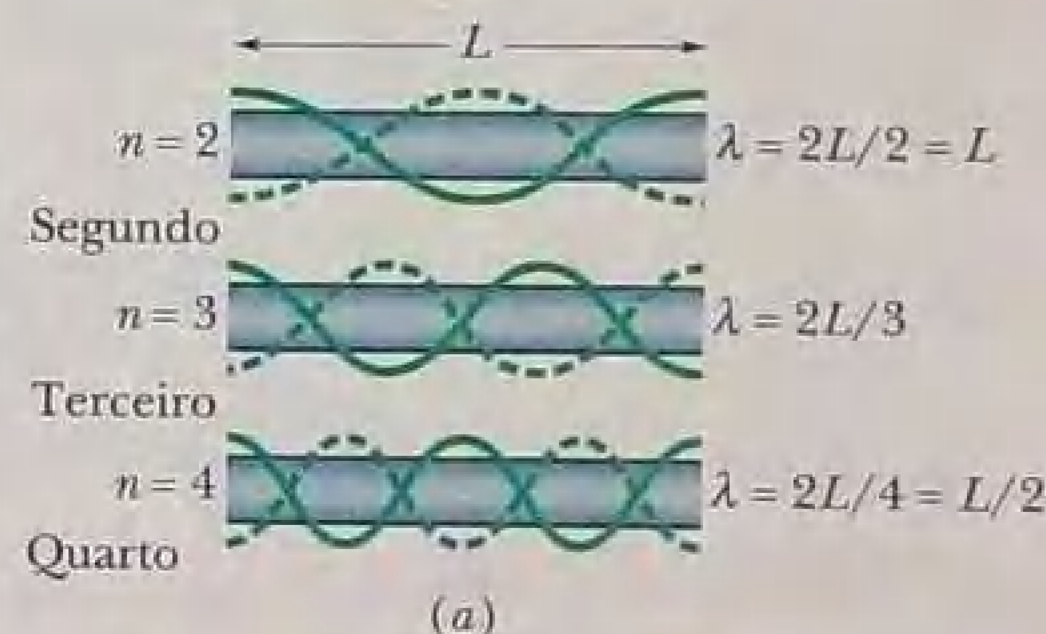


Primeiro harmônico

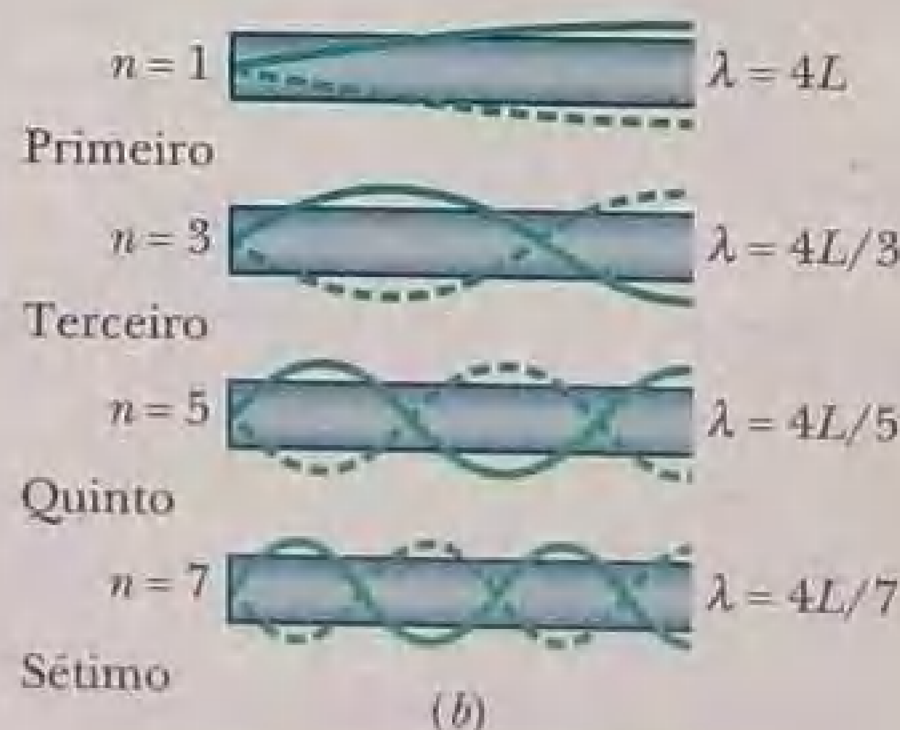
Figura 17-13 (*a*) O padrão de deslocamento mais simples para uma onda sonora (longitudinal) estacionária em um tubo com as duas extremidades abertas possui um antinó (A) em cada extremidade e um nó (N) no ponto médio do tubo. (Os deslocamentos longitudinais, representados pelas setas duplas, estão muito exagerados.) (*b*) O padrão correspondente para uma onda transversal em uma corda.



Figura 17-12 A coluna de ar no interior de um digeridu (um "tubo") oscila quando o instrumento é tocado. *(Alamy Images)*



Duas extremidades abertas: qualquer harmônico



Uma extremidade aberta: apenas harmônicos *ímpares*

Figura 17-14 Ondas estacionárias em tubos, representadas por curvas de pressão em função da posição. (*a*) Com as *duas* extremidades do tubo abertas, qualquer harmônico pode ser produzido no tubo. (*b*) Com *uma* extremidade aberta, apenas os harmônicos ímpares podem ser produzidos.

No caso geral, as frequências de ressonância de um tubo de comprimento L com as duas extremidades abertas correspondem a comprimentos de onda dados por

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{17-38}$$

em que n é o *número harmônico*. Chamando de v a velocidade do som, podemos escrever as frequências de ressonância de um tubo aberto nas duas extremidades como

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L}, \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{(tubo, duas extremidades abertas).} \tag{17-39}$$

A Fig. 17-14*b* mostra (usando a representação da Fig. 17-13*b*) algumas ondas sonoras estacionárias que podem ser produzidas em um tubo aberto apenas em uma das extremidades. Nesse caso, existe um antinó na extremidade aberta e um nó na extremidade fechada. O modo mais simples é aquele no qual $\lambda = 4L$. No segundo modo mais simples, $\lambda = 4L/3$ e assim por diante.

No caso geral, as frequências de ressonância de um tubo de comprimento L com uma extremidade aberta e a outra fechada correspondem a comprimentos de onda dados por

$$\lambda = \frac{4L}{n}, \qquad \text{para } n = 1, 3, 5, \ldots, \tag{17-40}$$

em que o número harmônico *n é um número ímpar*. As frequências de ressonância são dadas por

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{4L}, \qquad \text{para } n = 1, 3, 5, \ldots \quad \text{(tubo, uma extremidade aberta).} \tag{17-41}$$

Observe que apenas os harmônicos ímpares podem existir em um tubo aberto em uma das extremidades. O segundo harmônico, com $n = 2$, por exemplo, não pode ser produzido. Note também que, em tubos desse tipo, uma expressão como "terceiro harmônico" ainda se refere ao modo cujo número harmônico é 3 e não ao terceiro harmônico possível. Finalmente, observe que as Eqs. 17-38 e 17-39, que se aplicam a tubos abertos nas duas extremidades, contêm o número 2 e qualquer valor inteiro de n, enquanto as Eqs. 17-40 e 17-41, que se aplicam a tubos abertos em uma das extremidades, contêm o número 4 e apenas valores ímpares de n.

O comprimento de um instrumento musical está ligado à faixa de frequências que o instrumento foi projetado para cobrir; comprimentos menores estão associados a frequências mais altas. A Fig. 17-15, por exemplo, mostra as famílias do saxofone e

Figura 17-15 As famílias do saxofone e do violino, mostrando a relação entre o comprimento do instrumento e a faixa de frequências. A faixa de frequências de cada instrumento é indicada por uma barra horizontal em uma escala de frequências sugerida pelo teclado na base da figura; as frequências aumentam da esquerda para a direita.

do violino, com as faixas de frequências sugeridas pelo teclado de um piano. Observe que, para cada instrumento, existe uma superposição com os vizinhos projetados para frequências mais altas e frequências mais baixas.

Nos sistemas oscilatórios que produzem sons musicais, como cordas de violino e o ar em tubos de órgão, o modo fundamental é quase sempre gerado simultaneamente com um ou mais harmônicos superiores. Assim, vários modos são ouvidos ao mesmo tempo, superpostos para formar uma onda resultante. Quando diferentes instrumentos tocam a mesma nota, produzem a mesma frequência fundamental, mas os harmônicos superiores têm intensidades diferentes. Assim, por exemplo, o quarto harmônico do dó médio pode ser forte em um instrumento e fraco ou mesmo ausente em outro instrumento. É por isso que os instrumentos produzem sons diferentes, mesmo quando tocam a mesma nota. Esse é o caso das duas ondas resultantes mostradas na Fig. 17-16, que foram produzidas por diferentes instrumentos tocando a mesma nota musical.

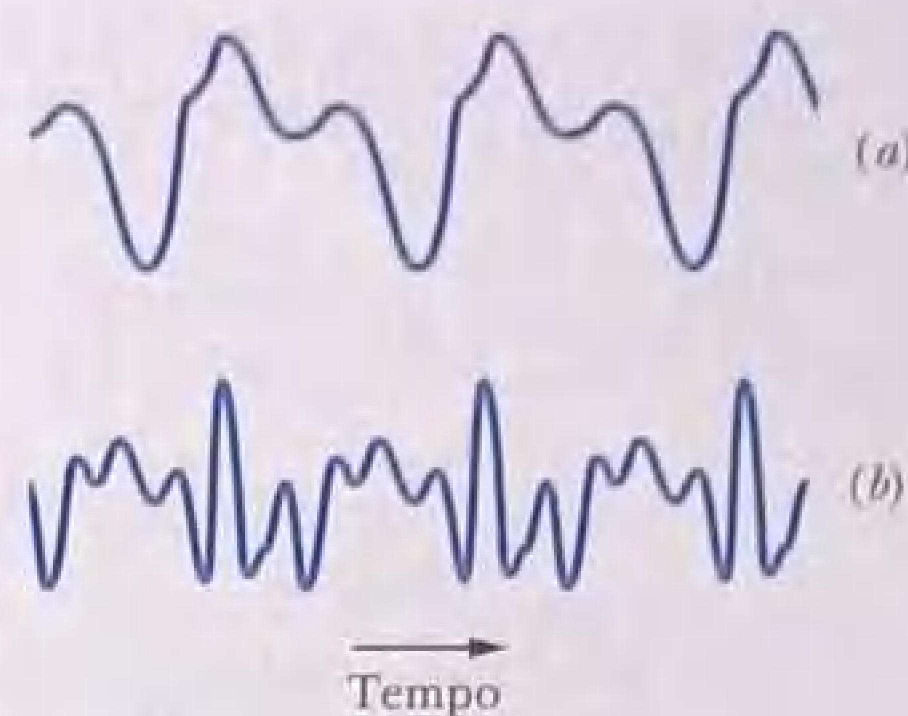


Figura 17-16 Formas de onda produzidas (*a*) por uma flauta e (*b*) por um oboé quando uma nota com a mesma frequência fundamental é tocada nos dois instrumentos.

TESTE 3

O tubo *A*, de comprimento *L*, e o tubo *B*, de comprimento 2*L*, têm as duas extremidades abertas. Que harmônico do tubo *B* possui a mesma frequência que o modo fundamental do tubo *A*?

Exemplo

Ressonância em tubos abertos nas duas extremidades e em uma extremidade

Ruídos de fundo de baixa intensidade em uma sala produzem ondas estacionárias em um tubo de papelão de comprimento $L = 67{,}0$ cm com as duas extremidades abertas. Suponha que a velocidade do som no ar dentro do tubo é 343 m/s.

(a) Qual a frequência do som produzido pelo tubo?

IDEIA-CHAVE

Com as duas extremidades do tubo abertas, temos uma situação simétrica na qual a onda estacionária possui um antinó em cada extremidade do tubo. A onda estacionária do modo fundamental é a da Fig. 17-13*b*.

Cálculo A frequência é dada pela Eq. 17-39 com $n = 1$, já que estamos interessados no modo fundamental:

$$f = \frac{nv}{2L} = \frac{(1)(343\text{ m/s})}{2(0{,}670\text{ m})} = 256\text{ Hz.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Se os ruídos de fundo produzirem harmônicos de ordem superior, como, por exemplo, o segundo harmônico, serão produzidas outras frequências que sejam múltiplos *inteiros* de 256 Hz. (Assim, a menor frequência produzida é a frequência fundamental, 256 Hz.)

(b) Se você encostar o ouvido em uma das extremidades do tubo, que frequência fundamental ouvirá?

IDEIA-CHAVE

Com o ouvido fechando uma das extremidades do tubo, temos uma situação assimétrica: ainda existe um antinó na extremidade aberta, mas passa a haver um nó na outra extremidade, que agora está fechada. Nesse caso, a onda estacionária mais simples é a representada no alto na Fig. 17-14*b*.

Cálculo A frequência é dada pela Eq. 17-41 com $n = 1$ para o modo fundamental:

$$f = \frac{nv}{4L} = \frac{(1)(343\text{ m/s})}{4(0{,}670\text{ m})} = 128\text{ Hz.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Se os ruídos de fundo produzirem harmônicos superiores, eles serão múltiplos ímpares de 128 Hz. Nesse caso, portanto, a frequência de 256 Hz (que é um múltiplo par) não pode ser ouvida.

17-8 Batimentos

Quando escutamos, com uma diferença de alguns minutos, dois sons cujas frequências são muito próximas, como 552 e 564 Hz, temos dificuldade para distingui-los. Quando os dois sons chegam aos nossos ouvidos simultaneamente, ouvimos um som

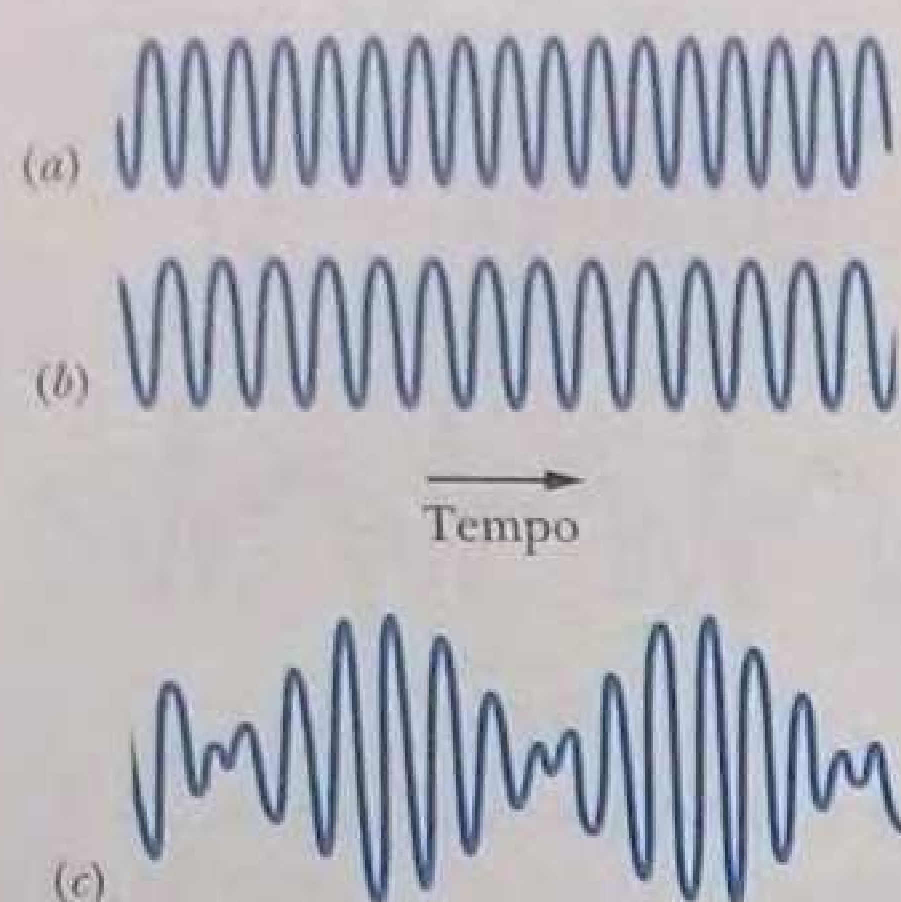


Figura 17-17 (*a*, *b*) As variações de pressão Δp de duas ondas sonoras quando são detectadas separadamente. As frequências das ondas são muito próximas. (*c*) A variação de pressão quando as duas ondas são detectadas simultaneamente.

cuja frequência é 558 Hz, a *média* das duas frequências, mas percebemos também uma grande variação na intensidade do som, que aumenta e diminui alternadamente, produzindo um **batimento** que se repete com uma frequência de 12 Hz, a *diferença* entre as duas frequências originais. A Fig. 17-17 ilustra esse fenômeno.

Suponha que as variações de pressão produzidas por duas ondas sonoras de mesma amplitude s_m em um certo ponto sejam

$$s_1 = s_m \cos \omega_1 t \qquad \text{e} \qquad s_2 = s_m \cos \omega_2 t, \tag{17-42}$$

onde $\omega_1 > \omega_2$. De acordo com o princípio de superposição, a variação de pressão total é dada por

$$s = s_1 + s_2 = s_m(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t).$$

Usando a identidade trigonométrica (veja o Apêndice E)

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos[\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)] \cos[\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)]$$

podemos escrever a variação de pressão total na forma

$$s = 2s_m \cos[\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t] \cos[\tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t]. \tag{17-43}$$

Definindo

$$\omega' = \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \qquad \text{e} \qquad \omega = \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \tag{17-44}$$

podemos escrever a Eq. 17-43 na forma

$$s(t) = [2s_m \cos \omega' t] \cos \omega t. \tag{17-45}$$

Vamos supor que as frequências angulares ω_1 e ω_2 das ondas que se combinam são quase iguais, o que significa que $\omega \gg \omega'$ na Eq. 17-44. Nesse caso, podemos considerar a Eq. 17-45 como uma função cosseno cuja frequência angular é ω e cuja amplitude (que não é constante, mas varia com uma frequência angular ω') é o valor absoluto do fator entre colchetes.

A amplitude é máxima quando $\cos \omega' t$ na Eq. 17-45 é igual a 1 ou -1, o que acontece duas vezes em cada repetição da função cosseno. Como $\cos \omega' t$ tem uma frequência angular ω', a frequência angular ω_{bat} do batimento é $\omega_{bat} = 2\omega'$. Assim, com a ajuda da Eq. 17-44, podemos escrever

$$\omega_{bat} = 2\ \omega' = (2)(\tfrac{1}{2})(\omega_1 - \omega_2) = \omega_1 - \omega_2.$$

Como $\omega = 2\pi f$, essa equação também pode ser escrita na forma

$$f_{bat} = f_1 - f_2 \qquad \text{(frequência de batimento).} \tag{17-46}$$

Os músicos usam o fenômeno de batimento para afinar seus instrumentos. O som de um instrumento é comparado com uma frequência padrão (como, por exemplo, uma nota chamada "lá de concerto" tocada pelo primeiro oboé) e ajustado até que o batimento desapareça. Em Viena, o lá de concerto (440 Hz) é fornecido por telefone aos muitos músicos residentes na cidade.

Exemplo

Uso das frequências de batimento pelos pinguins

Quando um pinguim-imperador volta para casa depois de sair à procura de alimento, como consegue encontrar o companheiro ou companheira no meio de milhares de pinguins reunidos para se proteger do rigoroso inverno da Antártica? Não é pela visão, já que todos os pinguins são muito parecidos, mesmo para outros pinguins.

A resposta está no modo como os pinguins emitem sons. A maioria dos pássaros emite sons usando apenas um dos dois lados do órgão vocal, chamado de *siringe*. Os pinguins-imperadores, porém, emitem sons usando simultaneamente os dois lados da siringe. Cada lado produz ondas acústicas estacionárias na garganta e na boca do pássaro,

como em um tubo com as duas extremidades abertas. Suponha que a frequência do primeiro harmônico produzido pelo lado A da siringe é f_{A1} = 432 Hz e que a frequência do primeiro harmônico produzido pela extremidade B é f_{B1} = 371 Hz. Qual é a frequência de batimento entre as duas frequências do primeiro harmônico e entre as duas frequências do segundo harmônico?

IDEIA-CHAVE

De acordo com a Eq. 17-46 ($f_{bat} = f_1 - f_2$), a frequência de batimento de duas frequências é a diferença entre as frequências.

Cálculos Para as duas frequências de primeiro harmônico f_{A1} e f_{B1}, a frequência de batimento é

$$f_{bat,1} = f_{A1} - f_{B1} = 432 \text{ Hz} - 371 \text{ Hz} = 61 \text{ Hz}. \quad \text{(Resposta)}$$

Como as ondas estacionárias produzidas pelo pinguim correspondem a um tubo com as duas extremidades abertas, as frequências de ressonância são dadas pela Eq. 17-39 ($f = nv/2L$), em que L é o comprimento (desconhecido) do tubo. A frequência do primeiro harmônico é $f_1 = v/2L$ e a frequência do segundo harmônico é $f_2 = 2v/2L$. Comparando as duas frequências, vemos que, seja qual for o valor de L,

$$f_2 = 2f_1.$$

Para o pinguim, o segundo harmônico do lado A tem uma frequência $f_{A2} = 2f_{A1}$ e o segundo harmônico do lado B tem uma frequência $f_{B2} = 2f_{B1}$. Usando a Equação 17-46 com as frequências f_{A2} e f_{B2}, descobrimos que a frequência de batimento correspondente é

$$f_{bat,2} = f_{A2} - f_{B2} = 2f_{A1} - 2f_{B1}$$
$$= 2(432 \text{ Hz}) - 2(371 \text{ Hz})$$
$$= 122 \text{ Hz}. \quad \text{(Resposta)}$$

Os experimentos mostram que os pinguins conseguem perceber essas frequências de batimento relativamente elevadas (os seres humanos não conseguem perceber frequências de batimento maiores que cerca de 12 Hz). Assim, o chamado de um pinguim possui uma variedade de harmônicos e frequências de batimento que permite que sua voz seja identificada mesmo entre as vozes de milhares de outros pinguins.

17-9 O Efeito Doppler

Um carro de polícia está estacionado no acostamento de uma rodovia, com a sirene de 1000 Hz ligada. Se você também estiver parado no acostamento, ouvirá o som da sirene com a mesma frequência. Se houver um movimento relativo entre você e o carro de polícia, porém, ouvirá uma frequência diferente. Se estiver se *aproximando* do carro de polícia a 120 km/h, por exemplo, ouvirá uma frequência mais alta (1096 Hz, um *aumento* de 96 Hz). Se estiver se *afastando* do carro de polícia com a mesma velocidade, ouvirá uma frequência mais baixa (904 Hz, uma *diminuição* de 96 Hz).

Essas variações de frequência relacionadas ao movimento são exemplos do **efeito Doppler**. Esse efeito foi proposto (embora não tenha sido perfeitamente analisado) em 1842 pelo físico austríaco Johann Christian Doppler. Foi estudado experimentalmente em 1845 por Buys Ballot, na Holanda, "usando uma locomotiva que puxava um vagão aberto com vários trompetistas".

O efeito Doppler é observado não só para ondas sonoras, mas também para ondas eletromagnéticas, como as micro-ondas, as ondas de rádio e a luz visível. No momento, porém, vamos considerar apenas o caso das ondas sonoras e tomar como referencial a massa de ar onde as ondas se propagam. Isso significa que a velocidade da fonte F e do detector D das ondas sonoras será medida *em relação ao ar*. (A não ser que seja dito o contrário, vamos supor que o ar está em repouso em relação ao solo, de modo que as velocidades também podem ser medidas em relação ao solo.) Vamos supor que F e D se aproximam ou se afastam em linha reta, com velocidades menores do que a velocidade do som.

Se o detector ou a fonte está se movendo, ou ambos estão se movendo, a frequência emitida f e a frequência detectada f' são relacionadas através da equação

$$f' = f\frac{v \pm v_D}{v \pm v_F} \quad \text{(equação geral do efeito Doppler)}, \quad (17\text{-}47)$$

em que v é a velocidade do som no ar, v_D é a velocidade do detector em relação ao ar e v_F é a velocidade da fonte em relação ao ar. A escolha do sinal positivo ou negativo é dada pela seguinte regra:

Quando o movimento do detector ou da fonte é no sentido de aproximá-los, o sinal da velocidade deve resultar em um aumento da frequência. Quando o movimento do detector ou da fonte é no sentido de afastá-los, o sinal da velocidade deve resultar em uma diminuição da frequência.

Para resumir, *aproximação* significa *aumento de frequência*; *afastamento* significa *diminuição de frequência.*

Aqui está uma descrição detalhada da aplicação da regra. Se o detector estiver se movendo em direção à fonte, use o sinal positivo no numerador da Eq. 17-47 para obter um aumento da frequência. Se o detector estiver se afastando da fonte, use o sinal negativo no numerador para obter uma diminuição da frequência. Se o detector estiver parado, substitua v_D por 0. Se a fonte estiver se movendo em direção ao detector, use o sinal negativo no denominador da Eq. 17-47 para obter um aumento da frequência. Se a fonte estiver se afastando, use o sinal positivo no denominador para obter uma diminuição da frequência. Se a fonte estiver parada, substitua v_F por 0.

Antes de demonstrar a Eq. 17-47 para o caso geral, vamos demonstrar as equações do efeito Doppler para as duas situações particulares apresentadas a seguir.

1. Quando o detector está se movendo em relação ao ar e a fonte está parada em relação ao ar, o movimento altera a frequência com a qual o detector intercepta as frentes de onda e, portanto, a frequência da onda sonora detectada.
2. Quando a fonte está se movendo em relação ao ar e o detector está parado em relação ao ar, o movimento altera o comprimento de onda da onda sonora e, portanto, a frequência detectada (lembre-se de que a frequência está relacionada ao comprimento de onda).

Detector em Movimento, Fonte Parada

Na Fig. 17-18, um detector D (representado por uma orelha) está se movendo com velocidade v_D em direção a uma fonte estacionária F que emite ondas esféricas, de comprimento de onda λ e frequência f, que se propagam com a velocidade v do som no ar. As frentes de onda estão desenhadas com uma separação de um comprimento de onda. A frequência detectada pelo detector D é a taxa com a qual D intercepta as frentes de onda (ou comprimentos de onda individuais). Se D estivesse parado, a taxa seria f, mas como D está se movendo em direção às frentes de onda, a taxa de interceptação é maior e, portanto, a frequência detectada f' é maior do que f.

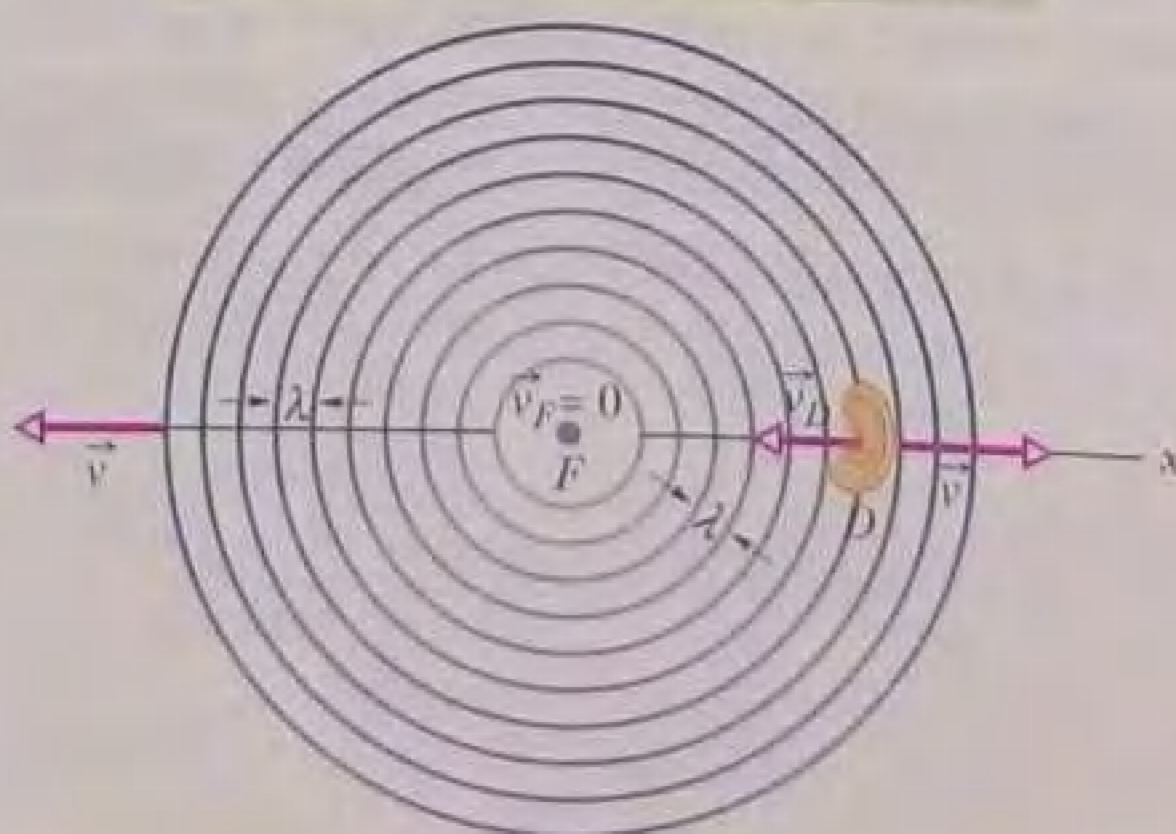


Figura 17-18 Uma fonte sonora estacionária F emite frentes de onda esféricas, mostradas com uma separação de um comprimento de onda, que se expandem radialmente com velocidade v. Um detector D, representado por uma orelha, se move com velocidade $\vec{v}_D$ em direção à fonte. O detector mede uma frequência maior por causa do movimento.

Vamos considerar primeiro a situação na qual D está parado (Fig. 17-19). No intervalo de tempo t, as frentes de onda percorrem uma distância vt para a direita. O número de comprimentos de onda nessa distância vt é o número de comprimentos de onda interceptados por D no intervalo t; esse número é vt/λ. A taxa com a qual D intercepta comprimentos de onda, que é a frequência f detectada por D, é

$$f = \frac{vt/\lambda}{t} = \frac{v}{\lambda}. \tag{17-48}$$

Nessa situação, com D parado, não existe efeito Doppler: a frequência detectada pelo detector D é a frequência emitida pela fonte F.

Vamos considerar a situação na qual D se move no sentido oposto ao do movimento das frentes de onda (Fig. 17-20). No intervalo de tempo t, as frentes de onda percorrem uma distância vt para a direita, como antes, mas agora D percorre uma distância $v_D t$ para a esquerda. Assim, nesse intervalo t, a distância percorrida pelas frentes de onda em relação a D é $vt + v_D t$. O número de frentes de onda nesta distância relativa $vt + v_D t$ é o número de comprimentos de onda interceptados por D no intervalo t e é dado por $(vt + v_D t)/\lambda$. A *taxa* com a qual D intercepta comprimentos de onda nessa situação é a frequência f', dada por

$$f' = \frac{(vt + v_D t)/\lambda}{t} = \frac{v + v_D}{\lambda}. \tag{17-49}$$

De acordo com a Eq. 17-48, $\lambda = v/f$. Assim, a Eq. 17-49 pode ser escrita na forma

$$f' = \frac{v + v_D}{v/f} = f\frac{v + v_D}{v}. \tag{17-50}$$

Observe que na Eq. 17-50, $f' > f$ a menos que $v_D = 0$ (ou seja, a menos que o detector esteja parado).

Podemos usar um raciocínio semelhante para calcular a frequência detectada por D quando D está se afastando da fonte. Nesse caso, as frentes de onda se movem uma distância $vt - v_D t$ em relação a D no intervalo t e f' é dada por

$$f' = f\frac{v - v_D}{v}. \tag{17-51}$$

Na Eq. 17-51, $f' < f$ a menos que $v_D = 0$. Podemos condensar as Eqs. 17-50 e 17-51 na equação

$$f' = f\frac{v \pm v_D}{v} \quad \text{(detector em movimento, fonte parada)}. \tag{17-52}$$

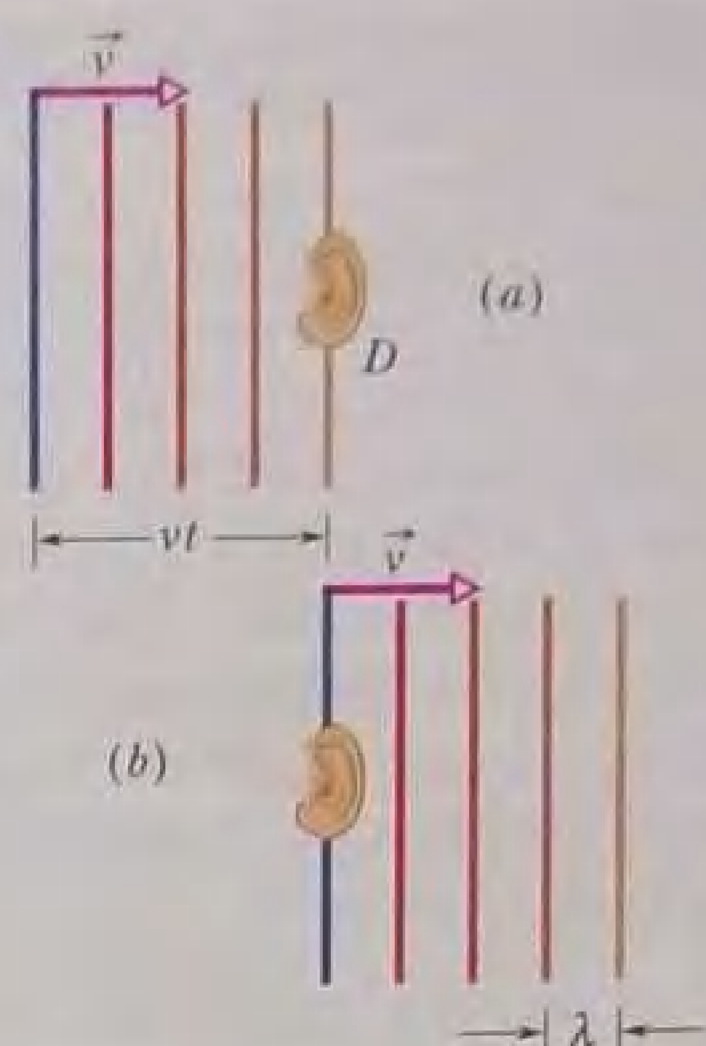


Figura 17-19 As frentes de onda da Fig. 17-18, supostas planas, (*a*) alcançam e (*b*) passam por um detector estacionário D; elas percorrem uma distância vt para a direita no intervalo de tempo t.

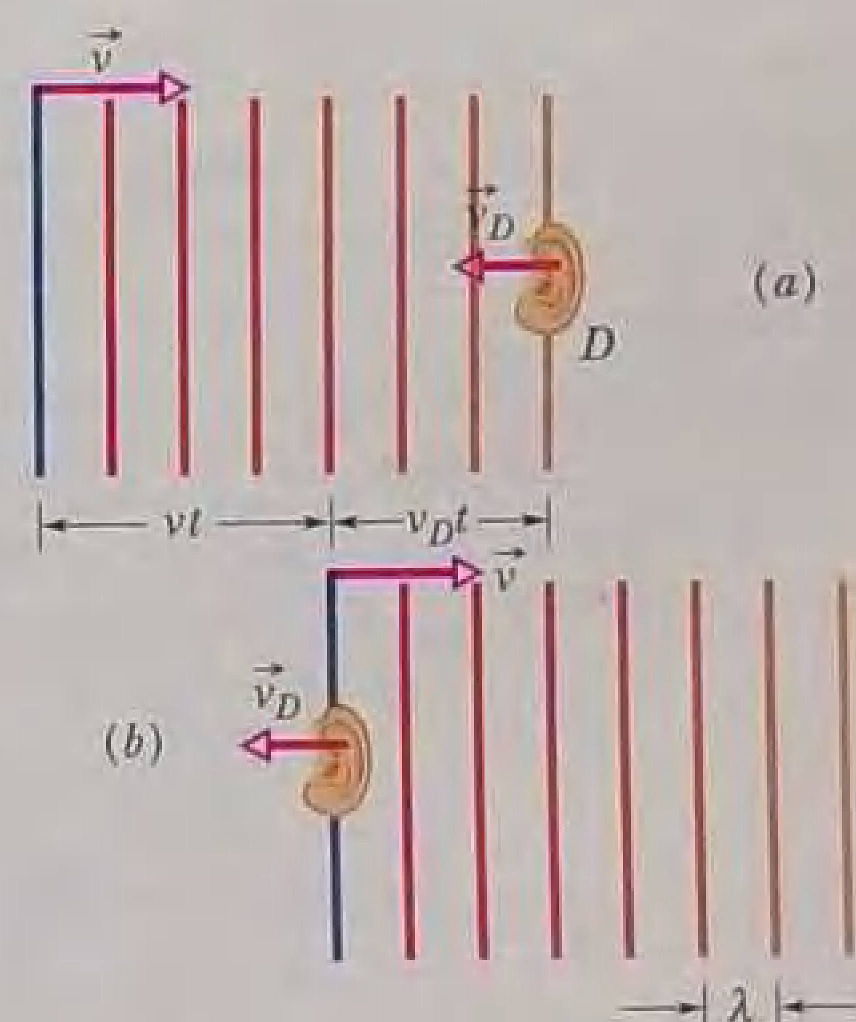


Figura 17-20 Frentes de onda que se deslocam para a direita (*a*) alcançam e (*b*) passam pelo detector D, que se move no sentido oposto. No intervalo de tempo t, as frentes de onda percorrem uma distância vt para a direita e D percorre uma distância $v_D t$ para a esquerda.

Fonte em Movimento, Detector Parado

Suponha que o detector D está parado em relação à massa de ar e a fonte F está se movendo em direção a D com velocidade v_F (Fig. 17-21). O movimento de F altera o comprimento de onda das ondas sonoras que a fonte emite e, portanto, a frequência detectada por D.

Para compreendermos por que isso acontece, vamos chamar de T $(= 1/f)$ o intervalo de tempo entre a emissão de duas frentes de onda sucessivas, O_1 e O_2. Durante o intervalo T, a frente de onda O_1 percorre uma distância vT e a fonte percorre uma distância $v_F T$. No fim do intervalo T, a frente de onda O_2 é emitida. No lado para onde F está se movendo, a distância entre O_1 e O_2, que é o comprimento de onda λ' das ondas que se propagam nessa direção, é $vT - v_F T$. Se D detecta essas ondas, detecta uma frequência f' dada por

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{vT - v_F T} = \frac{v}{v/f - v_F/f}$$

$$= f\frac{v}{v - v_F}. \tag{17-53}$$

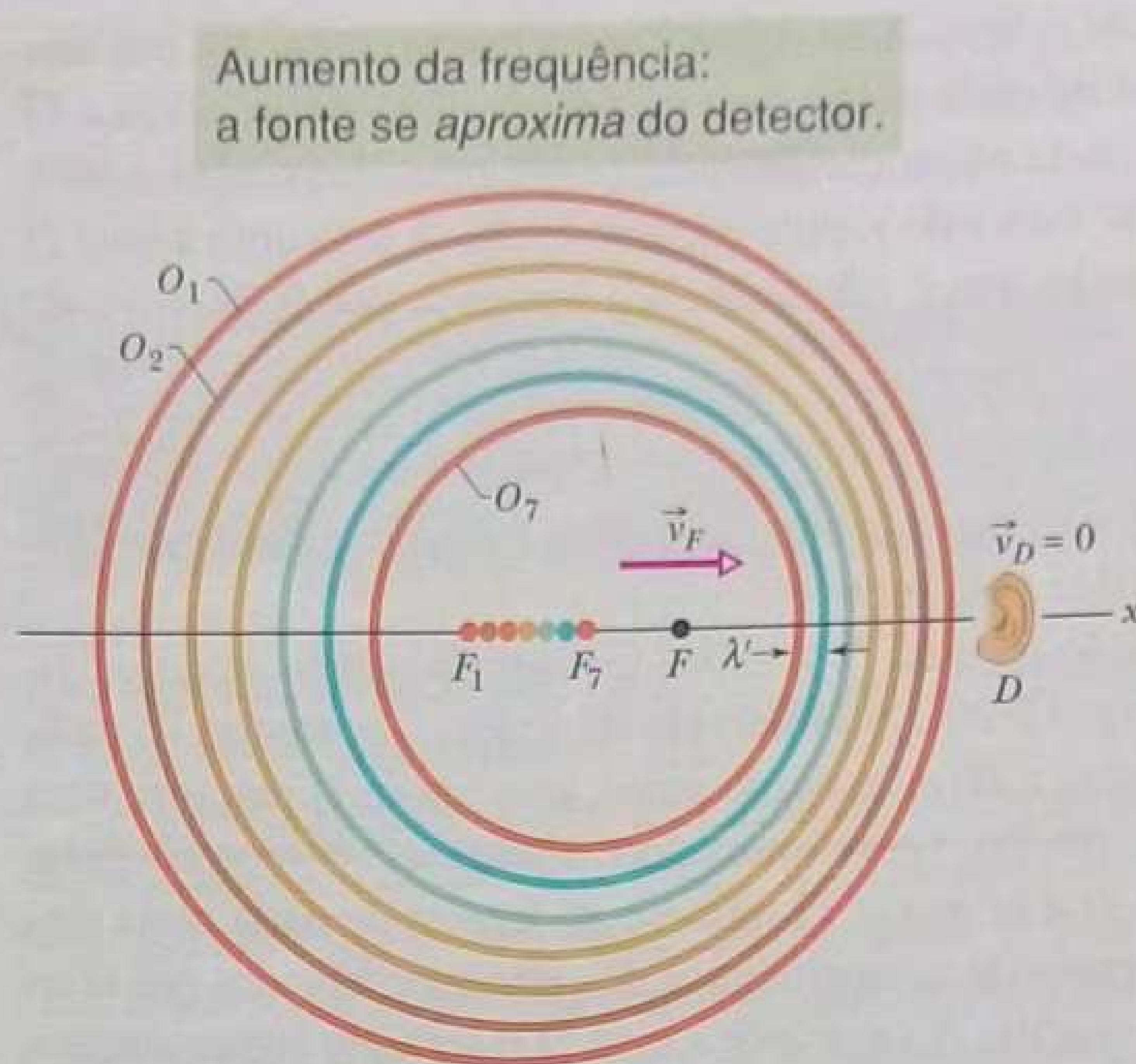


Figura 17-21 Um detector D está parado e uma fonte F se move em direção ao detector com velocidade v_F. A frente de onda O_1 foi emitida quando a fonte estava em F_1 e a frente de onda O_7 quando a fonte estava em F_7. No instante representado, a fonte está em F. O detector percebe uma frequência maior porque a fonte em movimento, perseguindo suas próprias frentes de onda, emite uma onda com um comprimento de onda reduzido λ' na direção do movimento.

Na Eq. 17-53, $f' > f$ a menos que $v_F = 0$.

No lado oposto, o comprimento de onda λ' das ondas é $vT + v_F T$. Se D detecta essas ondas, detecta uma frequência f' dada por

$$f' = f\frac{v}{v + v_F}. \tag{17-54}$$

Na Eq. 17-54, $f' < f$ a menos que $v_F = 0$.

Podemos condensar as Eqs. 17-53 e 17-54 na equação

$$f' = f\frac{v}{v \pm v_F} \quad \text{(fonte em movimento, detector parado).} \tag{17-55}$$

Equação Geral do Efeito Doppler

Podemos agora escrever a equação geral do efeito Doppler substituindo f na Eq. 17-55 (a frequência da fonte) por f' da Eq. 17-52 (a frequência associada ao movimento do detector). O resultado é a Eq. 17-47, a equação geral do efeito Doppler.

A equação geral pode ser usada não só quando o detector e a fonte estão se movendo, mas também nas duas situações particulares que acabamos de discutir. Na situação em que o detector está se movendo e a fonte está parada, fazendo $v_S = 0$ na Eq. 17-47, obtemos a Eq. 17-52, já demonstrada. Na situação em que a fonte está se movendo e o detector está parado, fazendo $v_D = 0$ na Eq. 17-47, obtemos a Eq. 17-55, já demonstrada. Assim, a Eq. 17-47 é a equação a ser lembrada.



TESTE 4

A figura mostra o sentido do movimento de uma fonte sonora e de um detector para seis situações, no ar estacionário. Para cada situação, a frequência detectada é maior que a frequência emitida, menor que a frequência emitida ou não é possível dar uma resposta sem conhecer as velocidades envolvidas?

	Fonte	Detector		Fonte	Detector
(a)	→	• Velocidade 0	(d)	←	←
(b)	←	• Velocidade 0	(e)	→	←
(c)	→	→	(f)	←	→

Exemplo

Efeito Doppler e os sons emitidos pelos morcegos

Os morcegos se orientam e localizam suas presas emitindo e detectando ondas ultrassônicas, que são ondas sonoras com frequências tão altas que não podem ser percebidas pelos ouvidos humanos. Suponha que um morcego emite ultrassons com uma frequência $f_{mor,e}$ = 82,52 kHz enquanto está voando com uma velocidade $\vec{v}_{mor} = (9{,}00\ \text{m/s})\hat{\text{i}}$ em perseguição a uma mariposa que voa com velocidade $\vec{v}_{mar} = (8{,}00\ \text{m/s})\hat{\text{i}}$. Qual é a frequência $f_{mar,d}$ detectada pela mariposa? Qual é a frequência $f_{mor,d}$ detectada pelo morcego ao receber o eco da mariposa?



IDEIAS-CHAVE

A frequência é alterada pelo movimento relativo do morcego e da mariposa. Como os dois estão se movendo no mesmo eixo, a variação de frequência é dada pela equação geral do efeito Doppler, Eq. 17-47. Um movimento de *aproximação* faz a frequência *aumentar* e um movimento de *afastamento* faz a frequência *diminuir*.

Detecção pela mariposa A equação geral do efeito Doppler é

$$f' = f\frac{v \pm v_D}{v \pm v_F}, \qquad (17\text{-}56)$$

em que a frequência detectada f' na qual estamos interessados é a frequência $f_{mar,d}$ detectada pela mariposa. Do lado direito da equação, a frequência emitida f é a frequência de emissão do morcego, $f_{mor,e}$ = 82,52 kHz, a velocidade do som é v = 343 m/s, a velocidade v_D do detector é a velocidade da mariposa, v_{mar} = 8,00 m/s, e a velocidade v_F da fonte é a velocidade do morcego, v_{mor} = 9,00 m/s.

Essas substituições na Eq. 17-56 são fáceis de fazer. Entretanto, é preciso tomar cuidado na escolha dos sinais. Uma boa estratégia é pensar em termos de *aproximação* e *afastamento*. Considere, por exemplo, a velocidade da mariposa (o detector) no numerador da Eq. 17-56. A mariposa está se movendo *para longe* do morcego, o que tende a diminuir a frequência detectada. Como a velocidade está no numerador, escolhemos o sinal negativo para respeitar a tendência (o numerador fica menor). Os passos desse raciocínio estão indicados na Tabela 17-3.

A velocidade do morcego aparece no denominador da Eq. 17-56. O morcego está se movendo *para perto* na mariposa, o que tende a aumentar a frequência detectada. Como a velocidade está no denominador, escolhemos o sinal negativo para respeitar essa tendência (o denominador fica menor).

Com essas substituições e escolhas, temos:

$$f_{mar,d} = f_{mor,e}\frac{v - v_{mar}}{v - v_{mor}}$$

$$= (82{,}52\ \text{kHz})\frac{343\ \text{m/s} - 8{,}00\ \text{m/s}}{343\ \text{m/s} - 9{,}00\ \text{m/s}}$$

$$= 82{,}767\ \text{kHz} \approx 82{,}8\ \text{kHz}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Detecção do eco pelo morcego Quando o morcego recebe o eco, a mariposa se comporta como fonte sonora, emitindo sons com a frequência $f_{mar,d}$ que acabamos de calcular. Assim, agora a mariposa é a fonte (que está se movendo *para longe* do detector) e o morcego é o detector (que está se movendo *para perto* da fonte). Os passos desse raciocínio estão indicados na Tabela 17-3. Para calcular a frequência $f_{mor,d}$ detectada pelo morcego, usamos a Eq. 17-56:

$$f_{mor,d} = f_{mar,d}\frac{v + v_{mor}}{v + v_{mar}}$$

$$= (82{,}767\ \text{kHz})\frac{343\ \text{m/s} + 9{,}00\ \text{m/s}}{343\ \text{m/s} + 8{,}00\ \text{m/s}}$$

$$= 83{,}00\ \text{kHz} \approx 83{,}0\ \text{kHz}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Algumas mariposas se defendem emitindo estalidos ultrassônicos que interferem com o sistema de detecção dos morcegos.

Tabela 17-3

Do Morcego para a Mariposa		Eco da Mariposa para o Morcego	
Detector	Fonte	Detector	Fonte
mariposa	morcego	morcego	mariposa
velocidade $v_D = v_{mar}$	velocidade $v_F = v_{mor}$	velocidade $v_D = v_{mor}$	velocidade $v_F = v_{mar}$
afastamento	aproximação	aproximação	afastamento
diminui	aumenta	aumenta	diminui
numerador	denominador	numerador	denominador
negativo	negativo	positivo	positivo

17-10 Velocidades Supersônicas, Ondas de Choque

De acordo com as Eqs. 17-47 e 17-55, se uma fonte está se movendo em direção um detector estacionário com uma velocidade igual à velocidade do som, ou seja, s $v_F = v$, a frequência detectada f' é infinita. Isso significa que a fonte está se moven do tão depressa que acompanha suas próprias frentes de onda, como mostra a Fig 17-22*a*. O que acontece se a velocidade da fonte é *maior* que a velocidade do som?

Nessas velocidades *supersônicas*, as Eqs. 17-47 e 17-55 não são mais válidas. A Fig. 17-22*b* mostra as frentes de onda produzidas em várias posições da fonte. O raio de qualquer frente de onda dessa figura é vt, onde v é a velocidade do som e t é o tempo transcorrido depois que a fonte emitiu a frente de onda. Observe que as frentes de onda se combinam em uma envoltória em forma de V no desenho bidimensional da Fig. 17-22*b*. As frentes de onda na verdade se propagam em três dimensões e se combinam em uma envoltória em forma de cone chamada de *cone de Mach*. Dizemos que existe uma *onda de choque* na superfície desse cone porque a superposição das frentes de onda causa uma elevação e uma queda abrupta da pressão do ar quando a superfície passa por um ponto qualquer. De acordo com a Fig. 17-22*b*, o semiângulo θ do cone, chamado de *ângulo do cone de Mach*, é dado por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{vt}{v_F t} = \frac{v}{v_F} \qquad \text{(ângulo de cone de Mach).} \qquad (17\text{-}57)$$

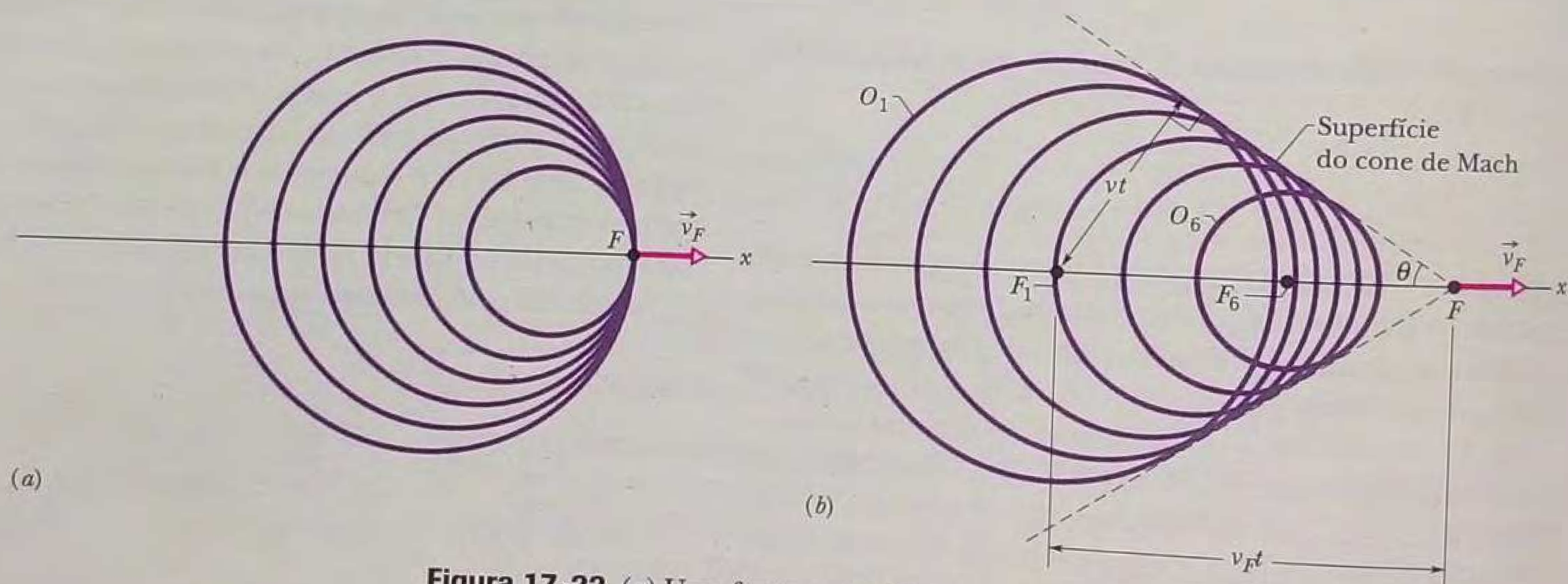


Figura 17-22 (*a*) Uma fonte sonora F se move com uma velocidade v_F igual à velocidade do som e, portanto, com a mesma velocidade que as frentes de onda que produz. (*b*) Uma fonte F se move com uma velocidade v_F maior que a velocidade do som, e portanto, mais depressa que as frentes de onda. Quando a fonte estava na posição F_1, produziu a frente de onda O_1; quando estava na posição F_6, produziu a frente de onda O_6. Todas as frentes de ondas esféricas se expandem com a velocidade do som v e se superpõem na superfície de um cone conhecido como cone de Mach, formando uma onda de choque. A superfície do cone possui um semiângulo θ e é tangente a todas as frentes de onda.



Figura 17-23 Ondas de choque produzidas pelas asas de um jato FA 18 da Marinha dos Estados Unidos. As ondas de choque são visíveis porque a redução brusca da pressão do ar fez com que moléculas de vapor d'água se condensassem, formando uma nuvem. *(Foto do guarda-marinha John Gay para a Marinha dos Estados Unidos)*

A razão v_F/v é chamada de *número de Mach*. Quando você ouve dizer que um avião voou a Mach 2,3, isso significa que a velocidade do avião era 2,3 vezes maior que a velocidade do som no ar que o avião estava atravessando. A onda de choque gerada por um avião ou projétil supersônico (Fig. 17-23) produz um som semelhante ao de uma explosão, conhecido como *estrondo sônico*, no qual a pressão do ar aumenta bruscamente e depois diminui para valores menores que o normal antes de voltar ao normal. Parte do som associado ao disparo de um rifle se deve ao estrondo sônico produzido pela bala. Um estrondo sônico também pode ser produzido agitando rapidamente um chicote comprido. Perto do fim do movimento, a ponta está se movendo mais depressa que o som e produz um pequeno estrondo sônico: o *estalo* do chicote.



REVISÃO E RESUMO

Ondas Sonoras Ondas sonoras são ondas mecânicas longitudinais que podem se propagar em sólidos, líquidos e gases. A velocidade v de uma onda sonora em um meio de **módulo de elasticidade volumétrico** B e massa específica ρ é

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad \text{(velocidade do som)}. \tag{17-3}$$

No ar a 20°C, a velocidade do som é 343 m/s.

Uma onda sonora provoca um deslocamento longitudinal s de um elemento de massa em um meio que é dado por

$$s = s_m \cos(kx - \omega t), \tag{17-12}$$

em que s_m é a **amplitude do deslocamento** (deslocamento máximo) em relação ao equilíbrio, $k = 2\pi/\lambda$ e $\omega = 2\pi f$, onde λ e f são, respectivamente, o comprimento de onda e a frequência da onda sonora. A onda sonora também provoca uma variação Δp da pressão do meio em relação à pressão de equilíbrio:

$$\Delta p = \Delta p_m \,\text{sen}(kx - \omega t), \tag{17-13}$$

em que a **amplitude da pressão** é

$$\Delta p_m = (v\rho\omega)s_m. \tag{17-14}$$

Interferência A interferência de duas ondas sonoras de mesmo comprimento de onda que passam pelo mesmo ponto depende da diferença de fase ϕ entre as ondas nesse ponto. Se as ondas sonoras foram emitidas em fase e se propagam aproximadamente na mesma direção, ϕ é dada por

$$\phi = \frac{\Delta L}{\lambda} 2\pi, \tag{17-21}$$

em que ΔL é a **diferença de percurso** (diferença entre as distâncias percorridas pelas ondas para chegar ao ponto comum). A interferência totalmente construtiva acontece quando ϕ é um múltiplo inteiro de 2π,

$$\phi = m(2\pi), \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{17-22}$$

ou seja, quando a razão entre ΔL e o comprimento de onda λ é dada por

$$\frac{\Delta L}{\lambda} = 0, 1, 2, \ldots. \tag{17-23}$$

A interferência totalmente destrutiva acontece quando ϕ é um múltiplo ímpar de π,

$$\phi = (2m + 1)\pi, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{17-24}$$

ou seja, quando a razão entre ΔL e o comprimento de onda λ é dada por

$$\frac{\Delta L}{\lambda} = 0.5, 1.5, 2.5, \ldots. \tag{17-25}$$

Intensidade Sonora A **intensidade** I de uma onda sonora em uma superfície é a taxa média por unidade de área com a qual a energia contida na onda atravessa a superfície ou é absorvida pela superfície:

$$I = \frac{P}{A}, \tag{17-26}$$

em que P é a taxa de transferência de energia (ou seja, a potência) da onda sonora e A é a área da superfície que intercepta o som. A intensidade I está relacionada à amplitude s_m do deslocamento da onda sonora através da equação

$$I = \tfrac{1}{2}\rho v\omega^2 s_m^2. \tag{17-27}$$

A intensidade a uma distância r de uma fonte pontual que emite ondas sonoras de potência P_s é

$$I = \frac{P_s}{4\pi r^2}. \tag{17-28}$$

Nível Sonoro em Decibéis O *nível sonoro* β em *decibéis* (dB) é definido como

$$\beta = (10\text{ dB}) \log \frac{I}{I_0}, \tag{17-29}$$

em que I_0 (= 10^{-12} W/m²) é um nível de intensidade de referência com o qual todas as intensidades são comparadas. Para cada aumento de um fator de 10 na intensidade, 10 dB são somados ao nível sonoro.

Ondas Estacionárias em Tubos Ondas sonoras estacionárias podem ser produzidas em tubos. No caso de um tubo aberto nas duas extremidades, as frequências de ressonância são dadas por

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{17-39}$$

em que v é a velocidade do som no ar do interior do tubo. No caso de um tubo fechado em uma das extremidades e aberto na outra, as frequências de ressonância são dadas por

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{4L}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots. \tag{17-41}$$

Batimentos Os *batimentos* acontecem quando duas ondas de frequências ligeiramente diferentes, f_1 e f_2, são detectadas simultaneamente. A frequência de batimento é dada por

$$f_{bat} = f_1 - f_2. \quad (17\text{-}46)$$

O Efeito Doppler O *efeito Doppler* é a mudança da frequência observada de uma onda quando a fonte ou o detector está se movendo em relação ao meio onde a onda está se propagando (como, por exemplo, o ar). No caso do som, a frequência observada f' está relacionada à frequência f da fonte através da equação

$$f' = f\frac{v \pm v_D}{v \pm v_F} \quad \text{(equação geral do efeito Doppler)}, \quad (17\text{-}47)$$

em que v_D é a velocidade do detector em relação ao meio, v_F é a velocidade da fonte e v é a velocidade do som no meio. Os sinais são escolhidos para que f' tenda a ser *maior* para os movimentos de *aproximação* e *menor* para os movimentos de *afastamento*.

Ondas de Choque Se a velocidade de uma fonte em relação ao meio é maior que a velocidade do som no meio, a equação para o efeito Doppler deixa de ser válida. Nesse caso, surgem ondas de choque. O semiângulo θ do cone de Mach é dado por

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{v}{v_F} \quad \text{(ângulo do cone de Mach)}. \quad (17\text{-}57)$$

PERGUNTAS

1 Em um primeiro experimento, uma onda sonora senoidal é produzida em um tubo longo de ar, transportando energia a uma taxa média $P_{méd,1}$. Em um segundo experimento, duas ondas sonoras iguais à primeira são produzidas simultaneamente no tubo com uma diferença de fase ϕ de 0; 0,2 ou 0,5 comprimento de onda. (a) Sem fazer cálculos no papel, ordene esses valores de ϕ de acordo com a taxa média com a qual as ondas transportam energia, em ordem decrescente. (b) Qual é a taxa média em termos de $P_{méd,1}$ para o primeiro valor de ϕ?

2 Na Fig. 17-24, duas fontes pontuais F_1 e F_2, que estão em fase, emitem ondas sonoras iguais de comprimento de onda 2,0 m. Em termos de comprimentos de onda, qual é a diferença de fase entre as ondas que chegam ao ponto P se (a) $L_1 = 38$ m e $L_2 = 34$ m, (b) $L_1 = 39$ m e $L_2 = 36$ m? (c) Supondo que a distância entre as fontes é muito menor que L_1 e L_2, que tipo de interferência ocorre no ponto P nas situações (a) e (b)?

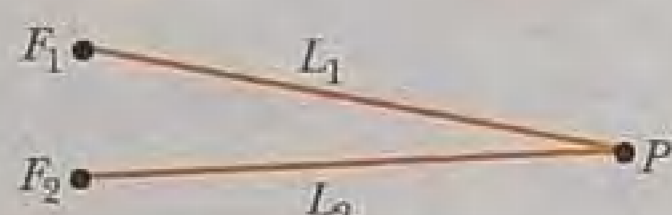


Figura 17-24 Pergunta 2.

3 Na Fig. 17-25, três tubos longos (A, B e C) estão cheios de gases submetidos a pressões diferentes. A razão entre o módulo de elasticidade volumétrico e a massa específica está indicada para cada gás em termos de um valor de referência B_0/ρ_0. Cada tubo possui um êmbolo na extremidade esquerda que pode produzir um pulso no tubo (como na Fig. 16-2). Os três pulsos são produzidos simultaneamente. Ordene os tubos de acordo com o tempo de chegada dos pulsos na extremidade direita aberta dos tubos, em ordem crescente.

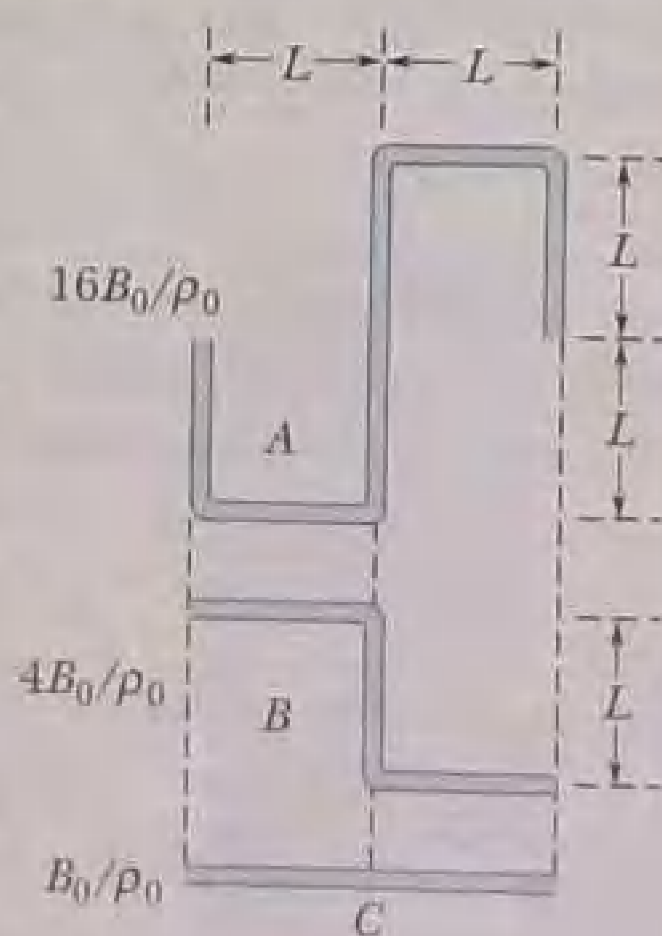


Figura 17-25 Pergunta 3.

4 O sexto harmônico é gerado em um tubo. (a) Quantas extremidades abertas o tubo possui (o tubo deve possuir pelo menos uma)? (b) No ponto médio do tubo existe um nó, um antinó ou um estado intermediário?

5 Na Fig. 17-26, o tubo A é colocado para oscilar no terceiro harmônico por uma pequena fonte sonora interna. O som emitido na extremidade direita faz ressoar quatro tubos próximos, cada um com apenas uma extremidade aberta (os tubos *não estão* desenhados em escala). O tubo B oscila no modo fundamental, o tubo C no segundo harmônico, o tubo D no terceiro harmônico e o tubo E no quarto harmônico. Sem executar cálculos, ordene os cinco tubos de acordo com seus comprimentos, em ordem decrescente. (*Sugestão:* desenhe as ondas estacionárias em escala e, em seguida, desenhe os tubos em escala.)

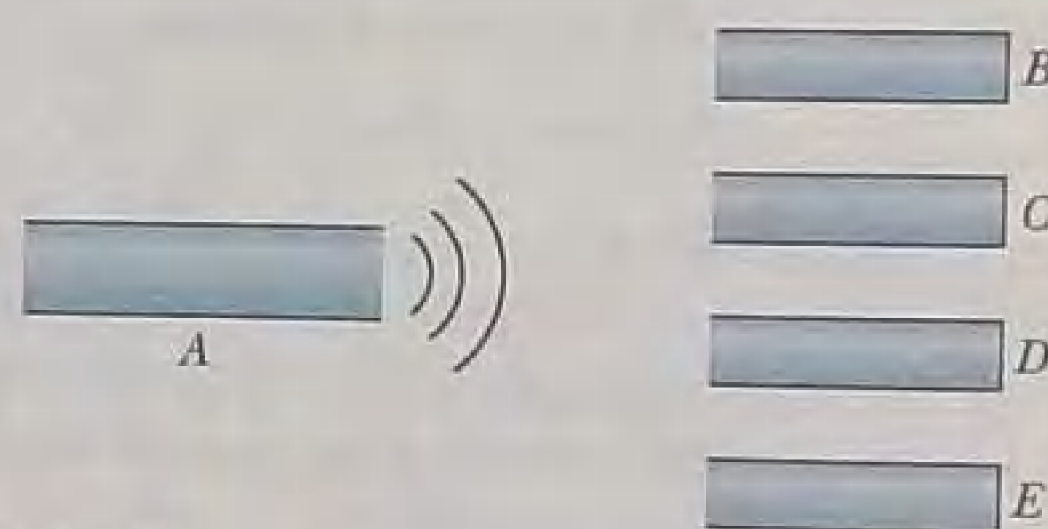


Figura 17-26 Pergunta 5.

6 O tubo A tem comprimento L e uma extremidade aberta. O tubo B tem comprimento $2L$ e as duas extremidades abertas. Quais harmônicos do tubo B têm frequências iguais às frequências de ressonância do tubo A?

7 A Fig. 17-27 mostra uma fonte S em movimento que emite sons com uma certa frequência e quatro detectores de som estacionários. Ordene os detectores de acordo com a frequência do som que detectam, da maior para a menor.



Figura 17-27 Pergunta 7.

8 Uma pessoa fica na borda de três carrosséis, um de cada vez, segurando uma fonte que emite isotropicamente sons de uma certa frequência. A frequência que outra pessoa ouve a uma certa distância dos carrosséis varia com o tempo por causa da rotação dos carrosséis. A variação da frequência para os três carrosséis está plotada em função do tempo da Fig. 17-28. Ordene as curvas de acordo (a) com a velocidade linear v da fonte sonora, (b) com a velocidade angular ω do carrossel e (c) com o raio r do carrossel, em ordem decrescente.

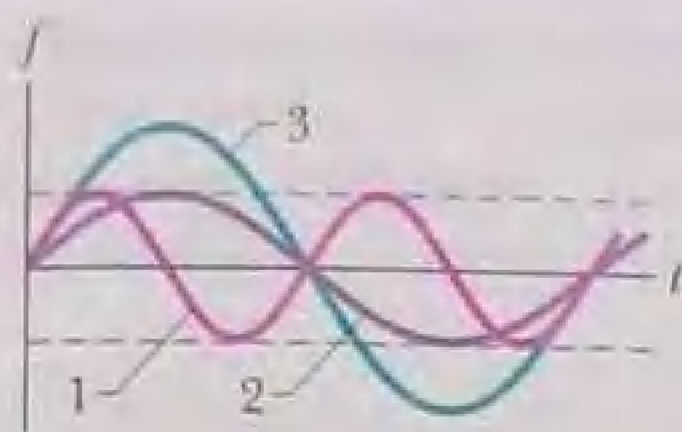


Figura 17-28 Pergunta 8.

9 Quatro das seis frequências dos harmônicos abaixo de 1000 Hz de um certo tubo são 300, 600, 750 e 900 Hz. Quais são as duas frequências que estão faltando na lista?

10 A Fig. 17-29 mostra uma corda esticada de comprimento L e tubos a, b, c e d de comprimentos L, $2L$, $L/2$ e $L/2$, respectivamente. A tensão da corda é ajustada até que a velocidade das ondas na corda seja igual à velocidade do som no ar; em seguida, o modo fundamental de oscilação é produzido na corda. Em que tubo o som gerado pela corda produz ressonância e qual é o modo de oscilação correspondente?

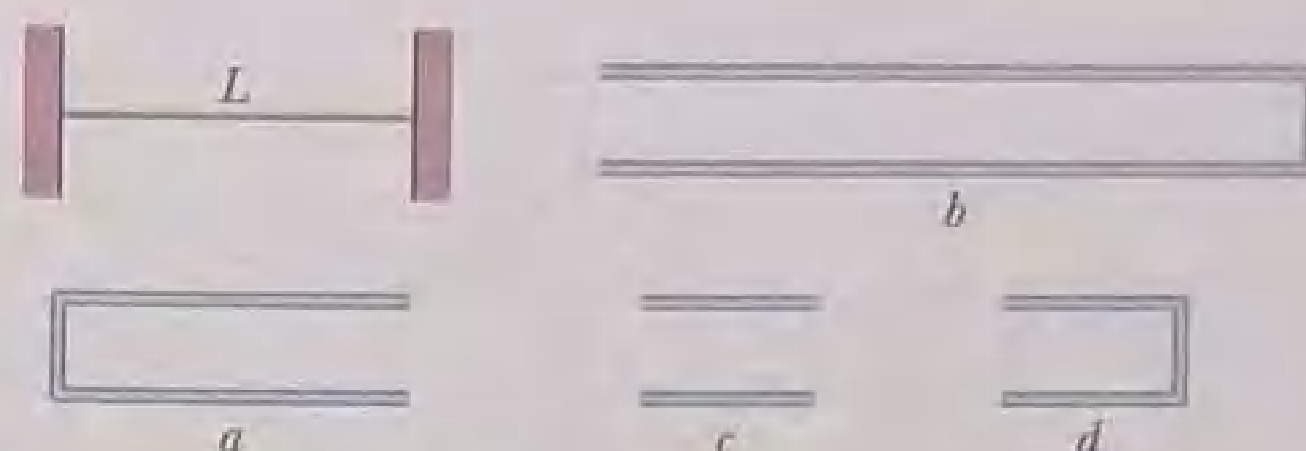


Figura 17-29 Pergunta 10.

PROBLEMAS

•–••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Use os seguintes valores nos problemas, a menos que sejam fornecidos outros valores:

velocidade do som no ar: 343 m/s

massa específica do ar: 1,21 kg/m^3

Seção 17-3 A Velocidade do Som

•1 Dois espectadores de uma partida de futebol no estádio de Montjuïc veem e depois ouvem uma bola ser chutada no campo. O tempo de retardo para o espectador A é 0,23 s e para o espectador B é 0,12 s. As linhas de visada dos dois espectadores até o jogador que chutou a bola fazem um ângulo de 90°. A que distância do jogador está (a) o espectador A e (b) o espectador B? (c) Qual é a distância entre os dois espectadores?

•2 Qual é o modulo de elasticidade volumétrico do oxigênio se 32 g de oxigênio ocupam 22,4 L e a velocidade do som no oxigênio é 317 m/s?

•3 Quando a porta da Capela do Mausoléu, em Hamilton, Escócia, é fechada, o último eco ouvido por uma pessoa que está atrás da porta, no interior da capela, ocorre 15 s depois. (a) Se esse eco se devesse a uma única reflexão em uma parede em frente à porta, a que distância da porta estaria essa parede? (b) Como a parede, na verdade, está a 25,7 m de distância, a quantas reflexões (para a frente e para trás) corresponde o último eco?

•4 Uma coluna de soldados, marchando a 120 passos por minuto, segue o ritmo da batida de um tambor que é tocado na frente da coluna. Observa-se que os últimos soldados da coluna estão levantando o pé esquerdo quando os primeiros soldados estão levantando o pé direito. Qual é o comprimento aproximado da coluna?

••5 Os terremotos geram ondas sonoras no interior da Terra. Ao contrário de um gás, a Terra pode transmitir tanto ondas transversais (S) como ondas longitudinais (P). A velocidade das ondas S é da ordem de 4,5 km/s e a das ondas P é da ordem de 8,0 km/s. Um sismógrafo registra as ondas P e S de um terremoto. As primeiras ondas P chegam 3,0 min antes das primeiras ondas S. Se as ondas se propagaram em linha reta, a que distância ocorreu o terremoto?

••6 Um homem bate com um martelo na ponta de um barra delgada. A velocidade do som na barra é 15 vezes maior que a velocidade do som no ar. Uma mulher na outra extremidade, com o ouvido próximo da barra, escuta o som da pancada duas vezes, com um intervalo de 0,12 s; um som vem da barra e outro vem do ar em torno da barra. Se a velocidade do som no ar é 343 m/s, qual é o comprimento da barra?

••7 Uma pedra é deixada cair em um poço. O som produzido pela pedra ao se chocar com a água é ouvido 3,00 s depois. Qual é a profundidade do poço?

••8 *O efeito chocolate quente.* Bata com uma colher na parte interna de uma xícara com água quente e preste atenção na frequência f_i do som. Acrescente uma colher de sopa de chocolate em pó ou café solúvel e repita o experimento enquanto mexe o líquido. A princípio, a nova frequência, f_s, é menor, porque pequenas bolhas de ar liberadas pelo pó diminuem o valor do módulo de elasticidade volumétrico da água. Quando as bolhas chegam à superfície da água e desaparecem, a frequência volta ao valor original. Enquanto o efeito dura, as bolhas não modificam apreciavelmente a massa específica nem o volume do líquido; limitam-se a alterar o valor de dV/dp, ou seja, a taxa de variação do volume do líquido causada pela variação de pressão associada às ondas sonoras. Se $f_s/f_i = 0,333$, qual é o valor da razão $(dV/dp)_s/(dV/dp)_i$?

Seção 17-4 Ondas Sonoras Progressivas

•9 Se a forma de uma onda sonora que se propaga no ar é

$$s(x, t) = (6{,}0 \text{ nm}) \cos(kx + (3000 \text{ rad/s})t + \phi),$$

quanto tempo uma molécula de ar no caminho da onda leva para se mover entre os deslocamentos $s = +2{,}0$ nm e $s = -2{,}0$ nm?

•10 *Ilusão causada pela água.* Uma das informações usadas pelo cérebro humano para determinar a localização de uma fonte sonora é a diferença Δt entre o instante em que um som é detectado pelo ouvido mais próximo da fonte e o instante em que é detectado pelo outro ouvido. Suponha que a fonte está suficientemente distante para que as frentes de onda sejam praticamente planas e seja D a distância entre os ouvidos. (a) Se a direção da fonte faz um ângulo θ com uma perpendicular ao plano do rosto (Fig. 17-30), qual é o valor de Δt em termos de D e da velocidade v do som no ar? (b) Se uma pessoa está debaixo d'água e a fonte está exatamente à direita, qual é o valor de Δt em termos de D e da velocidade v_a

do som na água? (c) Com base na diferença Δt, o cérebro calcula erroneamente que a direção da fonte faz um ângulo $\theta \neq 90°$ com uma perpendicular ao plano do rosto. Determine o valor de θ para água doce a 20°C.

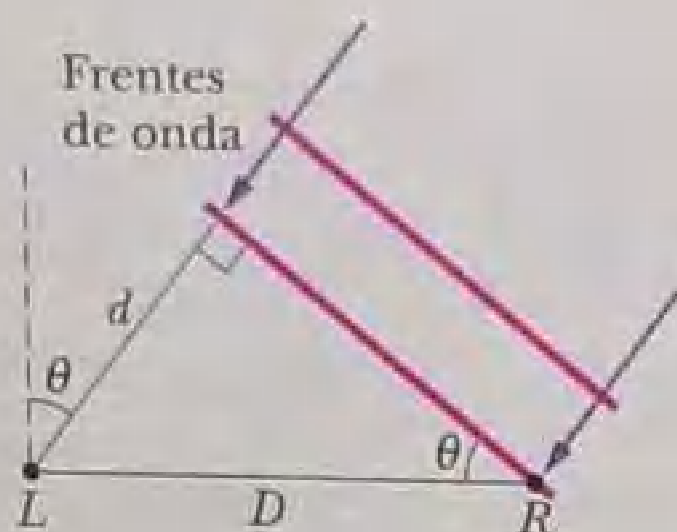


Figura 17-30 Problema 10.

•**11** Um aparelho de ultrassom, com uma frequência de 4,50 MHz, é usado para examinar tumores em tecidos moles. (a) Qual é o comprimento de onda no ar das ondas sonoras produzidas pelo aparelho? (b) Se a velocidade do som no corpo do paciente é 1500 m/s, qual é o comprimento de onda das ondas produzidas pelo aparelho no corpo do paciente?

•**12** A pressão de uma onda sonora progressiva é dada pela equação

$$\Delta p = (1{,}50 \text{ Pa}) \operatorname{sen} \pi[(0{,}900 \text{ m}^{-1})x - (315 \text{ s}^{-1})t].$$

Determine (a) a amplitude, (b) a frequência, (c) o comprimento de onda e (d) a velocidade da onda.

••**13** Uma onda sonora da forma $s = s_m \cos(kx - \omega t + \phi)$ se propaga a 343 m/s no ar em um tubo horizontal longo. Em um certo instante, a molécula A do ar, situada no ponto $x = 2{,}000$ m está com o deslocamento máximo positivo de 6,00 nm e a molécula B, situada em $x = 2{,}070$ m, está com um deslocamento positivo de 2,00 nm. Todas as moléculas entre A e B estão com deslocamentos intermediários. Qual é a frequência da onda?

••**14** A Fig. 17-31 mostra a leitura de um monitor de pressão montado em um ponto da trajetória de uma onda sonora de uma só frequência, propagando-se a 343 m/s em um ar de massa específica homogênea 1,21 kg/m³. A escala do eixo vertical é definida por $\Delta p_s = 4{,}0$ mPa. Se a função *deslocamento* da onda é $s(x, t) = s_m \cos(kx - \omega t)$, determine (a) s_m, (b) k e (c) ω. Quando o ar é resfriado, a massa específica aumenta para 1,35 kg/m³ e a velocidade da onda sonora diminui para 320 m/s. A fonte emite uma onda com a mesma frequência e a mesma pressão que antes. Qual é o novo valor (d) de s_m, (e) de k e (f) de ω?

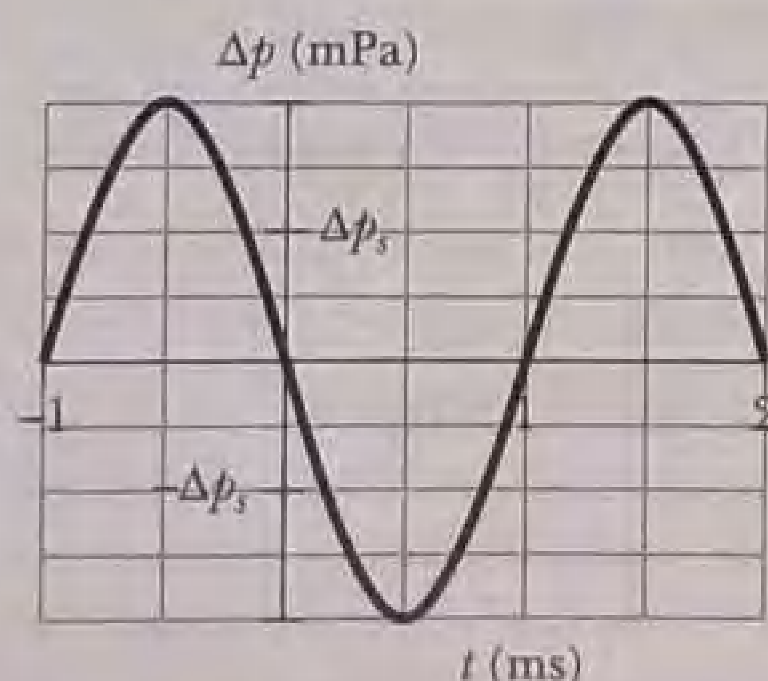


Figura 17-31 Problema 14.

••**15** O som de bater de palmas em um anfiteatro produz ondas que são espalhadas por degraus de largura $w = 0{,}75$ m (Fig. 17-32). O som retorna ao palco como uma série regular de pulsos, que soa como uma nota musical. (a) Supondo que todos os raios na Fig. 17-32 são horizontais, determine a frequência com a qual os pulsos chegam ao palco (ou seja, a frequência da nota ouvida por alguém que se encontra no palco). (b) Se a largura w dos degraus fosse menor, a frequência seria maior ou menor?

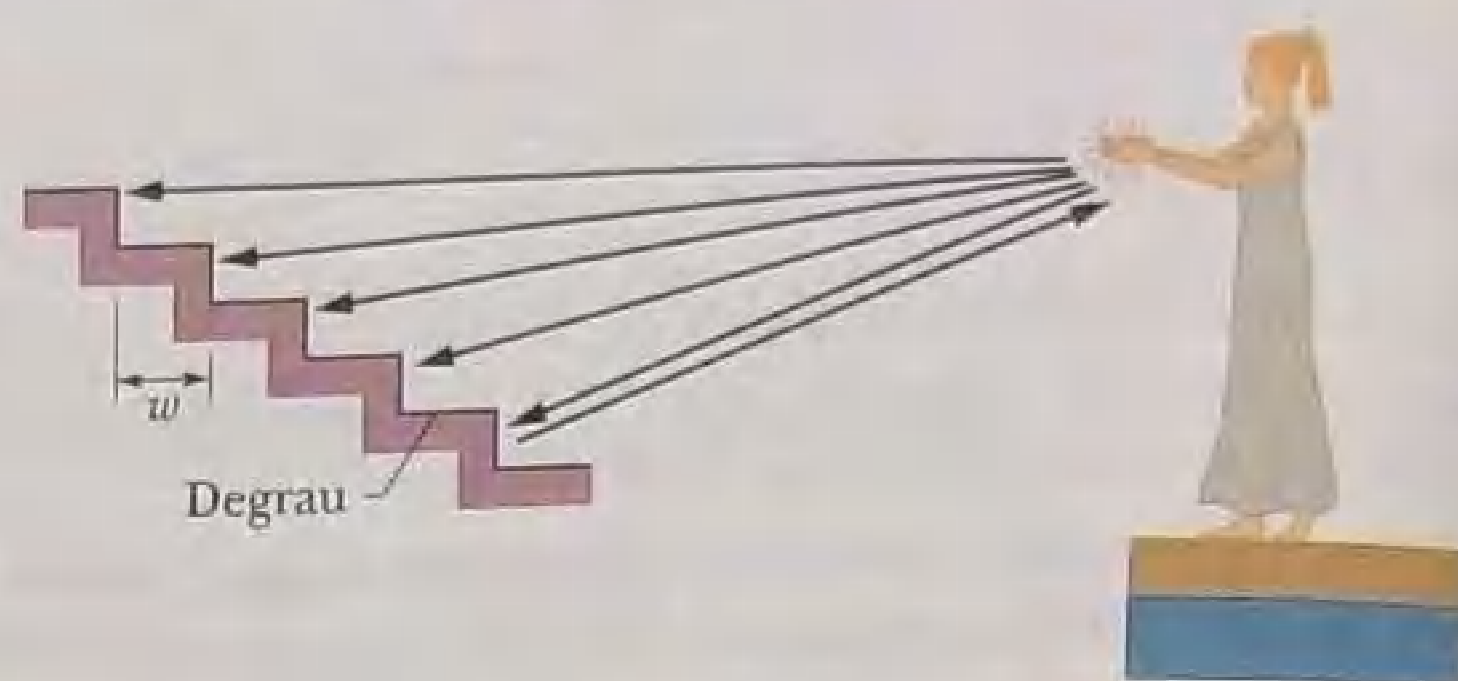


Figura 17-32 Problema 15.

Seção 17-5 Interferência

•**16** Duas ondas sonoras, produzidas por duas fontes diferentes de mesma frequência, 540 Hz, se propagam na mesma direção e no mesmo sentido a 330 m/s. As fontes estão em fase. Qual é a diferença de fase das ondas em um ponto que está a 4,40 m de uma fonte e a 4,00 m da outra?

••**17** Dois alto-falantes estão separados por uma distância de 3,35 m em um palco ao ar livre. Um ouvinte está a 18,3 m de um dos alto-falantes e a 19,5 m do outro. Durante o teste do som, um gerador de sinais alimenta os dois alto-falantes em fase com um sinal de mesma amplitude e frequência. A frequência transmitida varia ao longo de toda a faixa audível (20 Hz a 20 kHz). (a) Qual é menor frequência, $f_{mín,1}$, para a qual a intensidade do sinal é mínima (interferência destrutiva) na posição do ouvinte? Por que número $f_{mín,1}$ deve ser multiplicada para se obter (b) a segunda menor frequência, $f_{mín,2}$, para a qual o sinal é mínimo e (c) a terceira menor frequência, $f_{mín,3}$, para a qual o sinal é mínimo? (d) Qual é a menor frequência, $f_{máx,1}$, para a qual o sinal é máximo (interferência construtiva) na posição do ouvinte? Por que número $f_{máx,1}$ deve ser multiplicada para se obter (e) a segunda menor frequência, $f_{máx,2}$ para a qual o sinal é máximo e (f) a terceira menor frequência, $f_{máx,3}$ para a qual o sinal é máximo?

••**18** Na Fig. 17-33, as ondas sonoras A e B, de mesmo comprimento de onda λ, estão inicialmente em fase e se propagam para a direita, como indicam os dois raios. A onda A é refletida por quatro superfícies, mas volta a se propagar na direção e no sentido original. O mesmo acontece com a onda B, mas depois de ser refletida por apenas duas superfícies. Suponha que a distância L da figura é um múltiplo do comprimento de onda λ: $L = q\lambda$. Qual é (a) o menor e (b) o segundo menor valor de q para o qual A e B estão em oposição de fase após as reflexões?

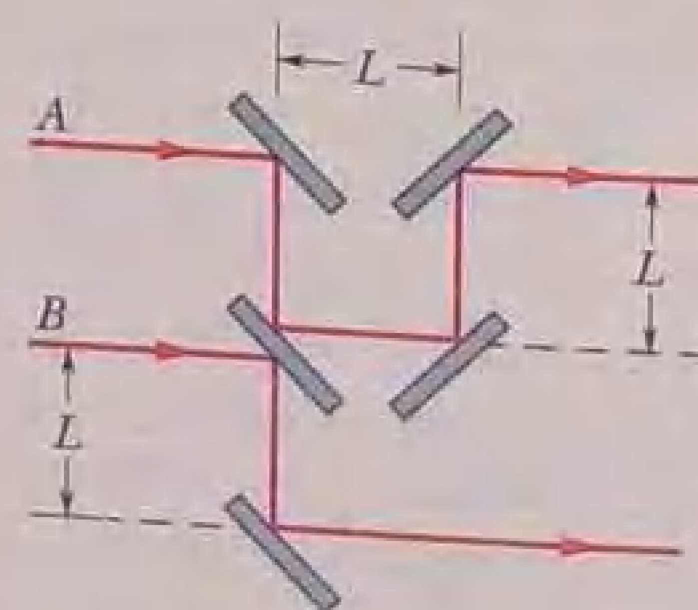


Figura 17-33 Problema 18.

••**19** A Fig. 17-34 mostra duas fontes sonoras pontuais isotrópicas, F_1 e F_2. As fontes, que emitem ondas em fase, de comprimento de

onda λ = 0,50 m, estão separadas por uma distância D = 1,75 m. Se um detector é deslocado ao longo de uma grande circunferência cujo raio é o ponto médio entre as fontes, em quantos pontos as ondas chegam ao detector (a) exatamente em fase e (b) com fases opostas?



Figura 17-34 Problemas 19 e 105.

••20 A Fig. 17-35 mostra quatro fontes sonoras pontuais isotrópicas uniformemente espaçadas ao longo de um eixo x. As fontes emitem sons de mesmo comprimento de onda λ e mesma amplitude s_m e estão em fase. Um ponto P é mostrado sobre o eixo x. Suponha que, quando as ondas se propagam até P, a amplitude se mantém praticamente constante. Que múltiplo de s_m corresponde à amplitude da onda resultante em P se a distância d mostrada na figura é (a) $\lambda/4$, (b) $\lambda/2$ e (c) λ?



Figura 17-35 Problema 20.

••21 Na Fig. 17-36, dois alto-falantes separados por uma distância d_1 = 2,00 m estão em fase. Suponha que as amplitudes das ondas sonoras emitidas pelos alto-falantes são aproximadamente iguais para um ouvinte que se encontra diretamente à frente do alto-falante da direita, a uma distância d_2 = 3,75 m. Considere toda a faixa de audição de um ser humano normal, 20 Hz a 20 kHz. (a) Qual é a menor frequência, $f_{mín,1}$, para a qual a intensidade do som é mínima (interferência destrutiva) na posição do ouvinte? Por que número a frequência $f_{mín,1}$ deve ser multiplicada para se obter (b) a segunda menor frequência, $f_{mín,2}$, para a qual a intensidade do som é mínima e (c) a terceira menor frequência, $f_{mín,3}$, para a qual a intensidade do som é mínima? (d) Qual é a menor frequência, $f_{máx,1}$, para a qual a intensidade do som é máxima (interferência construtiva) na posição do ouvinte? Por que número $f_{máx,1}$ deve ser multiplicada para se obter (e) a segunda menor frequência, $f_{máx,2}$, para a qual a intensidade do som é máxima e (f) a terceira menor frequência, $f_{máx,3}$, para a qual a intensidade do som é máxima?

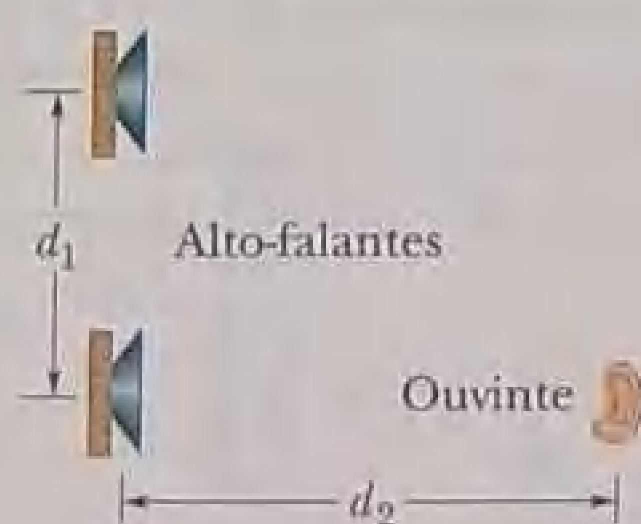


Figura 17-36 Problema 21.

••22 Na Fig. 17-37, um som com um comprimento de onda de 40,0 cm se propaga para a direita através de um tubo que possui uma bifurcação. Ao chegar à bifurcação, a onda se divide em duas partes. Uma parte se propaga em um tubo em forma de semicircunferência e a outra se propaga em um tubo retilíneo. As duas ondas se combinam mais adiante, interferindo mutuamente antes de chegarem a um detector. Qual é o menor raio r da semicircunferência para o qual a intensidade medida pelo detector é mínima?



Figura 17-37 Problema 22.

•••23 A Fig. 17-38 mostra duas fontes pontuais F_1 e F_2 que emitem sons de comprimento de onda λ = 2,00 m. As emissões são isotrópicas e em fase; a distância entre as fontes é d = 16,0 m. Em qualquer ponto P sobre o eixo x, as ondas produzidas por F_1 e F_2 interferem. Se P está muito distante ($x \approx \infty$), qual é (a) a diferença de fase entre as ondas produzidas por F_1 e F_2 e (b) o tipo de interferência que as ondas produzem? Suponha que o ponto P é deslocado ao longo do eixo x em direção a F_1. (c) A diferença de fase entre as ondas aumenta ou diminui? A que distância x da origem as ondas possuem uma diferença de fase de (d) $0{,}50\lambda$, (e) $1{,}00\lambda$ e (f) $1{,}50\lambda$?

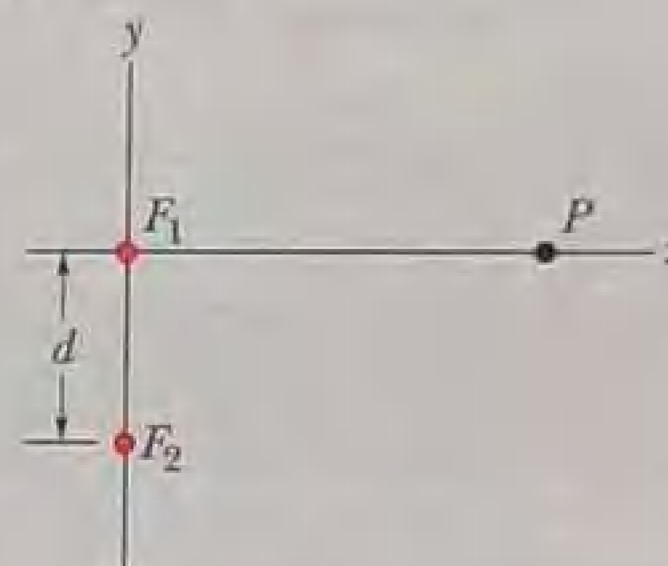


Figura 17-38 Problema 23.

Seção 17-6 Intensidade e Nível Sonoro

•24 Uma discussão começa acalorada, com um nível sonoro de 70 dB, mas o nível cai para 50 dB quando os interlocutores se acalmam. Supondo que a frequência do som é 500 Hz, determine a intensidade (a) inicial e (b) final e a amplitude (c) inicial e (d) final das ondas sonoras.

•25 Uma onda sonora com uma frequência 300 Hz tem uma intensidade de 1,00 μW/m^2. Qual é a amplitude das oscilações do ar causadas pela onda?

•26 Uma fonte pontual de 1,0 W emite ondas sonoras isotropicamente. Supondo que a energia da onda é conservada, determine a intensidade (a) a 1,0 m e (b) a 2,5 m da fonte.

•27 O nível sonoro de uma fonte é aumentado em 30,0 dB. Por que fator é multiplicada (a) a intensidade do som e (b) a amplitude da pressão do ar?

•28 A diferença entre os níveis sonoros de dois sons é 1,00 dB. Qual é a razão entre a intensidade maior e a intensidade menor?

•29 Uma fonte emite ondas sonoras isotropicamente. A intensidade das ondas a 2,50 m da fonte é $1{,}91 \times 10^{-4}$ W/m^2. Supondo que a energia da onda é conservada, determine a potência da fonte.

•30 A fonte de uma onda sonora tem uma potência de 1,00 μW. Se a fonte é pontual, (a) qual é a intensidade a 3,00 m de distância e (b) qual é o nível sonoro em decibéis a essa distância?

•31 Ao "estalar" uma junta, você alarga bruscamente a cavidade da articulação, aumentando o volume disponível para o fluido sinovial no interior e causando o aparecimento súbito de uma bolha de ar no fluido. A produção súbita da bolha, chamada de "cavitação", produz um pulso sonoro: o som do estalo. Suponha que o som é transmitido uniformemente em todas as direções e que passa completamente do interior da articulação para o exterior. Se o pulso tem um nível sonoro de 62 dB no seu ouvido, estime a taxa com a qual a energia é produzida pela cavitação.

•32 Os ouvidos de aproximadamente um terço das pessoas com audição normal emitem continuamente um som de baixa intensidade através do canal auditivo. Uma pessoa com essa *emissão otoacústica espontânea* raramente tem consciência do som, exceto talvez em um ambiente extremamente silencioso, mas às vezes a emissão é suficientemente intensa para ser percebida por outra pessoa. Em uma observação, a onda sonora tinha uma frequência de 1665 Hz e uma amplitude de pressão de $1,13 \times 10^{-3}$ Pa. Qual era (a) a amplitude dos deslocamentos e (b) a intensidade da onda emitida pelo ouvido?

•33 O macho da rã-touro, *Rana catesbeiana*, é conhecido pelos ruidosos gritos de acasalamento. O som não é emitido pela boca da rã, mas pelos tímpanos, que estão na superfície da cabeça. Surpreendentemente, o mecanismo nada tem a ver com o papo inflado da rã. Se o som emitido possui uma frequência de 260 Hz e um nível sonoro de 85 dB (perto dos tímpanos), qual é a amplitude da oscilação dos tímpanos? A massa específica do ar é 1,21 kg/m³.

••34 Duas fontes sonoras A e B na atmosfera emitem isotropicamente com potência constante. Os níveis sonoros β das emissões estão plotados na Fig. 17-39 em função da distância r das fontes. A escala do eixo vertical é definida por β_1 = 85,0 dB e β_2 = 65,0 dB. Para r = 10 m, determine (a) a razão entre a maior e a menor potência e (b) a diferença entre os níveis sonoros das emissões.

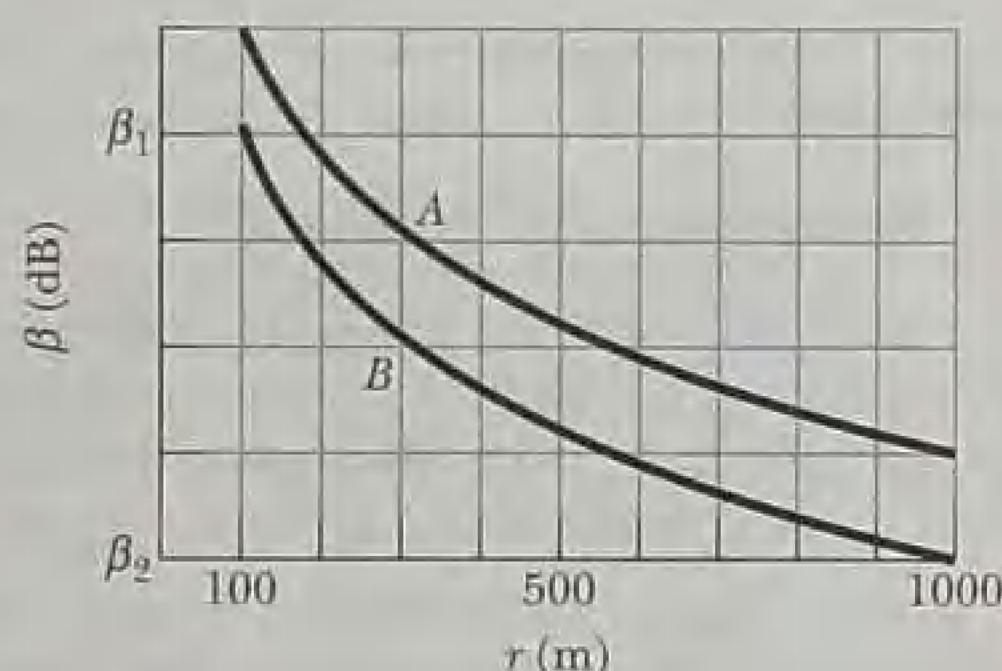


Figura 17-39 Problema 34.

••35 Uma fonte pontual emite 30,0 W de som isotropicamente. Um pequeno microfone intercepta o som em uma área de 0,750 cm², a 200 m de distância da fonte. Calcule (a) a intensidade sonora nessa posição e (b) a potência interceptada pelo microfone.

••36 *Conversas em festas.* Quanto maior o número de pessoas presentes em uma festa, mais você precisa levantar a voz para ser ouvido, por causa do *ruído de fundo* dos outros participantes. Entretanto, depois que está gritando a plenos pulmões, a única forma de se fazer ouvir é aproximar-se do interlocutor, invadindo seu "espaço pessoal". Modele a situação substituindo a pessoa que está falando por uma fonte sonora isotrópica de potência fixa P e o ouvinte por um ponto Q que absorve parte das ondas sonoras. Os pontos P e Q estão separados inicialmente por uma distância r_i = 1,20 m. Se o ruído de fundo aumenta de $\Delta\beta$ = 5 dB, o nível do som na posição do ouvinte também deve aumentar. Qual é a nova distância r_f necessária para que a conversa possa prosseguir?

•••37 Uma fonte produz uma onda sonora senoidal de frequência angular 3000 rad/s e amplitude 12,0 nm em um tubo com ar. O raio interno do tubo é 2,00 cm. (a) Qual é a taxa média com a qual a energia (soma das energias cinética e potencial) é transportada para a extremidade oposta do tubo? (b) Se, ao mesmo tempo, uma onda igual se propaga em um tubo vizinho igual, qual é a taxa média total com a qual a energia é transportada pelas ondas para a extremidade oposta dos tubos? Se, em vez disso, as duas ondas são produzidas simultaneamente no *mesmo* tubo, qual é a taxa média total com que a energia é transportada quando a diferença de fase entre as ondas é (c) 0, (d) $0,40\pi$ rad e (e) π rad?

Seção 17-7 Fontes de Sons Musicais

•38 O nível de água em um tubo de vidro vertical com 1,00 m de comprimento pode ser ajustado em qualquer posição dentro do tubo. Um diapasão vibrando a 686 Hz é mantido acima da extremidade aberta do tubo para gerar uma onda sonora estacionária na parte superior do tubo, onde existe ar. (Essa parte superior cheia de ar se comporta como um tubo com uma extremidade aberta e a outra fechada.) (a) Para quantas posições diferentes do nível de água o som do diapasão produz uma ressonância na parte do tubo cheia de ar? Qual é (b) a menor altura e (c) a segunda menor altura da água no tubo para as quais ocorre ressonância?

•39 (a) Determine a velocidade das ondas em uma corda de violino com 800 mg de massa e 22,0 cm de comprimento se a frequência fundamental é 920 Hz. (b) Qual é a tensão da corda? Para o modo fundamental, qual é o comprimento de onda (c) das ondas na corda e (d) das ondas sonoras emitidas pela corda?

•40 O tubo de órgão A, com as duas extremidades abertas, tem uma frequência fundamental de 300 Hz. O terceiro harmônico do tubo de órgão B, com uma extremidade aberta, tem a mesma frequência que o segundo harmônico do tubo A. Qual é o comprimento (a) do tubo A e (b) do tubo B?

•41 Uma corda de violino com 15,0 cm de comprimento e as duas extremidades fixas oscila no modo n = 1. A velocidade das ondas na corda é 250 m/s e a velocidade do som no ar é 348 m/s. Qual é (a) a frequência e (b) o comprimento de onda da onda sonora emitida?

•42 Uma onda sonora que se propaga em um meio fluido é refletida em uma barreira, o que leva à formação de uma onda estacionária. A distância entre nós é 3,8 cm e a velocidade de propagação é 1500 m/s. Determine a frequência da onda sonora.

•43 Na Fig. 17-40, F é um pequeno alto-falante alimentado por um oscilador de áudio com uma frequência que varia de 1000 Hz a 2000 Hz e D é um tubo cilíndrico com 45,7 cm de comprimento e as duas extremidades abertas. A velocidade do som no ar do interior do tubo é 344 m/s. (a) Para quantas frequências o som do alto-falante produz ressonância no tubo? Qual é (b) a menor e (c) a segunda menor frequência de ressonância?



Figura 17-40 Problema 43.

•44 A crista do crânio de um dinossauro *Parassaurolofo* continha uma passagem nasal na forma de um tubo longo e arqueado aberto nas duas extremidades. O dinossauro pode ter usado a passagem para produzir sons no modo fundamental do tubo. (a) Se a passagem nasal de um fóssil de *Parassaurolofo* tem 2,0 m de comprimento, que frequência era produzida? (b) Se esse dinossauro pudesse ser clonado (como em *Jurassic Park*), uma pessoa com uma capacidade auditiva na faixa de 60 Hz a 20 kHz poderia ouvir esse modo fundamental? O som seria de alta ou de baixa frequência?

Crânios fósseis com passagens nasais mais curtas são atribuídos a *Parassaurolofos* fêmeas. (c) Isso torna a frequência fundamental da fêmea maior ou menor que a do macho?

•45 No tubo A, a razão entre a frequência de um harmônico e a frequência do harmônico precedente é 1,2. No tubo B, a razão entre a frequência de um harmônico e a frequência do harmônico precedente é 1,4. Quantas extremidades abertas existem (a) no tubo A e (b) no tubo B?

••46 O tubo A, que tem 1,20 m de comprimento e as duas extremidades abertas, oscila na terceira frequência harmônica. Está cheio de ar, no qual a velocidade do som é 343 m/s. O tubo B, com uma das extremidades fechada, oscila na segunda frequência harmônica. A frequência de oscilação de B coincide com a de A. Um eixo x coincide com o eixo do tubo B, com $x = 0$ na extremidade fechada. (a) Quantos nós existem no eixo x? Qual é (b) o menor e (c) o segundo menor valor da coordenada x desses nós? (d) Qual é a frequência fundamental do tubo B?

••47 Um poço com paredes verticais e água no fundo ressoa em 7,00 Hz e em nenhuma outra frequência mais baixa. (A parte do poço cheia de ar se comporta como um tubo com uma extremidade fechada e outra aberta.) O ar no interior do poço tem uma massa específica de 1,10 kg/m³ e um módulo de elasticidade volumétrico de $1,33 \times 10^5$ Pa. A que profundidade está a superfície da água?

••48 Uma das frequências harmônicas do tubo A, que possui as duas extremidades abertas, é 325 Hz. A frequência harmônica seguinte é 390 Hz. (a) Qual é a frequência harmônica que se segue à frequência harmônica de 195 Hz? (b) Qual é o número desse harmônico?

Uma das frequências harmônicas do tubo B, com apenas uma das extremidades aberta, é 1080 Hz. A frequência harmônica seguinte é 1320 Hz. (c) Qual é a frequência harmônica que se segue à frequência harmônica de 600 Hz? (d) Qual é o número desse harmônico?

••49 Uma corda de violino de 30,0 cm de comprimento com uma massa específica linear de 0,650 g/m é colocada perto de um alto-falante alimentado por um oscilador de áudio de frequência variável. Observa-se que a corda entra em oscilação apenas nas frequências de 880 Hz e 1320 Hz quando a frequência do oscilador de áudio varia no intervalo de 500 a 1500 Hz. Qual é a tensão da corda?

••50 Um tubo com 1,20 m de comprimento é fechado em uma das extremidades. Uma corda esticada é colocada perto da extremidade aberta. A corda tem 0,330 m de comprimento e 9,60 g de massa, está fixa nas duas extremidades e oscila no modo fundamental. Devido à ressonância, faz a coluna de ar no tubo oscilar na sua frequência fundamental. Determine (a) a frequência fundamental da coluna de ar e (b) a tensão da corda.

Seção 17-8 Batimentos

•51 A corda lá de um violino está esticada demais. São ouvidos 4,00 batimentos por segundo quando a corda é tocada junto com um diapasão que oscila exatamente na frequência do lá de concerto (440 Hz). Qual é o período de oscilação da corda do violino?

•52 Um diapasão de frequência desconhecida produz 3,00 batimentos por segundo com um diapasão-padrão de 384 Hz. A frequência de batimento diminui quando um pequeno pedaço de cera é colocado em um dos braços do primeiro diapasão. Qual é a frequência do primeiro diapasão?

••53 Duas cordas de piano iguais têm uma frequência fundamental de 600 Hz quando são submetidas a uma mesma tensão. Que aumento relativo da tensão de uma das cordas faz com que haja 6,0 batimentos por segundo quando as duas cordas oscilam simultaneamente?

••54 Cinco diapasões oscilam com frequências próximas, mas diferentes. Qual é o número (a) máximo e (b) mínimo de frequências de batimento diferentes que podem ser produzidas tocando os diapasões aos pares, dependendo da diferença entre as frequências?

Seção 17-9 O Efeito Doppler

•55 Um apito de 540 Hz descreve uma circunferência de 60,0 cm de raio com uma velocidade angular de 15,0 rad/s. Qual é a frequência (a) mais baixa e (b) mais alta escutada por um ouvinte distante, em repouso em relação ao centro da circunferência?

•56 Uma ambulância cuja sirene emite um som com uma frequência de 1600 Hz passa por um ciclista que está a 2,44 m/s. Depois de ser ultrapassado, o ciclista escuta uma frequência de 1590 Hz. Qual é a velocidade da ambulância?

•57 Um guarda rodoviário persegue um carro que excedeu o limite de velocidade em um trecho reto de uma rodovia; os dois carros estão a 160 km/h. A sirene do carro de polícia produz um som com uma frequência de 500 Hz. Qual é o deslocamento Doppler da frequência ouvida pelo motorista infrator?

••58 Uma fonte sonora A e uma superfície refletora B se movem uma em direção à outra. Em relação ao ar, a velocidade da fonte A é 29,9 m/s e a velocidade da superfície B é 65,8 m/s; a velocidade do som no ar é 329 m/s. A fonte emite ondas com uma frequência de 1200 Hz no referencial da fonte. No referencial da superfície B, qual é (a) a frequência e (b) o comprimento de onda das ondas sonoras? No referencial da fonte A, qual é (c) a frequência e (d) o comprimento de onda das ondas sonoras refletidas de volta para a fonte?

••59 Na Fig. 17-41, um submarino francês e um submarino norte-americano se movem um em direção ao outro durante manobras em águas paradas no Atlântico Norte. O submarino francês se move com uma velocidade $v_F = 50,0$ km/h e o submarino americano com uma velocidade $v_A = 70,00$ km/h. O submarino francês envia um sinal de sonar (onda sonora na água) de $1,000 \times 10^3$ Hz. As ondas de sonar se propagam a 5470 km/h. (a) Qual é a frequência do sinal detectado pelo submarino americano? (b) Qual é a frequência do eco do submarino americano detectado pelo submarino francês?



Figura 17-41 Problema 59.

••60 Um detector de movimento estacionário envia ondas sonoras de 0,150 MHz em direção a um caminhão que se aproxima com uma velocidade de 45,0 m/s. Qual é a frequência das ondas refletidas de volta para o detector?

••61 Um morcego está voando em uma caverna, orientando-se através de pulsos ultrassônicos. A frequência dos sons emitidos pelo morcego é 39.000 Hz. O morcego se aproxima de uma parede plana da caverna com uma velocidade igual a 0,025 vez a velocidade do som no ar. Qual é a frequência com que o morcego ouve os sons refletidos pela parede da caverna?

••62 A Fig. 17-42 mostra quatro tubos de 1,0 m ou 2,0 m de comprimento e com uma ou duas extremidades abertas. O terceiro har-

mônico é produzido em cada tubo e parte do som que escapa é captada pelo detector D, que se afasta dos tubos em linha reta. Em termos da velocidade do som v, que velocidade deve ter o detector para que a frequência do som proveniente (a) do tubo 1, (b) do tubo 2, (c) do tubo 3 e (d) do tubo 4 seja igual à frequência fundamental do tubo?

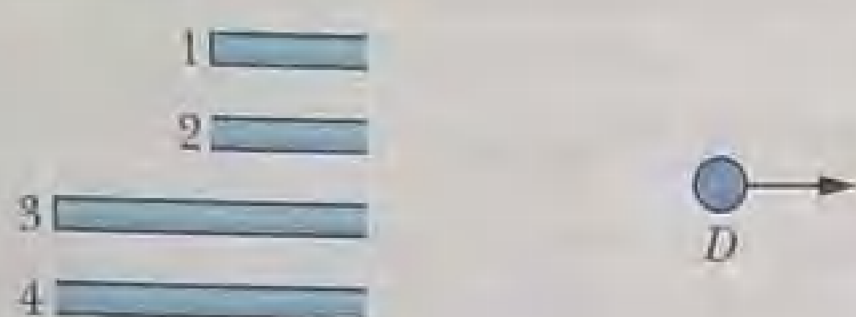


Figura 17-42 Problema 62.

••63 Um alarme acústico contra roubo utiliza uma fonte que emite ondas com uma frequência de 28,0 kHz. Qual é a frequência de batimento entre as ondas da fonte e as ondas refletidas em um intruso que caminha com uma velocidade média de 0,950 m/s afastando-se em linha reta do alarme?

••64 Um detector estacionário mede a frequência de uma fonte sonora que se aproxima em linha reta, passa pelo detector e se afasta, mantendo a velocidade constante. A frequência emitida pela fonte é f. A frequência detectada durante a aproximação é f'_{ap} e a frequência detectada durante o afastamento é f'_{af}. Se $(f'_{ap} - f'_{af})/f = 0{,}500$, qual é a razão v_F/v entre a velocidade da fonte e a velocidade do som?

•••65 Uma sirene de 2000 Hz e um funcionário da defesa civil estão em repouso em relação ao solo. Que frequência o funcionário ouve se o vento está soprando a 12 m/s (a) da fonte para o funcionário e (b) do funcionário para a fonte?

•••66 Dois trens viajam um em direção ao outro a 30,5 m/s em relação ao solo. Um dos trens faz soar um apito de 500 Hz. (a) Que frequência é ouvida no outro trem se o ar está parado? (b) Que frequência é ouvida no outro trem se o vento está soprando a 30,5 m/s no sentido contrário ao do trem que apitou? (c) Que frequência é ouvida se o sentido do vento se inverte?

•••67 Uma menina está sentada perto da janela aberta de um trem que viaja para leste com uma velocidade de 10,00 m/s. O tio da menina está parado na plataforma e observa o trem se afastar. O apito da locomotiva produz um som com uma frequência de 500,0 Hz. O ar está parado. (a) Que frequência o tio ouve? (b) Que frequência a menina ouve? (c) Um vento vindo do leste começa a soprar a 10,00 m/s. (c) Que frequência o tio passa a ouvir? (d) Que frequência a menina passa a ouvir?

Seção 17-10 Velocidades Supersônicas, Ondas de Choque

•68 A onda de choque produzida pelo avião da Fig. 17-23 tinha um ângulo de aproximadamente 60°. O avião estava se movendo a 1350 km/h no momento em que a fotografia foi tirada. Qual era, aproximadamente, a velocidade do som na altitude do avião?

••69 Um avião a jato passa sobre um pedestre a uma altitude de 5000 m e a uma velocidade de Mach 1,5. (a) Determine o ângulo do cone de Mach (a velocidade do som é 331 m/s). (b) Quanto tempo após o avião ter passado diretamente acima do pedestre este é atingido pela onda de choque?

••70 Um avião voa a 1,25 vez a velocidade do som. O estrondo sônico produzido pelo avião atinge um homem no solo 1,00 min depois de o avião ter passado exatamente por cima dele. Qual é a altitude do avião? Suponha que a velocidade do som é 330 m/s.

Problemas Adicionais

71 A uma distância de 10 km, uma corneta de 100 Hz, considerada uma fonte pontual isotrópica, mal pode ser ouvida. A que distância começa a causar dor?

72 Uma bala é disparada com uma velocidade de 685 m/s. Determine o ângulo entre o cone de choque e a trajetória da bala.

73 O som produzido pelos cachalotes (Fig. 17-43a) lembra uma série de cliques. Na verdade, a baleia produz apenas um som na frente da cabeça para iniciar a série. Parte desse som passa para a água e se torna o primeiro clique da série. O restante do som se propaga para trás, atravessa o saco de espermacete (um depósito de gordura), é refletido no saco frontal (uma camada de ar) e passa novamente pelo saco de espermacete. Quando chega ao saco distal (outra camada de ar), na frente da cabeça, parte do som escapa para a água para formar o segundo clique, enquanto o restante é refletido de volta para o saco de espermacete (e acaba formando outros cliques).

A Fig. 17-43b mostra o registro de uma série de cliques detectados por um hidrofone. O intervalo de tempo correspondente a 1,0 ms está indicado no gráfico. Supondo que a velocidade do som no saco de espermacete é 1372 m/s, determine o comprimento do saco de espermacete. Usando cálculos desse tipo, os cientistas marinhos estimam o comprimento de uma baleia a partir dos cliques que produz.

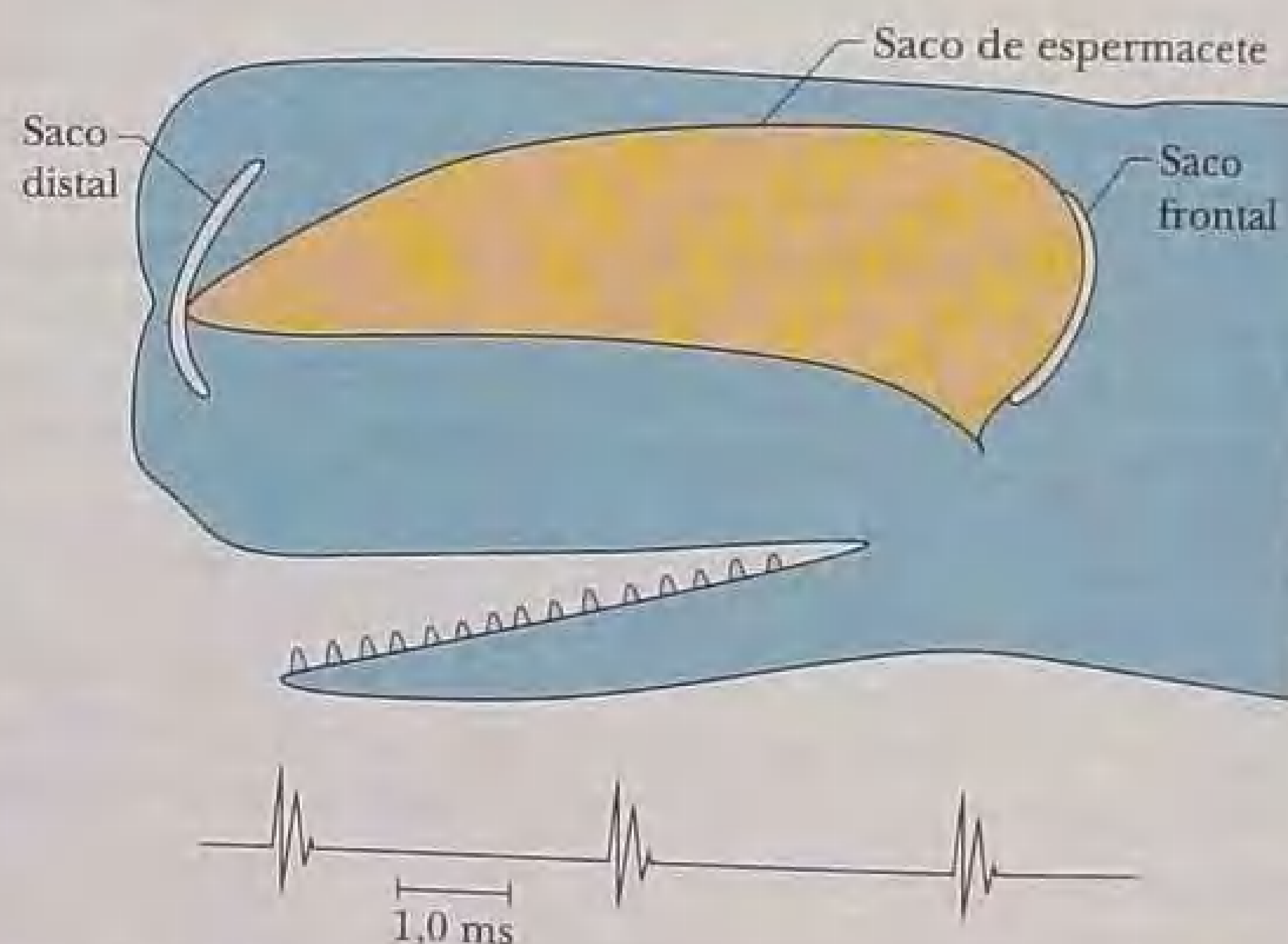


Figura 17-43 Problema 73.

74 A massa específica média da crosta da Terra 10 km abaixo dos continentes é 2,7 g/cm³. A velocidade de ondas sísmicas a essa profundidade, calculada a partir do tempo de percurso das ondas produzida por terremotos distantes, é 5,4 km/s. Use essas informações para determinar o módulo de elasticidade volumétrico da crosta terrestre a essa profundidade. Para fins de comparação, o módulo de elasticidade volumétrico do aço é aproximadamente 16×10^{10} Pa.

75 Um sistema de alto-falantes emite sons isotropicamente com uma frequência de 2000 Hz e uma intensidade de 0,960 mW/m² a uma distância de 6,10 m. Suponha que não existem reflexões. (a) Qual é a intensidade a 30,0 m? A 6,10 m, qual é (b) a amplitude do deslocamento e (c) a amplitude de pressão da onda sonora?

76 Calcule a razão (entre a maior e a menor) (a) das intensidades, (b) das amplitudes de pressão e (c) das amplitudes dos deslocamentos das partículas para dois sons cujos níveis sonoros diferem de 37 dB.

77 Na Fig. 17-44, as ondas sonoras A e B, de mesmo comprimento de onda λ, estão inicialmente em fase e se propagam para a direita, como indicam os dois raios. A onda A é refletida por quatro superfícies, mas volta a se propagar na direção e no sentido original. Que múltiplo do comprimento de onda λ é o menor valor da distância L da figura para o qual A e B estão em oposição de fase após as reflexões?

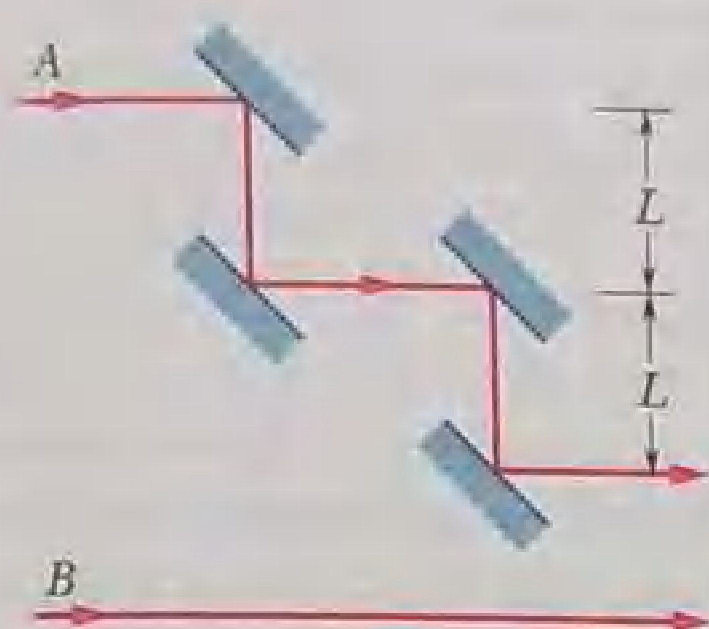


Figura 17-44 Problema 77.

78 Um trompetista em um vagão de trem em movimento se aproxima de um segundo trompetista ao lado dos trilhos enquanto ambos tocam uma nota de 440 Hz. As ondas sonoras ouvidas por um observador estacionário entre os dois trompetistas têm uma frequência de batimento de 4,0 batimentos/s. Qual é a velocidade do vagão?

79 Na Fig. 17-45, um som com um comprimento de onda de 0,850 m é emitido isotropicamente por uma fonte pontual F. O raio de som 1 se propaga diretamente para o detector D, situado a uma distância $L = 10{,}0$ m. O raio de som 2 chega a D após ser refletido por uma superfície plana. A reflexão ocorre na mediatriz do segmento de reta FD, a uma distância d do raio 1. Suponha que a reflexão desloca a fase da onda sonora de $0{,}500\lambda$. Qual é o menor valor de d (diferente de zero) para o qual o som direto e o som refletido chegam a D (a) em oposição de fase e (b) em fase?

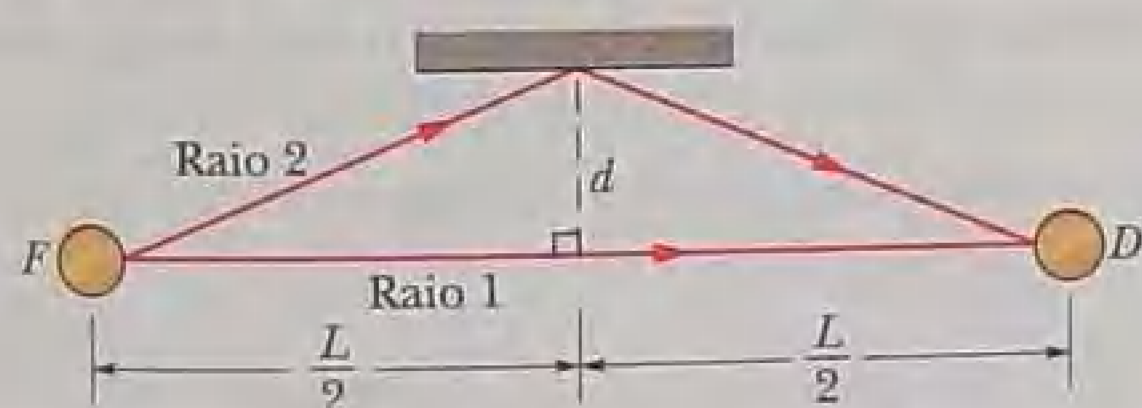


Figura 17-45 Problema 79.

80 Um detector se aproxima em linha reta de uma fonte sonora estacionária, passa pela fonte e se afasta, mantendo a velocidade constante. A frequência emitida pela fonte é f. A frequência detectada durante a aproximação é f'_{ap} e a frequência detectada durante o afastamento é f'_{af}. Se $(f'_{ap} - f'_{af})/f = 0{,}500$, qual é a razão v_D/v entre a velocidade do detector e a velocidade do som?

81 (a) Se duas ondas sonoras, uma no ar e uma na água doce, têm a mesma frequência e a mesma intensidade, qual é a razão entre a amplitude da pressão da onda na água e a amplitude da pressão da onda no ar? Suponha que a água e o ar estão a 20°C. (Veja a Tabela 14-1.) (b) Se, em vez de terem a mesma intensidade, as ondas têm a mesma amplitude de pressão, qual é a razão entre as intensidades?

82 Uma onda longitudinal senoidal contínua é produzida em uma mola espiral muito longa por uma fonte presa à mola. A onda se propaga no sentido negativo de um eixo x; a frequência da fonte é 25 Hz; em qualquer instante, a distância entre pontos sucessivos de distensão máxima da mola é igual a 24 cm; o deslocamento longitudinal máximo de uma partícula da mola é 0,30 cm; a partícula situada em $x = 0$ possui deslocamento nulo no instante $t = 0$. Se a onda é escrita na forma $s(x, t) = s_m \cos(kx \pm \omega t)$, determine (a) s_m, (b) k, (c) ω, (d) a velocidade da onda e (e) o sinal que precede ω.

83 O ultrassom, uma onda sonora com uma frequência tão alta que não pode ser ouvida pelos seres humanos, é usado para produzir imagens do interior do corpo humano. Além disso, o ultrassom é usado para medir a velocidade do sangue no corpo; para isso, a frequência do ultrassom aplicado ao corpo é comparada com a frequência do ultrassom refletido pelo sangue para a superfície do corpo. Como o sangue pulsa, a frequência detectada varia.

Suponha que uma imagem de ultrassom do braço de um paciente mostra uma artéria que faz um ângulo $\theta = 20°$ com a direção de propagação do ultrassom (Fig. 17-46). Suponha ainda que a frequência do ultrassom refletido pelo sangue da artéria apresenta um aumento máximo de 5495 Hz em relação à frequência de 5,000,000 MHz do ultrassom original. (a) Na Fig. 17-46, o sangue está correndo para a direita ou para a esquerda? (b) A velocidade do som no braço humano é 1540 m/s. Qual é a velocidade máxima do sangue? (*Sugestão:* o efeito Doppler é causado pela componente da velocidade do sangue na direção de propagação do ultrassom.) (c) Se o ângulo θ fosse maior, a frequência refletida seria maior ou menor?

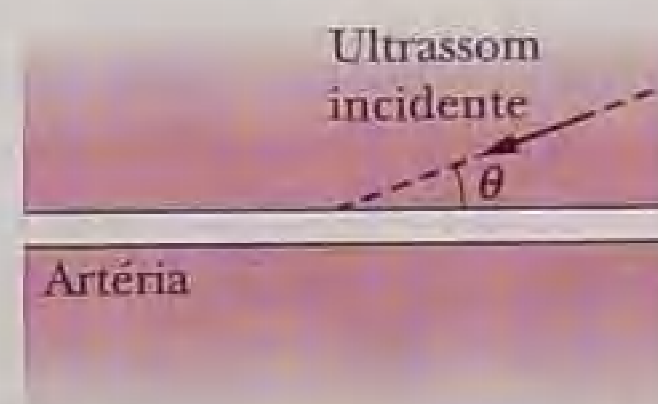


Figura 17-46 Problema 83.

84 A velocidade do som em um certo metal é v_m. Uma das extremidades de um tubo longo feito com esse metal, de comprimento L, recebe uma pancada. Uma pessoa na outra extremidade ouve dois sons, um associado à onda que se propaga na parede do tubo e outro associado à onda que se propaga no ar do interior do tubo. (a) Se v é a velocidade do som no ar, qual é o intervalo de tempo Δt entre as chegadas dos dois sons ao ouvido da pessoa? (b) Se $\Delta t = 1{,}00$ s e o metal é o aço, qual é o comprimento L do tubo?

85 Uma avalanche de areia em um tipo raro de duna pode produzir um estrondo suficientemente intenso para ser ouvido a 10 km de distância. O estrondo aparentemente é causado pela oscilação de uma camada deslizante de areia; a espessura da camada aumenta e diminui periodicamente. Se a frequência emitida é 90 Hz, determine (a) o período de oscilação da espessura da camada e (b) o comprimento de onda do som.

86 Uma fonte sonora se move ao longo de um eixo x, entre os detectores A e B. O comprimento de onda do som detectado por A é 0,500 do comprimento do som detectado por B. Qual é a razão v_F/v entre a velocidade da fonte e a velocidade do som?

87 Uma sirene que emite um som com uma frequência de 1000 Hz se afasta de você em direção a um rochedo com uma velocidade de 10 m/s. Considere a velocidade do som no ar como 330 m/s. (a) Qual é a frequência do som que você escuta vindo diretamente da sirene? (b) Qual é a frequência do som que você escuta refletido no rochedo? (c) Qual é a frequência de batimento entre os dois sons? Ela é perceptível (menor que 20 Hz)?

88 Em um certo ponto, duas ondas produzem variações de pressão dadas por $\Delta p_1 = \Delta p_m \operatorname{sen} \omega t$ e $\Delta p_2 = \Delta p_m \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$. Nesse

ponto, qual é a razão $\Delta p_r/\Delta p_m$, onde Δp_r é a amplitude da pressão da onda resultante, se ϕ é igual a (a) 0, (b) $\pi/2$, (c) $\pi/3$ e (d) $\pi/4$?

89 Duas ondas sonoras com uma amplitude de 12 nm e um comprimento de onda de 35 cm se propagam no mesmo sentido em um tubo longo, com uma diferença de fase de $\pi/3$ rad. Qual é (a) a amplitude e (b) o comprimento de onda da onda sonora que resulta da interferência das duas ondas? Se, em vez disso, as ondas sonoras se propagam em sentidos opostos no tubo, qual é (c) a amplitude e (d) o comprimento de onda da onda resultante?

90 Uma onda sonora senoidal se propaga no ar, no sentido positivo de um eixo x, com uma velocidade de 343 m/s. Em um certo instante, a molécula A do ar está em seu deslocamento máximo no sentido negativo do eixo, enquanto a molécula B do ar está na posição de equilíbrio. A distância entre as duas moléculas é 15,0 cm e as moléculas situadas entre A e B possuem deslocamentos intermediários no sentido negativo do eixo. (a) Qual é a frequência da onda sonora?

Em um arranjo semelhante, para uma onda sonora senoidal diferente, a molécula C do ar está em seu máximo deslocamento no sentido positivo do eixo, enquanto a molécula D do ar está em seu máximo deslocamento no sentido negativo. A distância entre as duas moléculas é 15,0 cm e as moléculas entre C e D possuem deslocamentos intermediários. (b) Qual é a frequência da onda sonora?

91 Dois diapasões iguais oscilam com uma frequência de 440 Hz. Uma pessoa está situada entre os dois diapasões, em um ponto da reta que liga os dois diapasões. Calcule a frequência de batimento ouvida por essa pessoa (a) se estiver parada e os dois diapasões se moverem no mesmo sentido ao longo da reta com uma velocidade de 3,00 m/s e (b) os diapasões estiverem parados e a pessoa se mover ao longo da reta com uma velocidade de 3,00 m/s.

92 É possível estimar a distância de um relâmpago contando o número de segundos que separam o clarão do trovão. Por que número inteiro é preciso dividir o número de segundos para obter a distância em quilômetros?

93 A Fig. 17-47 mostra um interferômetro acústico, usado para demonstrar a interferência de ondas sonoras. A fonte sonora F é um diafragma oscilante; D é um detector de ondas sonoras, como o ouvido ou um microfone; o tubo contém ar. O comprimento do tubo FBD pode variar, mas o do tubo FAD é fixo. Em D, a onda sonora que se propaga no tubo FBD interfere com a que se propaga no tubo FAD. Em um experimento, a intensidade sonora no detector D possui um valor mínimo de 100 unidades para uma certa posição do braço móvel e aumenta continuamente até um valor máximo de 900 unidades quando o braço é deslocado de 1,65 cm. Determine (a) a frequência do som emitido pela fonte e (b) a razão entre as amplitudes no ponto D da onda FAD e da onda FBD. (c) Como é possível que as ondas tenham amplitudes diferentes, já que foram geradas pela mesma fonte?

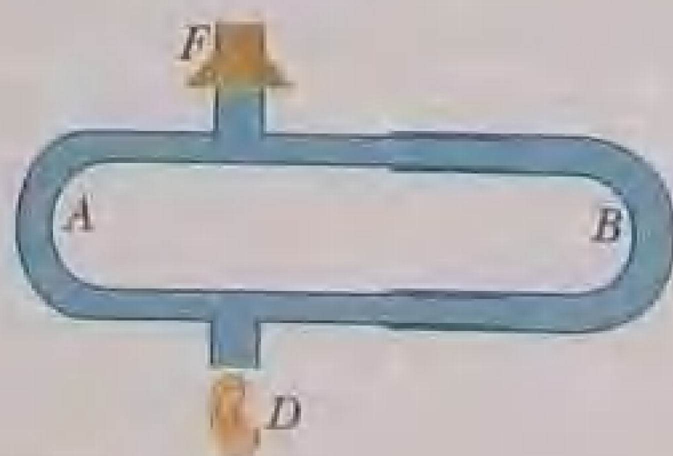


Figura 17-47 Problema 93.

94 Em 10 de julho de 1996, um bloco de granito se desprendeu de uma montanha no vale de Yosemite e, depois de deslizar pela encosta, foi lançado em uma trajetória balística. As ondas sísmicas produzidas pelo choque do bloco com o solo foram registradas por sismógrafos a mais de 200 km de distância. Medições posteriores mostraram que o bloco tinha uma massa entre $7,3 \times 10^7$ kg e $1,7 \times 10^8$ kg e que caiu a uma distância vertical de 500 m e a uma distância horizontal de 30 m do ponto de onde foi lançado. (O ângulo de lançamento não é conhecido.) (a) Estime a energia cinética do bloco imediatamente antes do choque com o solo.

Dois tipos de ondas sísmicas devem ter sido produzidos no solo pelo impacto: uma *onda volumétrica*, na forma de um hemisfério de raio crescente, e uma onda superficial, na forma de um cilindro estreito (Fig. 17-48). Suponha que o choque tenha durado 0,50 s, que o cilindro tinha uma altura d de 5,0 m e que cada tipo de onda tenha recebido 20% da energia que o bloco possuía imediatamente antes do impacto. Desprezando a energia mecânica perdida pelas ondas durante a propagação, determine a intensidade (b) da onda volumétrica e (c) da onda superficial quando chegaram a um sismógrafo situado a 200 km de distância. (d) Com base nesses resultados, qual das duas ondas pôde ser detectada com mais facilidade por um sismógrafo distante?

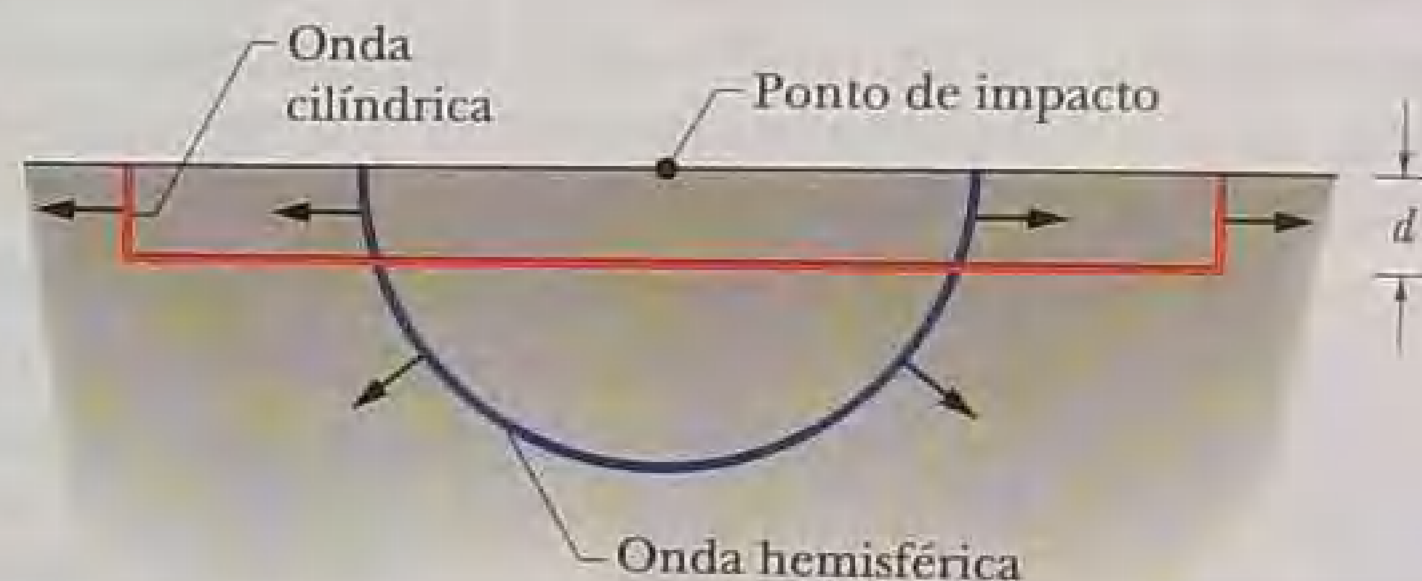


Figura 17-48 Problema 94.

95 A intensidade do som é 0,0080 W/m² a uma distância de 10 m de uma fonte sonora pontual isotrópica. (a) Qual é a potência da fonte? (b) Qual é a intensidade sonora a 5,0 m de distância da fonte? (c) Qual é o nível sonoro a 10 m de distância da fonte?

96 Quatro ondas sonoras são produzidas no mesmo tubo cheio de ar, no mesmo sentido:

$$s_1(x,t) = (9{,}00\text{ nm})\cos(2\pi x - 700\pi t)$$
$$s_2(x,t) = (9{,}00\text{ nm})\cos(2\pi x - 700\pi t + 0{,}7\pi)$$
$$s_3(x,t) = (9{,}00\text{ nm})\cos(2\pi x - 700\pi t + \pi)$$
$$s_4(x,t) = (9{,}00\text{ nm})\cos(2\pi x - 700\pi t + 1{,}7\pi).$$

Qual é a amplitude da onda resultante? (*Sugestão:* use um diagrama fasorial para simplificar o problema.)

97 Um segmento de reta AB liga duas fontes pontuais, separadas por uma distância de 5,00 m, que emitem ondas sonoras de 300 Hz de mesma amplitude e fases opostas. (a) Qual é a menor distância entre o ponto médio de AB e um ponto sobre AB no qual a interferência das ondas provoca a maior oscilação possível das moléculas de ar? Qual é (b) a segunda e (c) a terceira menor distância?

98 Uma fonte pontual que está parada em um eixo x emite uma onda sonora senoidal com uma frequência de 686 Hz e uma velocidade de 343 m/s. A onda se propaga radialmente, fazendo as moléculas de ar oscilar para perto e para longe da fonte. Defina uma frente de onda como uma linha que liga os pontos nos quais as moléculas de ar possuem o deslocamento máximo para fora na direção radial. Em qualquer instante, as frentes de onda são circunferências concêntricas cujo centro coincide com a posição da fonte. (a) Qual é a

distância, ao longo do eixo x, entre frentes de onda vizinhas? Suponha que a fonte passa a se mover ao longo do eixo x com uma velocidade de 110 m/s. Qual é a distância, ao longo do eixo x, entre as frentes de onda (b) na frente e (c) atrás da fonte?

99 Você está parado a uma distância D de uma fonte sonora pontual isotrópica. Caminha 50,0 m em direção à fonte e observa que a intensidade do som dobrou. Calcule a distância D.

100 O cano A é aberto em apenas uma extremidade; o tubo B é quatro vezes mais comprido e é aberto nas duas extremidades. Dos 10 menores números harmônicos n_B do tubo B, qual é (a) o menor, (b) o segundo menor e (c) o terceiro menor valor para o qual uma frequência harmônica de B coincide com uma das frequências harmônicas de A?

101 Um tubo de 0,60 m de comprimento, fechado em uma extremidade, está cheio de um gás desconhecido. A frequência do terceiro harmônico do tubo é 750 Hz. (a) Qual é a velocidade do som no gás desconhecido? (b) Qual é a frequência fundamental do tubo quando está cheio do gás desconhecido?

102 Uma onda sonora se propaga uniformemente em todas as direções a partir de uma fonte pontual. (a) Justifique a seguinte expressão para o deslocamento s do meio transmissor a uma distância r da fonte:

$$s = \frac{b}{r} \operatorname{sen} k(r - vt),$$

em que b é uma constante. Considere a velocidade, o sentido de propagação, a periodicidade e a intensidade da onda. (b) Qual é a dimensão da constante b?

103 Um carro de polícia persegue um Porsche 911 por excesso de velocidade. Suponha que a velocidade máxima do Porsche é 80,0 m/s e a do carro de polícia é 54,0 m/s. No instante em que os dois carros atingem a velocidade máxima, que frequência o motorista do Porsche escuta se a frequência da sirene do carro de polícia é 440 Hz? Considere a velocidade do som no ar como 340 m/s.

104 Suponha que um alto-falante esférico emite sons isotropicamente com uma potência de 10 W em uma sala com paredes, piso e teto cobertos de material que absorve totalmente o som (uma *câmara anecoica*). (a) Qual é a intensidade do som a uma distância $d = 3{,}0$ m da fonte? (b) Qual é a razão entre as amplitudes da onda em $d = 4{,}0$ m e em $d = 3{,}0$ m?

105 Na Fig. 17-34, F_1 e F_2 são duas fontes sonoras pontuais isotrópicas que emitem ondas em fase com um comprimento de onda de 0,50 m e estão separadas por uma distância $D = 1{,}60$ m. Se movemos um detector de som ao longo de uma grande circunferência com o centro no ponto médio entre as fontes, em quantos pontos as ondas chegam ao detector (a) com a mesma fase e (b) com fases opostas?

CAPÍTULO

18 TEMPERATURA, CALOR E A PRIMEIRA LEI DA TERMODINÂMICA

18-1 O QUE É FÍSICA?

Um dos principais ramos da física e da engenharia é a **termodinâmica**, o estudo das leis que regem a relação entre calor e outras formas de energia. Um dos conceitos centrais da termodinâmica é o de *temperatura*, que será discutido na próxima seção. Desde a infância, temos um conhecimento prático dos conceitos de temperatura e *energia térmica*. Sabemos, por exemplo, que é preciso tomar cuidado com alimentos e objetos quentes e que a carne e o peixe devem ser guardados na geladeira. Sabemos, também, que a temperatura no interior de uma casa e de um automóvel deve ser mantida dentro de certos limites e que devemos nos proteger do frio e calor excessivos.

Os exemplos de aplicação da termodinâmica na ciência e na tecnologia são inúmeros. Os engenheiros de automóveis se preocupam com o superaquecimento dos motores, especialmente no caso dos carros de corrida. Os engenheiros de alimentos estudam o aquecimento de alimentos, como o de pizzas em fornos de micro-ondas, e o resfriamento, como no caso dos alimentos congelados. Os meteorologistas analisam a transferência de energia térmica nos eventos associados ao fenômeno El Niño e ao aquecimento global. Os engenheiros agrônomos investigam a influência das condições climáticas sobre a agricultura. Os engenheiros biomédicos estão interessados em saber se a medida da temperatura de um paciente permite distinguir uma infecção viral benigna de um tumor canceroso.

O ponto de partida de nossa discussão da termodinâmica é o conceito de temperatura.

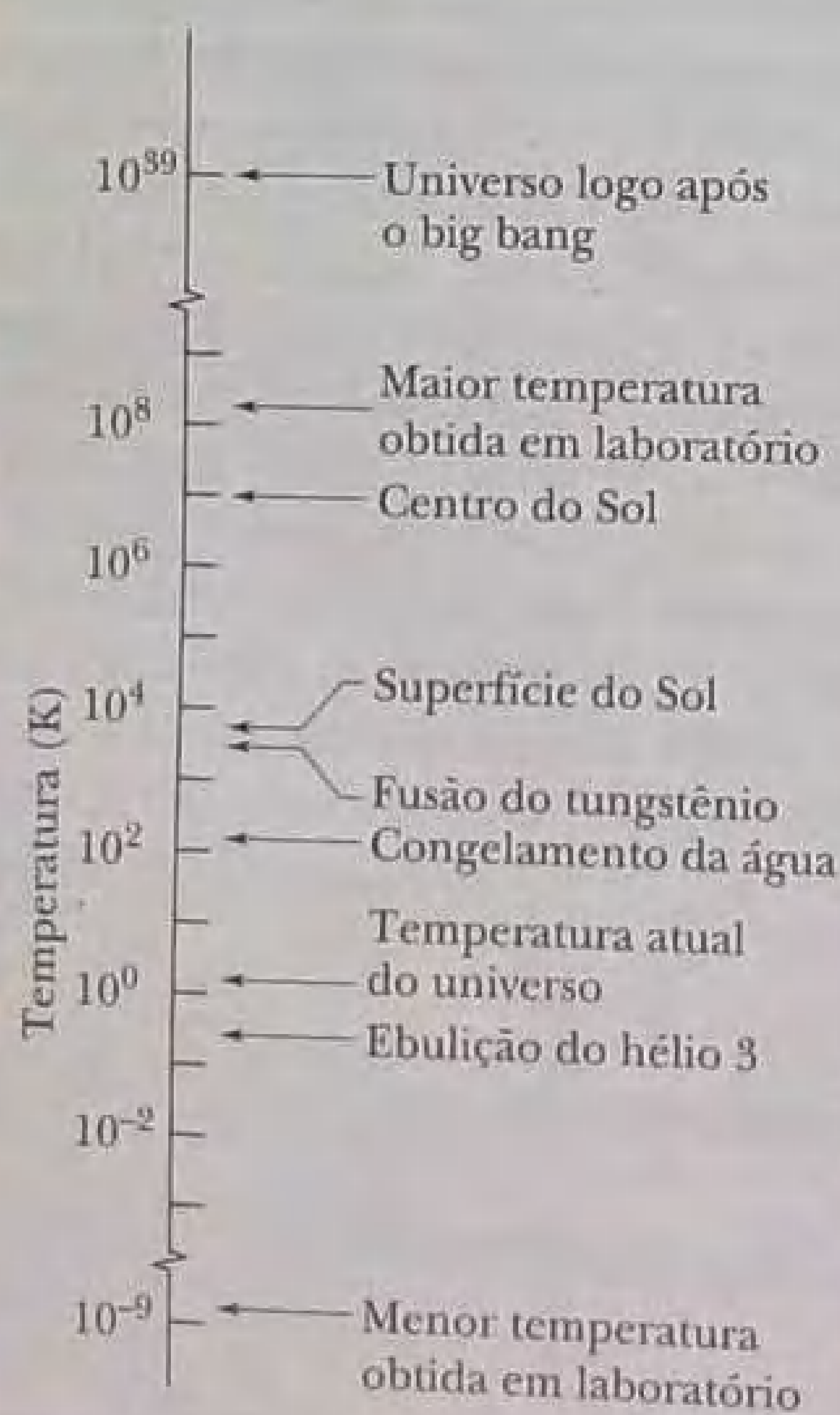


Figura 18-1 Algumas temperaturas na escala Kelvin. A temperatura $T = 0$ corresponde a $10^{-\infty}$ e não pode ser plotada nesta escala logarítmica.

18-2 Temperatura

A temperatura é uma das sete grandezas fundamentais do SI. Os físicos medem a temperatura na **escala Kelvin**, cuja unidade é o *kelvin* (K). Embora não exista um limite superior para a temperatura de um corpo, existe um limite inferior; essa temperatura limite é tomada como o zero da escala Kelvin de temperatura. A temperatura ambiente está em torno de 290 kelvins (290 K). A Fig. 18-1 mostra a temperatura em kelvins de alguns corpos estudados pelos físicos.

Quando o universo começou, há 13,7 bilhões de anos, sua temperatura era da ordem de 10^{39} K. Ao se expandir, o universo esfriou e hoje a temperatura média é de aproximadamente 3 K. Aqui na Terra a temperatura é um pouco maior porque vivemos nas vizinhanças de uma estrela. Se não fosse o Sol, também estaríamos a 3 K (ou melhor, não existiríamos).

18-3 A Lei Zero da Termodinâmica

Muitos corpos sofrem mudanças consideráveis em suas propriedades quando são aquecidos. Eis alguns exemplos: com o aquecimento, um líquido aumenta de volume; uma barra de metal fica um pouco mais comprida; a resistência elétrica de um fio aumenta e o mesmo acontece com a pressão de um gás confinado. Qualquer dessas mudanças pode ser usada como base de um instrumento que nos ajude a compreender o conceito de temperatura.

A Fig. 18-2 mostra um instrumento desse tipo. Um engenheiro habilidoso poderia construí-lo usando qualquer das propriedades mencionadas no parágrafo anterior. O instrumento dispõe de um mostrador digital e tem as seguintes características: quando é aquecido (com um bico de Bunsen, digamos), o número do mostrador aumenta; quando é colocado em uma geladeira, o número diminui. O instrumento não está calibrado e os números não têm (ainda) um significado físico. Esse aparelho é um *termoscópio*, mas não é (ainda) um *termômetro*.

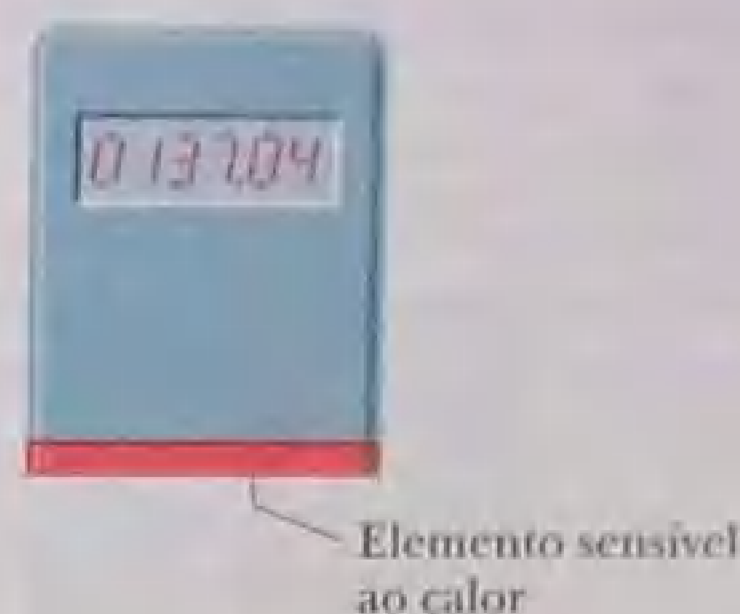


Figura 18-2 Um termoscópio. Os números aumentam quando o dispositivo é aquecido e diminuem quando é resfriado. O sensor térmico pode ser, entre outras coisas, um fio cuja resistência elétrica é medida e indicada no mostrador.

Suponha que, como na Fig. 18-3*a*, o termoscópio (que vamos chamar de corpo *T*) seja posto em contato com outro corpo (corpo *A*). O sistema inteiro está contido em uma caixa feita de material isolante. Os números mostrados pelo termoscópio variam até, finalmente, se estabilizarem (digamos que a leitura final seja "137,04"). Vamos supor, na verdade, que todas as propriedades mensuráveis do corpo *T* e do corpo *A* tenham assumido, após um certo tempo, um valor constante. Quando isso acontece, dizemos que os dois corpos estão em *equilíbrio térmico*. Embora as leituras mostradas para o corpo *T* não tenham sido calibradas, concluímos que os corpos *T* e *A* estão à mesma temperatura (desconhecida).

Suponha que, em seguida, o corpo *T* seja posto em contato com o corpo *B* (Fig. 18-3*b*) e *a leitura do termoscópio seja a mesma* quando os dois atingem o equilíbrio térmico. Isso significa que os corpos *T* e *B* estão à mesma temperatura (ainda desconhecida). Se colocarmos os corpos *A* e *B* em contato (Fig. 18-3*c*), eles já estarão em equilíbrio térmico? Experimentalmente, verificamos que sim.

O fato experimental ilustrado na Fig. 18-3 é expresso pela **lei zero da termodinâmica**:

> Se dois corpos *A* e *B* estão separadamente em equilíbrio térmico com um terceiro corpo *T*, *A* e *B* estão em equilíbrio térmico entre si.

Em uma linguagem menos formal, o que a lei zero nos diz é o seguinte: "Todo corpo possui uma propriedade chamada de **temperatura**. Quando dois corpos estão em equilíbrio térmico, suas temperaturas são iguais e vice-versa." Podemos agora transformar nosso termoscópio (o terceiro corpo *T*) em um termômetro, confiantes de que suas leituras têm um significado físico. Tudo que precisamos fazer é calibrá-lo.

Usamos a lei zero constantemente no laboratório. Quando desejamos saber se os líquidos em dois recipientes estão à mesma temperatura, medimos a temperatura de cada um com um termômetro; não precisamos colocar os dois líquidos em contato e observar se estão ou não em equilíbrio térmico.

A lei zero, considerada uma descoberta tardia, foi formulada apenas na década de 1930, muito depois de a primeira e segunda lei da termodinâmica terem sido descobertas e numeradas. Como o conceito de temperatura é fundamental para essas duas leis, a lei que estabelece a temperatura como um conceito válido deve ter uma numeração menor; por isso o zero.

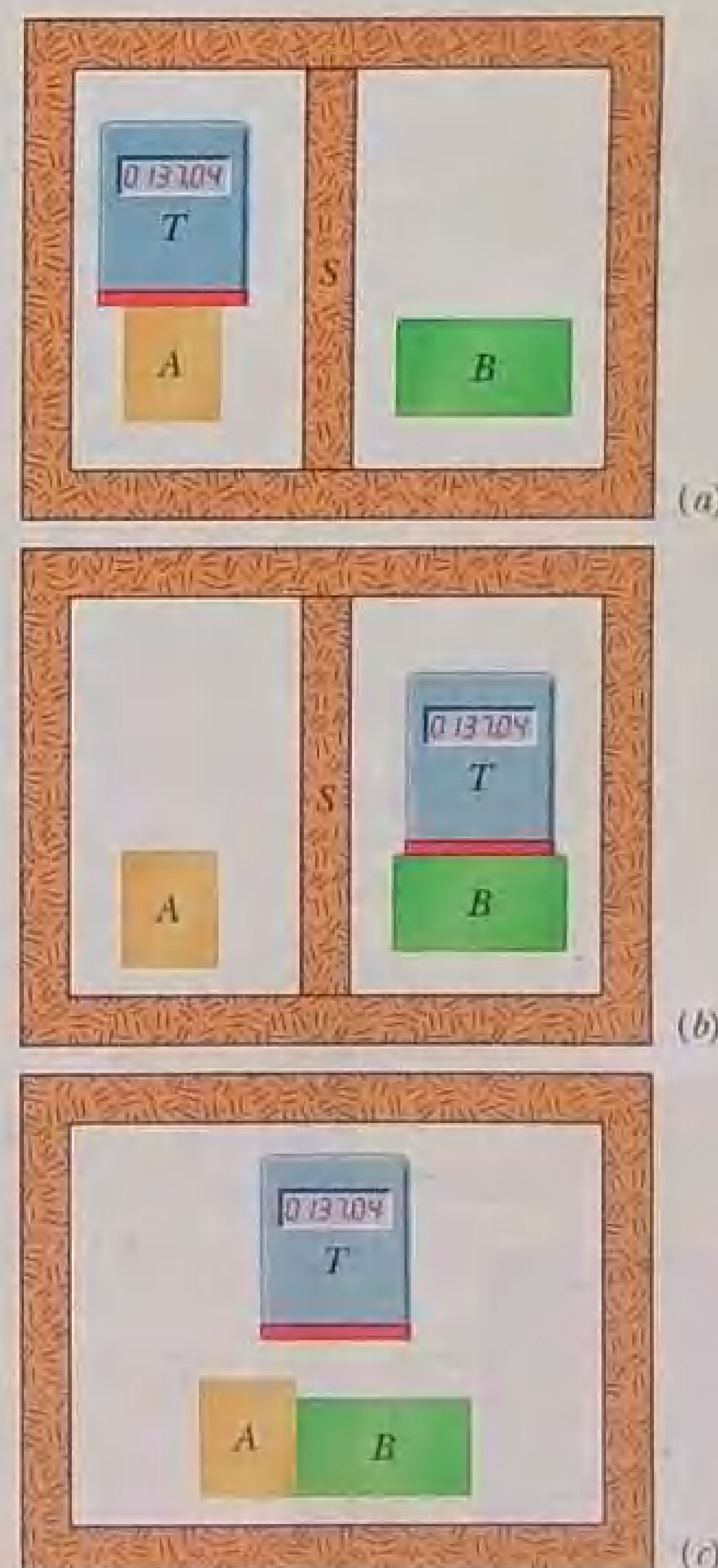


Figura 18-3 (*a*) O corpo *T* (um termoscópio) e o corpo *A* estão em equilíbrio térmico. (O corpo *S* é um isolante térmico.) (*b*) O corpo *T* e o corpo *B* também estão em equilíbrio térmico e produzem a mesma leitura do termoscópio. (*c*) Se (*a*) e (*b*) são verdadeiros, a lei zero da termodinâmica estabelece que o corpo *A* e o corpo *B* também estão em equilíbrio térmico.

18-4 Medindo a Temperatura

Vamos primeiro definir e medir temperaturas na escala Kelvin para, em seguida, calibrar um termoscópio e transformá-lo em um termômetro.

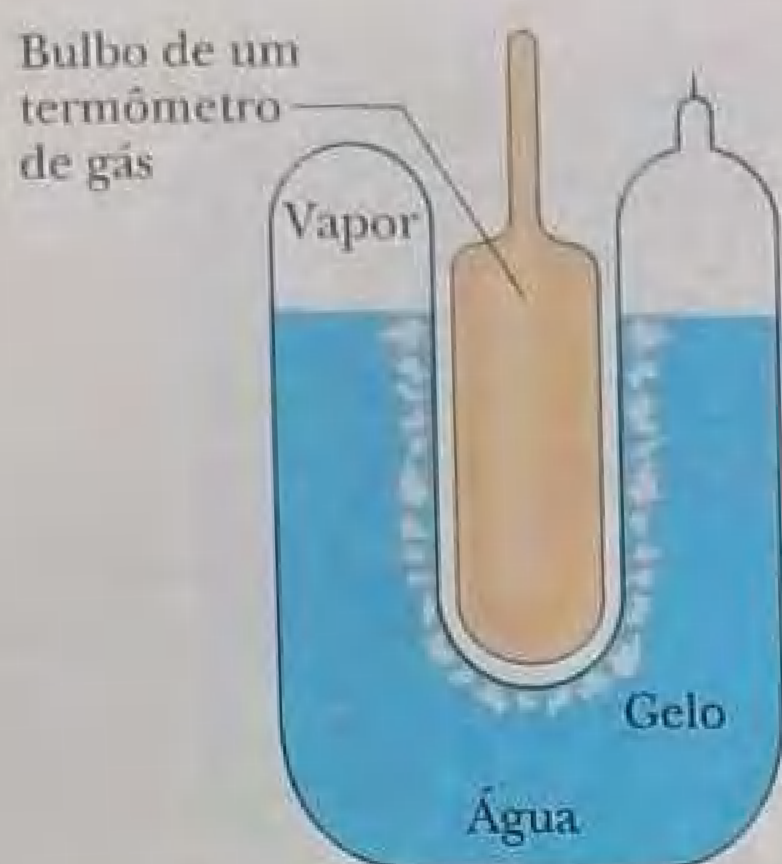


Figura 18-4 Uma célula de ponto triplo, na qual gelo (sólido), água (líquido) e vapor (gás) estão em equilíbrio térmico. Por acordo internacional, a temperatura desta mistura foi definida como 273,16 K. O bulbo de um termômetro de gás a volume constante é mostrado no centro da célula.

O Ponto Triplo da Água

Para criar uma escala de temperatura, escolhemos um fenômeno térmico reprodutível e, arbitrariamente, atribuímos a ele uma *temperatura*. Poderíamos, por exemplo, escolher o ponto de fusão do gelo ou o ponto de ebulição da água, mas, por razões técnicas, optamos pelo **ponto triplo da água**.

A água, o gelo e o vapor d'água podem coexistir, em equilíbrio térmico, para apenas um conjunto de valores de pressão e temperatura. A Fig. 18-4 mostra uma célula de ponto triplo, na qual este chamado ponto triplo da água pode ser obtido em laboratório. Por acordo internacional, foi atribuído ao ponto triplo da água o valor de 273,16 K como a temperatura-padrão para a calibração dos termômetros, ou seja,

$$T_3 = 273{,}16\ \text{K} \qquad \text{(temperatura do ponto triplo)}, \tag{18-1}$$

onde o índice 3 significa "ponto triplo". Este acordo também estabelece o valor do kelvin como 1/273,16 da diferença entre o zero absoluto e a temperatura do ponto triplo da água.

Note que não usamos o símbolo de grau ao expressar temperaturas na escala Kelvin. Escrevemos 300 K (e não 300°K) e devemos ler a temperatura como "300 kelvins" (e não como "300 graus kelvin"). Os prefixos usados para as outras unidades do SI podem ser usados; assim, 3,5 mK significa 0,0035 K. Não há nomenclaturas distintas para temperaturas na escala Kelvin e diferenças de temperatura, de modo que podemos escrever "a temperatura de fusão do enxofre é 717,8 K" e "a temperatura deste líquido aumentou 8,5 K."

O Termômetro de Gás a Volume Constante

O termômetro-padrão, em relação ao qual todos os outros termômetros são calibrados, se baseia na pressão de um gás em um volume fixo. A Fig. 18-5 mostra um **termômetro de gás a volume constante**; ele é composto por um bulbo cheio de gás ligado por um tubo a um manômetro de mercúrio. Levantando ou baixando o reservatório *R*, é sempre possível fazer com que o nível de mercúrio no lado esquerdo do tubo em U fique no zero da escala para manter o volume do gás constante (variações do volume do gás afetariam as medidas de temperatura).

A temperatura de qualquer corpo em contato térmico com o bulbo (como, por exemplo, o líquido em torno do bulbo na Fig. 18-5) é definida como

$$T = Cp, \tag{18-2}$$

onde p é a pressão exercida pelo gás e C é uma constante. De acordo com a Eq. 14-10, a pressão p é dada por

$$p = p_0 - \rho g h, \tag{18-3}$$

onde p_0 é a pressão atmosférica, ρ é a massa específica do mercúrio e h é a diferença entre os níveis de mercúrio medida nos dois lados do tubo.* (O sinal negativo é usado na Eq. 18-3 porque a pressão p é medida *acima* do nível no qual a pressão é p_0.)

Se o bulbo é introduzido em uma célula de ponto triplo (Fig. 18-4), a temperatura medida é

$$T_3 = Cp_3, \tag{18-4}$$

onde p_3 é a pressão do gás. Eliminando C nas Eqs. 18-2 e 18-4, obtemos uma equação para a temperatura em função de p e p_3:

$$T = T_3\left(\frac{p}{p_3}\right) = (273{,}16\ \text{K})\left(\frac{p}{p_3}\right) \qquad \text{(provisória)}. \tag{18-5}$$

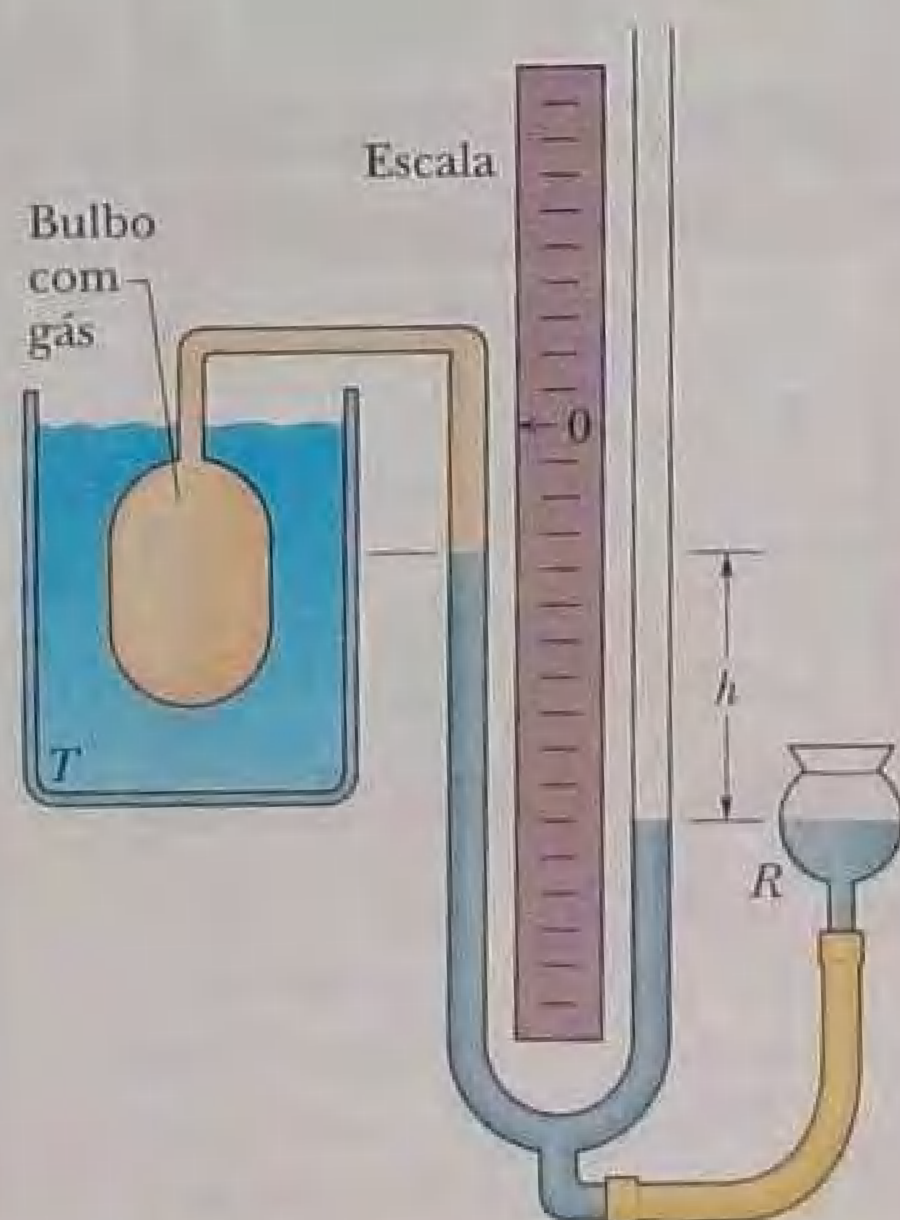


Figura 18-5 Um termômetro de gás a volume constante, com o bulbo imerso em um líquido cuja temperatura T se pretende medir.

* Vamos usar como unidade de pressão o pascal (Pa), definido na Seção 14-3, cuja relação com outras unidades comuns de pressão é a seguinte:

$$1\ \text{atm} = 1{,}01 \times 10^5\ \text{Pa} = 760\ \text{torr} = 14{,}7\ \text{lb/in}^2.$$

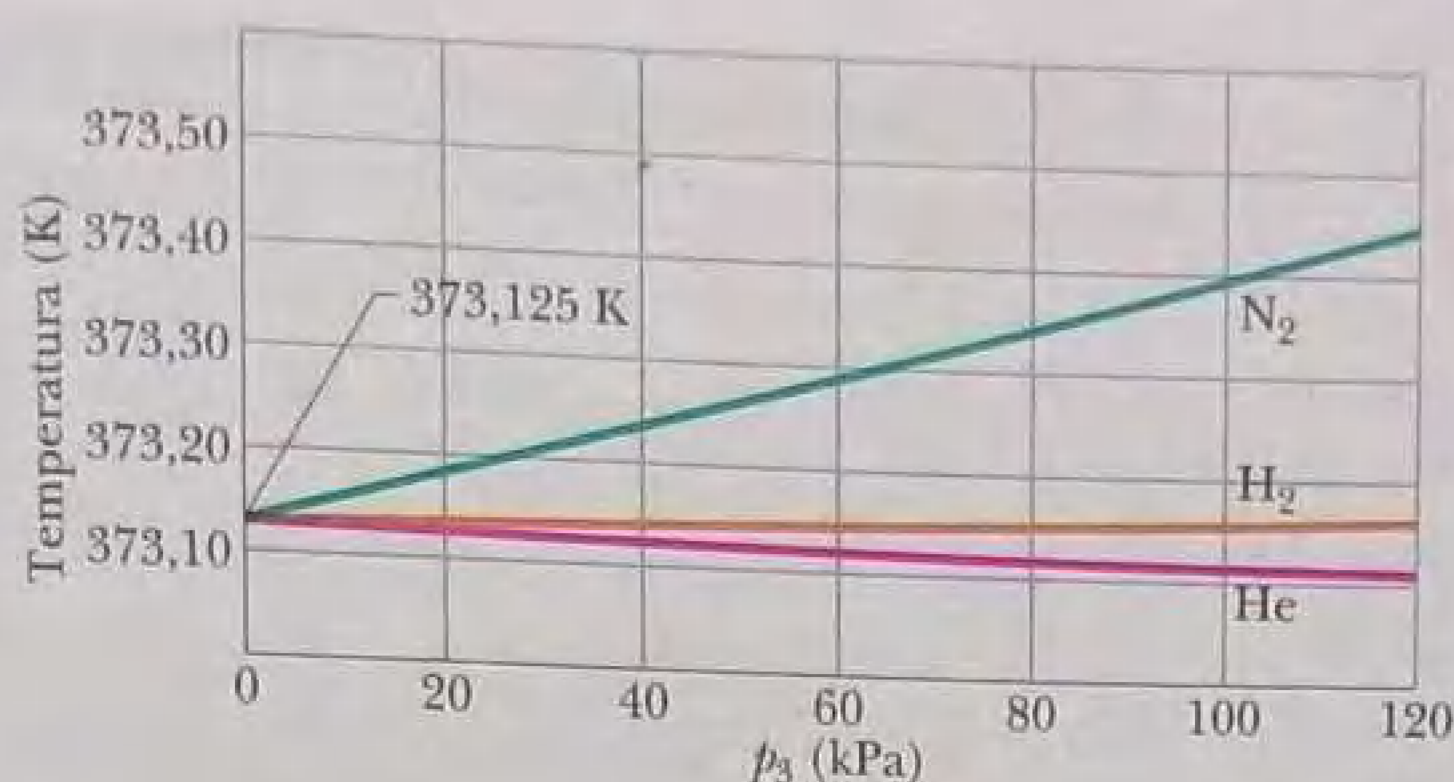


Figura 18-6 Temperaturas medidas por um termômetro de gás a volume constante, com o bulbo imerso em água fervente. Para calcular a temperatura usando a Eq. 18-5, a pressão p_3 foi medida no ponto triplo da água. Três gases diferentes no bulbo do termômetro fornecem resultados diferentes para diferentes pressões do gás, mas quando a quantidade de gás é reduzida (o que diminui o valor de p_3), as três curvas convergem para 373,125 K.

Ainda temos um problema com este termômetro. Se o usamos para medir, digamos, o ponto de ebulição da água, descobrimos que gases diferentes no bulbo fornecem resultados ligeiramente diferentes. Entretanto, quando usamos quantidades cada vez menores de gás no interior do bulbo, as leituras convergem para uma única temperatura, seja qual for o gás utilizado. A Fig. 18-6 mostra essa convergência para três gases.

Assim, a receita para medir a temperatura com um termômetro de gás é a seguinte:

$$T = (273{,}16\ \text{K})\left(\lim_{\text{gás}\to 0} \frac{p}{p_3}\right). \tag{18-6}$$

A receita ensina a medir uma temperatura T desconhecida da seguinte forma: encha o bulbo do termômetro com uma quantidade arbitrária de *qualquer* gás (nitrogênio, por exemplo) e meça p_3 (usando uma célula de ponto triplo) e p, a pressão do gás na temperatura que está sendo medida. (Mantenha constante o volume do gás.) Calcule a razão p/p_3. Repita as medidas com uma quantidade menor do gás no bulbo e calcule a nova razão. Repita o procedimento usando quantidades cada vez menores de gás até poder extrapolar para a razão p/p_3 que seria obtida se não houvesse gás no bulbo. Calcule a temperatura T substituindo essa razão extrapolada na Eq. 18-6. (A temperatura é chamada de *temperatura de gás ideal.*)

18-5 As Escalas Celsius e Fahrenheit

Até agora, consideramos apenas a escala Kelvin, usada principalmente pelos cientistas. Em quase todos os países do mundo, a escala Celsius (chamada antigamente de escala centígrada) é a escala mais usada no dia a dia. As temperaturas na escala Celsius são medidas em graus e o grau Celsius tem o mesmo valor numérico que o kelvin. Entretanto, o zero da escala Celsius está em um valor mais conveniente que o zero absoluto. Se T_C representa uma temperatura na escala Celsius e T a mesma temperatura na escala Kelvin,

$$T_C = T - 273{,}15°. \tag{18-7}$$

Quando expressamos temperaturas na escala Celsius, usamos o símbolo de grau. Assim, escrevemos 20,00°C (que se lê como "20,00 graus Celsius") para uma temperatura na escala Celsius, mas 293,15 K (que se lê como "293,15 kelvins") para a mesma temperatura na escala Kelvin.

A escala Fahrenheit, a mais comum nos Estados Unidos, utiliza um grau menor que o grau Celsius e um zero de temperatura diferente. A relação entre as escalas Celsius e Fahrenheit é a seguinte:

$$T_F = \tfrac{9}{5}T_C + 32°, \tag{18-8}$$

em que T_F é a temperatura em graus Fahrenheit. A conversão entre as duas escalas pode ser feita com facilidade a partir de dois pontos de referência (pontos de congelamento e de ebulição da água), mostrados na Tabela 18-1. As escalas Kelvin, Celsius e Fahrenheit são comparadas na Fig. 18-7.

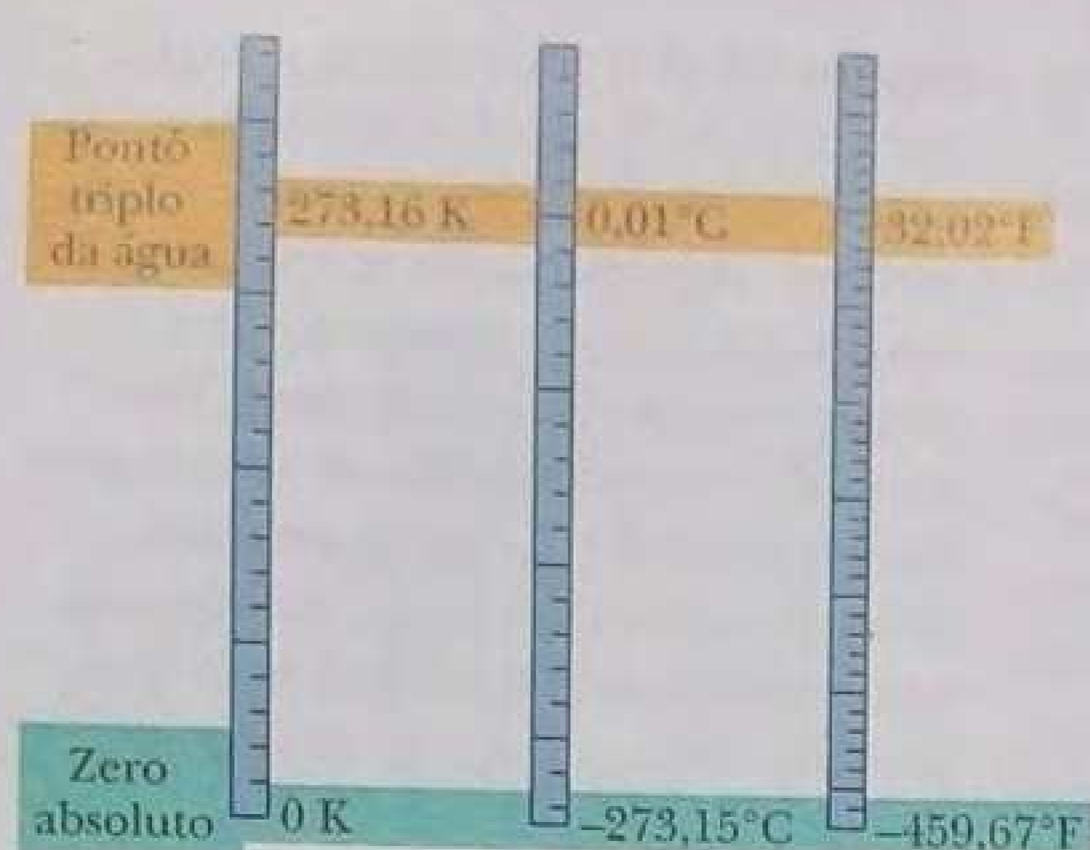


Figura 18-7 Comparação entre as escalas Kelvin, Celsius e Fahrenheit de temperatura.

Tabela 18-1

Correspondência entre Algumas Temperaturas

Temperatura	°C	°F
Ponto de ebulição da água[a]	100	212
Temperatura normal do corpo	37,0	98,6
Temperatura confortável	20	68
Ponto de congelamento da água[a]	0	32
Zero da escala Fahrenheit	≈ −18	0
Coincidência das escalas	−40	−40

[a]Estritamente falando, o ponto de ebulição da água na escala Celsius é 99,975°C e o ponto de congelamento é 0,00°C. Assim, existem ligeiramente menos de 100 C° entre esses dois pontos.

A posição do símbolo de grau em relação às letras C e F é usada para distinguir medidas e graus nas duas escalas. Assim,

$$0°C = 32°F$$

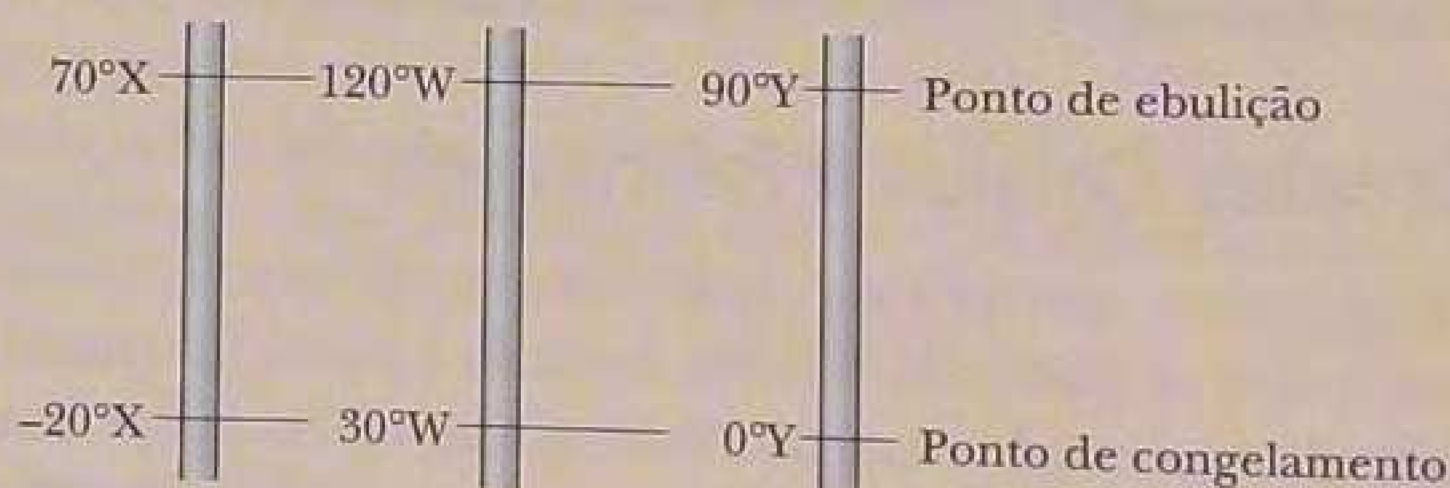
significa que uma temperatura de 0° na escala Celsius equivale uma temperatura de 32° na escala Fahrenheit, enquanto

$$5\ C° = 9\ F°$$

significa que uma diferença de temperatura de 5 graus Celsius (observe que, nesse caso, o símbolo de grau aparece *depois* do C) equivale a uma diferença de temperatura de 9 graus Fahrenheit.

TESTE 1

A figura mostra três escalas lineares de temperatura, com os pontos de congelamento e ebulição da água indicados. (a) Ordene os graus dessas escalas de acordo com o tamanho, em ordem decrescente. (b) Ordene as seguintes temperaturas, em ordem decrescente: 50°X, 50°W e 50°Y.



Exemplo

Conversão de uma escala de temperatura para outra

Suponha que você encontre anotações antigas que descrevem uma escala de temperatura chamada de Z na qual o ponto de ebulição da água é 65,0°Z e o ponto de congelamento é 214,0°Z. A que temperatura na escala Fahrenheit corresponde uma temperatura $T = -98{,}0°Z$? Suponha que a escala Z é linear, ou seja, que o tamanho de um grau Z é o mesmo em toda a escala Z.

IDEIA-CHAVE

Como as duas escalas são lineares, o fator de conversão pode ser calculado usando duas temperaturas conhecidas nas duas escalas, como os pontos de ebulição e congelamento da água. O número de graus entre as temperaturas conhecidas em uma escala é equivalente ao número de graus entre elas na outra escala.

Cálculos Começamos por relacionar a temperatura dada T a *uma* das temperaturas conhecidas da escala Z. Como $T = -98{,}0°Z$ está mais próximo do ponto de congelamento (−14,0°Z) que do ponto de ebulição (65,0°Z), escolhemos o ponto de congelamento. Observamos que T está $-14{,}0°Z - (-98{,}0°Z) = 84{,}0°Z$ (Fig. 18-8) *abaixo do ponto de congelamento*. (Essa diferença pode ser lida como "84,0 graus Z".)

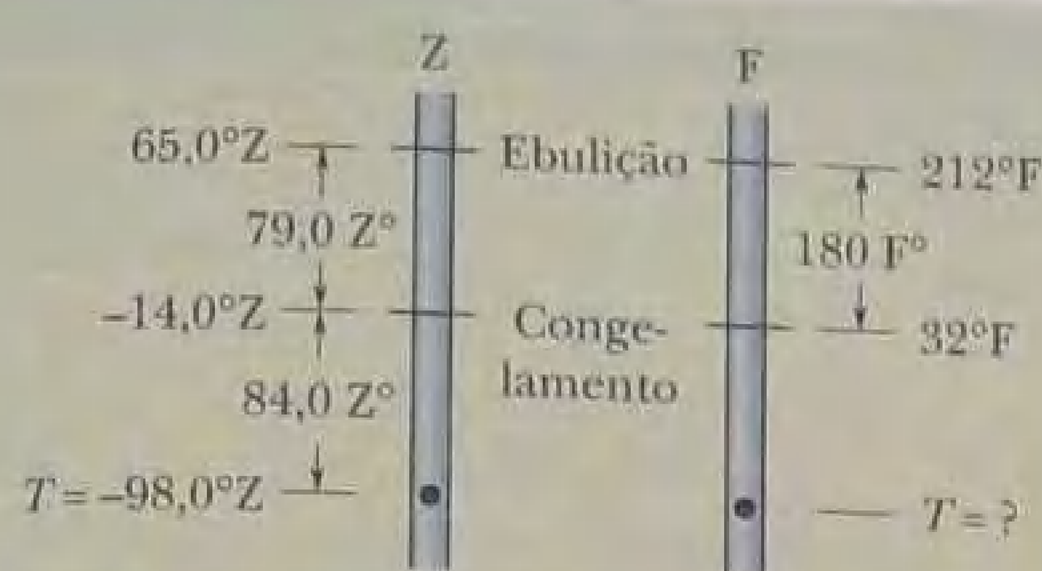


Figura 18-8 Comparação entre uma escala de temperatura desconhecida e a escala Fahrenheit.

O passo seguinte consiste em determinar um fator de conversão entre as escalas Z e Fahrenheit. Para isso, usamos *as duas* temperaturas conhecidas na escala Z e as correspondentes temperaturas na escala Fahrenheit. Na escala Z, a diferença entre os pontos de ebulição e de congelamento é $65,0°Z - (-14,0°Z) = 79,0$ Z°. Na escala Fahrenheit, é $212°F - 32,0°F = 180$ F°. Assim, uma diferença de temperatura de 79 Z° equivale a uma diferença de temperatura de 180 F° (Fig. 18-8) e podemos usar a razão (180 F°/79,0 Z°) como fator de conversão.

Como T está 84,0 Z° abaixo do ponto de congelamento, deve estar abaixo do ponto de congelamento

$$(84,0\ Z°)\frac{180\ F°}{79,0\ Z°} = 191\ F°.$$

Como o ponto de congelamento corresponde a 32,0°F, isto significa que

$$T = 32,0°F - 191\ F° = -159°F. \quad \text{(Resposta)}$$

18-6 Dilatação Térmica

Às vezes, para conseguir desatarraxar a tampa metálica de um pote de vidro, basta colocar o pote debaixo de uma torneira de água quente. Tanto o metal da tampa quanto o vidro do pote se expandem quando a água quente fornece energia aos átomos. (Com a energia adicional, os átomos se afastam mais uns dos outros, atingindo um novo ponto de equilíbrio com as forças elásticas interatômicas que mantêm os átomos unidos em um sólido.) Entretanto, como os átomos no metal se afastam mais uns dos outros que os átomos do vidro, a tampa se dilata mais do que o pote e, portanto, fica frouxa.

A **dilatação térmica** dos materiais com o aumento de temperatura deve ser levada em conta em muitas situações da vida prática. Quando uma ponte está sujeita a grandes variações de temperatura ao longo do ano, por exemplo, é dividida em trechos separados por *juntas de dilatação* para que o concreto possa se expandir nos dias quentes sem que a ponte se deforme. O material usado nas obturações dentárias deve ter as mesmas propriedades de dilatação térmica que o dente para que o paciente possa beber um café quente ou tomar um sorvete sem sofrer consequências desagradáveis. Quando o jato supersônico Concorde (Fig. 18-9) foi construído, o projeto teve que levar em conta a dilatação térmica da fuselagem provocada pelo atrito com o ar durante o voo.

As propriedades de dilatação térmica de alguns materiais podem ter aplicações práticas. Alguns termômetros e termostatos utilizam a diferença na dilatação dos componentes de uma *tira bimetálica* (Fig. 18-10). Os termômetros clínicos e meteorológicos se baseiam no fato de que líquidos como o mercúrio e o álcool se dilatam mais do que os tubos de vidro que os contêm.



Figura 18-9 Quando um Concorde voava mais depressa que a velocidade do som, a dilatação térmica produzida pelo atrito com o ar aumentava o comprimento da aeronave de 12,5 cm. (A temperatura aumentava para 128°C no nariz e 90°C na cauda. Era possível sentir com a mão o aquecimento das janelas.) *(Hugh Thomas/BWP Media/ Getty Images News and Sport Services)*

Dilatação Linear

Se a temperatura de uma barra metálica de comprimento L aumenta de um valor ΔT, o comprimento aumenta de um valor

$$\Delta L = L\alpha\,\Delta T, \quad (18\text{-}9)$$

em que α é uma constante chamada de **coeficiente de dilatação linear**. A unidade do coeficiente α é o $C°^{-1}$ ou K^{-1}. Embora α varie ligeiramente com a temperatura, na maioria dos casos pode ser considerado constante para um dado material. A Tabela 18-2 mostra os coeficientes de dilatação linear de alguns materiais. Note que a unidade C° que aparece na tabela poderia ser substituída pela unidade K.

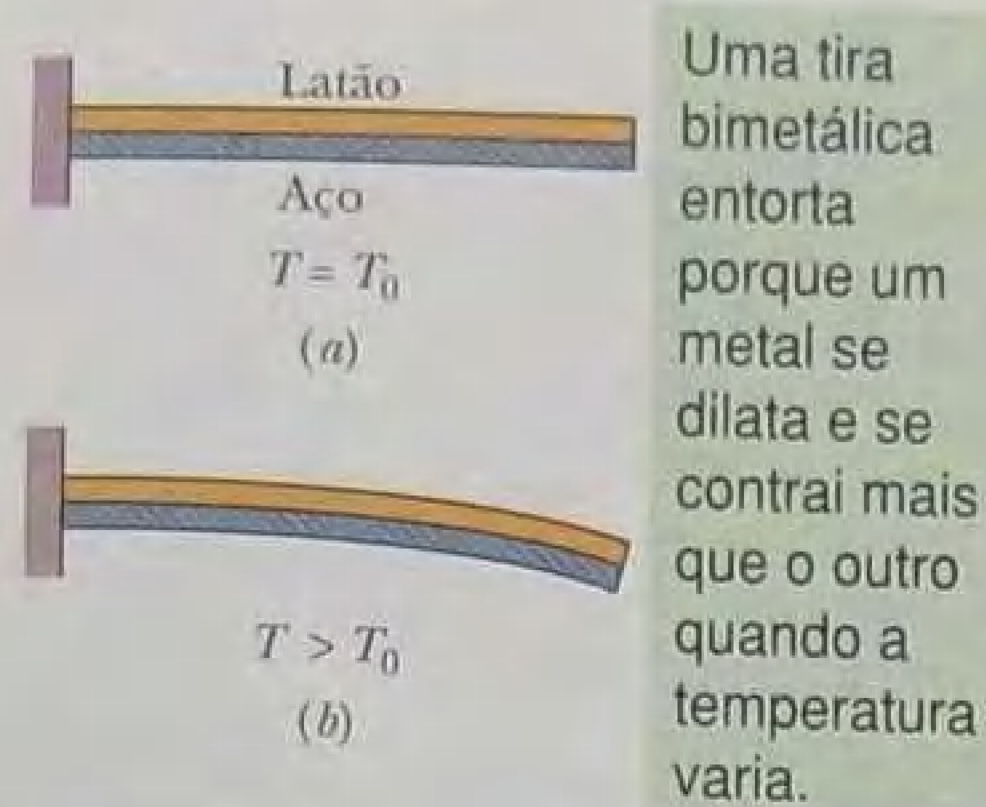


Figura 18-10 (*a*) Uma tira bimetálica, formada por uma tira de latão e uma tira de aço soldadas, à temperatura T_0. (*b*) Quando a temperatura é maior que a temperatura de referência, a tira se enverga para baixo, como na figura. Quando a temperatura é maior que a temperatura de referência, a tira se enverga para cima. Muitos termostatos funcionam com base nesse princípio, fazendo ou desfazendo um contato elétrico de acordo com a temperatura em que se encontram.

Tabela 18-2

Alguns Coeficientes de Dilatação Linear[a]

Substância	$\alpha(10^{-6}/C°)$	Substância	$\alpha(10^{-6}/C°)$
Gelo (a 0°C)	51	Aço	11
Chumbo	29	Vidro (comum)	9
Alumínio	23	Vidro (Pyrex)	3,2
Latão	19	Diamante	1,2
Cobre	17	Invar[b]	0,7
Concreto	12	Quartzo fundido	0,5

[a]Valores à temperatura ambiente, exceto no caso do gelo.
[b]Esta liga foi projetada para ter um baixo coeficiente de dilatação. O nome é uma abreviação de "invariável".

A dilatação térmica de um sólido é como a ampliação de uma fotografia, exceto pelo fato de que ocorre em três dimensões. A Fig. 18-11*b* mostra a dilatação térmica (exagerada) de uma régua de aço. A Eq. 18-9 se aplica a todas as dimensões lineares da régua, como as arestas, a espessura, as diagonais e os diâmetros de uma circunferência desenhada na régua e de um furo circular aberto na régua. Se o disco retirado do furo se ajusta perfeitamente ao furo, continua a se ajustar se sofrer o mesmo aumento de temperatura que a régua.

Dilatação Volumétrica

Se todas as dimensões de um sólido aumentam com a temperatura, é evidente que o volume do sólido também aumenta. No caso dos líquidos, a dilatação volumétrica é a única que faz sentido. Se a temperatura de um sólido ou de um líquido cujo volume é V aumenta de um valor ΔT, o aumento de volume correspondente é

$$\Delta V = V\beta\,\Delta T, \tag{18-10}$$

em que β é o **coeficiente de dilatação volumétrica** do sólido ou líquido. Os coeficientes de dilatação volumétrica e de dilatação linear de um sólido estão relacionados através da equação

$$\beta = 3\alpha. \tag{18-11}$$

O líquido mais comum, a água, não se comporta como os outros líquidos. Acima de 4°C, a água se dilata quando a temperatura aumenta, como era de se esperar. Entre 0 e 4°C, porém, a água se *contrai* quando a temperatura aumenta. Assim, por volta de 4°C, a massa específica da água passa por um máximo.

Esse comportamento da água é a razão pela qual os lagos congelam de cima para baixo e não o contrário. Quando a água da superfície é resfriada a partir de, digamos, 10°C, fica mais densa (mais "pesada") que a água mais abaixo e afunda. Para temperaturas menores que 4°C, porém, um resfriamento adicional faz com que a água que está na superfície fique *menos* densa (mais "leve") que a água mais abaixo e, portanto, essa água permanece na superfície até congelar. Assim, a água da superfície congela enquanto a água mais abaixo permanece líquida. Se os lagos congelassem

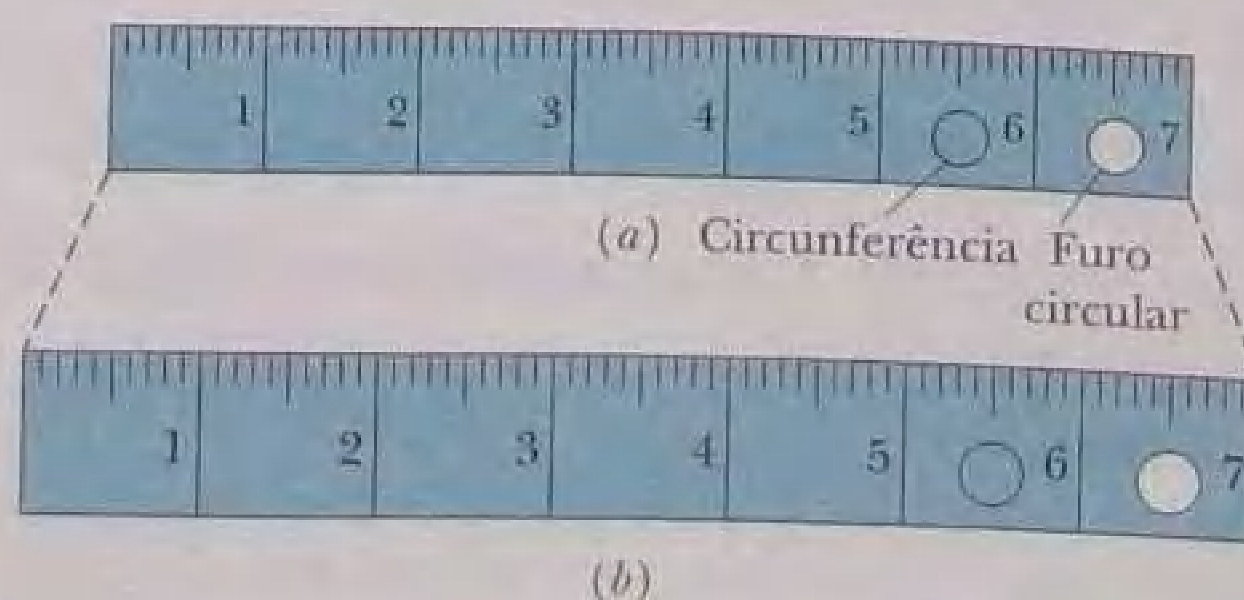
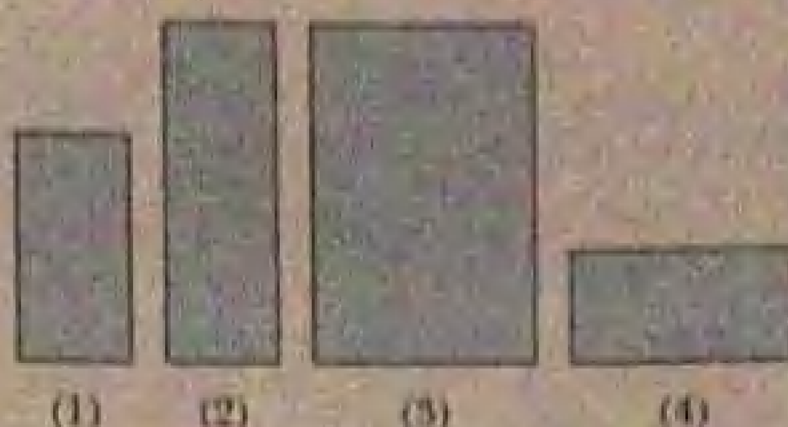


Figura 18-11 A mesma régua de aço em duas temperaturas diferentes. Quando a régua se dilata, a escala, os números, a espessura e os diâmetros da circunferência e do furo circular aumentam do mesmo fator. (A dilatação foi exagerada para tornar o desenho mais claro.)

de baixo para cima, o gelo assim formado não derreteria totalmente no verão, pois estaria isolado pela água mais acima. Após alguns anos, muitos mares e lagos nas zonas temperadas da Terra permaneceriam congelados o ano inteiro, o que tornaria impossível a vida aquática.

TESTE 2

A figura mostra quatro placas metálicas retangulares cujos lados têm comprimento L, $2L$ ou $3L$. São todas feitas do mesmo material e a temperatura aumenta do mesmo valor nas quatro placas. Ordene as placas de acordo com o aumento (a) da dimensão vertical e (b) da área, em ordem decrescente.



Exemplo

Dilatação volumétrica de um líquido

Em um dia quente em Las Vegas, um caminhão-tanque foi carregado com 37.000 L de óleo diesel. Encontrou tempo frio ao chegar a Payson, Utah, onde a temperatura estava 23,0 K abaixo da temperatura de Las Vegas, e onde entregou a carga. Quantos litros foram entregues? O coeficiente de dilatação volumétrica do óleo diesel é $9{,}50 \times 10^{-4}/\text{C}°$ e o coeficiente de dilatação linear do aço de que é feito o tanque do caminhão é $11 \times 10^{-6}/\text{C}°$.

IDEIA-CHAVE

O volume do óleo diesel é diretamente proporcional à temperatura. Como a temperatura diminuiu, o volume do combustível também diminuiu, de acordo com a Eq. 18-10 ($\Delta V = V\beta\Delta T$).

Cálculos Temos:

$$\Delta V = (37\,000\ \text{L})(9{,}50 \times 10^{-4}/\text{C}°)(-23{,}0\ \text{K}) = -808\ \text{L}.$$

Assim, o volume entregue foi

$$V_{ent} = V + \Delta V = 37\,000\ \text{L} - 808\ \text{L}$$
$$= 36\,190\ \text{L}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Note que a dilatação térmica do tanque de aço nada tem a ver com o problema. Pergunta: quem pagou pelo óleo diesel que "desapareceu"?

18-7 Temperatura e Calor

Se você pega uma lata de refrigerante na geladeira e a deixa na mesa da cozinha, a temperatura do refrigerante aumenta, a princípio rapidamente e depois mais devagar, até que se torne igual à do ambiente (ou seja, até que os dois estejam em equilíbrio térmico). Da mesma forma, a temperatura de uma xícara de café quente deixada sobre a mesa diminui até se tornar igual à temperatura ambiente.

Generalizando essa situação, descrevemos o refrigerante ou o café como um *sistema* (à temperatura T_S) e as partes relevantes da cozinha como o *ambiente* (à temperatura T_A) em que se encontra o sistema. Nossa observação é que, se T_S não é igual a T_A, T_S varia (T_A também pode variar um pouco) até que as duas temperaturas se igualem e o equilíbrio térmico seja estabelecido.

Essa variação de temperatura se deve a uma mudança da energia térmica do sistema por causa da troca de energia entre o sistema e o ambiente. (Lembre-se de que a *energia térmica* é uma energia interna que consiste na energia cinética e na energia potencial associadas aos movimentos aleatórios dos átomos, moléculas e outros corpos microscópicos que existem no interior de um objeto.) A energia transferida é chamada de **calor** e simbolizada pela letra Q. O calor é *positivo* se a energia é transferida do ambiente para a energia térmica do sistema (dizemos que o calor é absorvido pelo sistema). O calor é *negativo* quando a energia é transferida da energia térmica do sistema para o ambiente (dizemos que o calor é cedido ou perdido pelo sistema).

Essa transferência de energia é ilustrada na Fig. 18-12. Na situação da Fig. 18-12a, na qual $T_S > T_A$, a energia é transferida do sistema para o ambiente, de modo que Q é negativo. Na Fig. 18-12b, na qual $T_S = T_A$, não há transferência de energia, Q é zero e, portanto, não há calor cedido nem absorvido. Na Fig. 18-12c, na qual $T_S < T_A$, a transferência é do ambiente para o sistema e Q é positivo.

Chegamos, portanto, à seguinte definição de calor:



Calor é a energia trocada entre um sistema e o ambiente devido a uma diferença de temperatura.

Lembre-se de que a energia também pode ser trocada entre um sistema e o ambiente através do *trabalho* W realizado por uma força. Ao contrário da temperatura, pressão e volume, o calor e o trabalho não são propriedades intrínsecas de um sistema; têm significado apenas quando descrevem a transferência de energia para dentro ou para fora do sistema. Para fazer uma analogia, a expressão "uma transferência de R$ 600,00" pode ser usada para descrever a transferência de dinheiro de uma conta bancária para outra, mas não para informar o saldo de uma conta, já que o que se guarda em uma conta é dinheiro e não uma transferência. No caso do calor, é apropriado dizer: "Durante os últimos três minutos, 15 J de calor foram transferidos do sistema para o ambiente" ou "Durante o último minuto, um trabalho de 12 J foi realizado pelo ambiente sobre o sistema." Entretanto, não faz sentido dizer: "Este sistema possui 450 J de calor" ou "Este sistema contém 385 J de trabalho."

Antes que os cientistas percebessem que o calor é energia transferida, o calor era medido em termos da capacidade de aumentar a temperatura da água. Assim, a **caloria** (cal) foi definida como a quantidade de calor necessária para aumentar a temperatura de 1 g de água de 14,5°C para 15,5°C. No sistema inglês, a unidade de calor era a **British thermal unit** (Btu), definida como a quantidade de calor necessária para aumentar a temperatura de 1 libra de água de 63°F para 64°F.

Em 1948, a comunidade científica decidiu que, uma vez que o calor (como o trabalho) é energia transferida, a unidade de calor do SI deveria ser a mesma da energia,

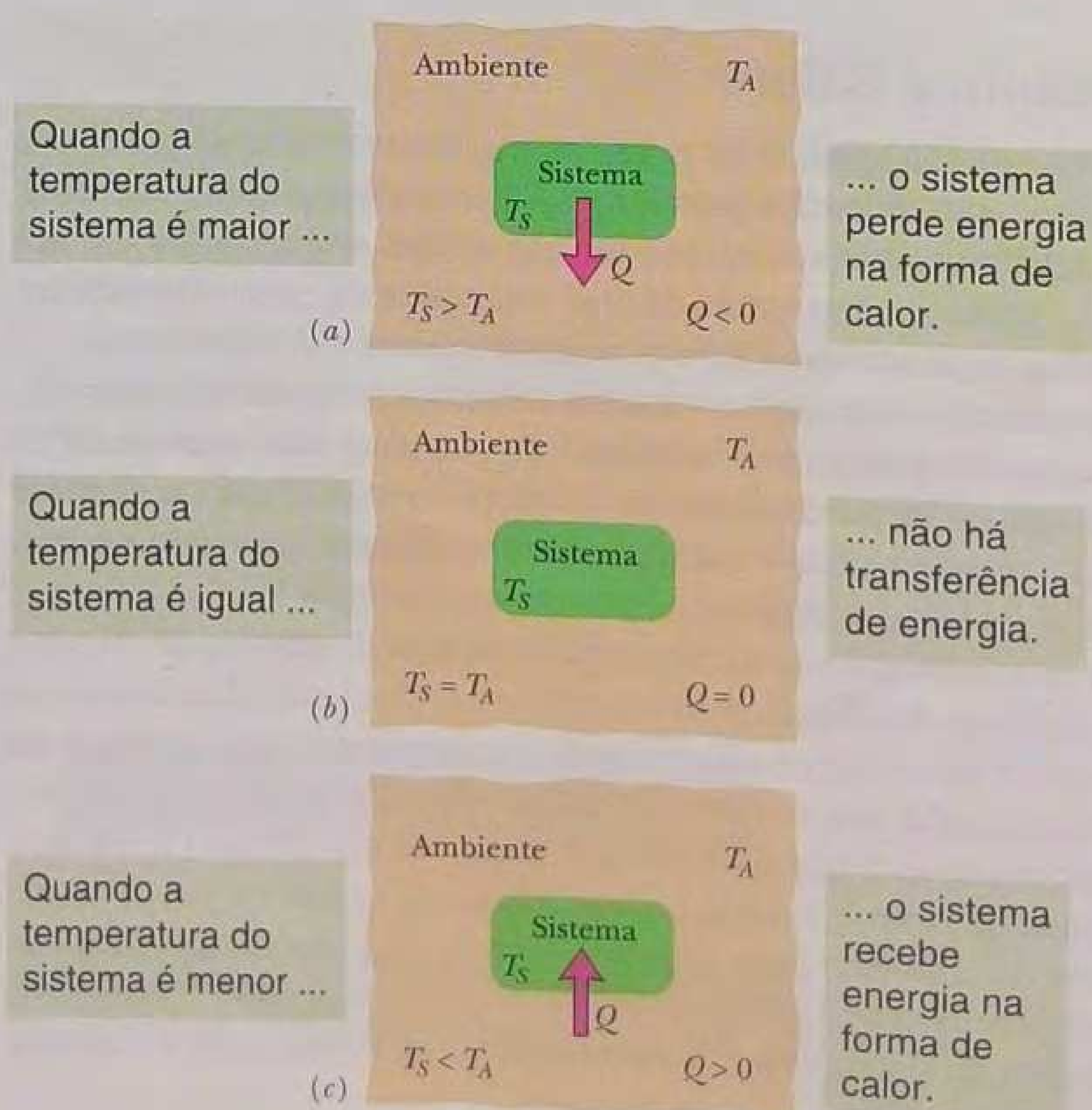


Figura 18-12 Se a temperatura de um sistema é maior que a temperatura ambiente, como em (a), uma certa quantidade Q de calor é perdida pelo sistema para o ambiente para que o equilíbrio térmico (b) seja restabelecido. (c) Se a temperatura do sistema é menor que a temperatura ambiente, uma certa quantidade de calor é absorvida pelo sistema para que o equilíbrio térmico seja restabelecido.

ou seja, o **joule**. A caloria é hoje definida como igual a 4,1868 J (exatamente), sem qualquer referência ao aquecimento da água. [A "caloria" usada pelos nutricionistas, às vezes chamada de Caloria (Cal), é equivalente a uma quilocaloria (1 kcal).] As relações entre as várias unidades de calor são as seguintes:

$$1 \text{ cal} = 3{,}968 \times 10^{-3} \text{ Btu} = 4{,}1868 \text{ J}. \quad (18\text{-}12)$$

18-8 A Absorção de Calor por Sólidos e Líquidos

Capacidade Térmica

A **capacidade térmica** C de um objeto é a constante de proporcionalidade entre o calor Q recebido ou cedido pelo objeto e a variação de temperatura ΔT do objeto, ou seja,

$$Q = C\,\Delta T = C(T_f - T_i), \quad (18\text{-}13)$$

em que T_i e T_f são as temperaturas inicial e final do objeto, respectivamente. A capacidade térmica C é medida em unidades de energia por grau ou energia por kelvin. A capacidade térmica C de uma pedra de mármore, por exemplo, pode ser 179 cal/C°, que também podemos escrever como 179 cal/K ou como 749 J/K.

A palavra "capacidade" neste contexto pode ser enganadora, pois sugere uma analogia com a capacidade que um balde possui de conter uma certa quantidade de água. *A analogia é falsa*; você não deve pensar que um objeto "contém" calor ou possui uma capacidade limitada de absorver calor. É possível transferir uma quantidade ilimitada de calor para um objeto, contanto que uma diferença de temperatura seja mantida. É claro, porém, que o objeto pode fundir ou evaporar no processo.

Calor Específico

Dois objetos feitos do mesmo material (mármore, digamos) têm uma capacidade térmica que é proporcional à sua massa. Assim, é conveniente definir a "capacidade térmica por unidade de massa", ou **calor específico** c, que se refere, não a um objeto, mas a uma massa unitária do material de que é feito o objeto. Nesse caso, a Eq. 18-13 se torna

$$Q = cm\,\Delta T = cm(T_f - T_i). \quad (18\text{-}14)$$

Experimentalmente, podemos observar que a capacidade térmica de uma certa pedra de mármore é 179 cal/C° (ou 749 J/K), mas o calor específico do mármore (nessa pedra ou em qualquer outro objeto feito de mármore) é 0,21 cal/g · C° (ou 880 J/kg · K).

De acordo com as definições de caloria e Btu, o calor específico da água é

$$c = 1 \text{ cal/g}\cdot\text{C°} = 1 \text{ Btu/lb}\cdot\text{F°} = 4186{,}8 \text{ J/kg}\cdot\text{K}. \quad (18\text{-}15)$$

A Tabela 18-3 mostra o calor específico de algumas substâncias à temperatura ambiente. Note que o calor específico da água é o maior da tabela. O calor específico de qualquer substância varia um pouco com a temperatura, mas os valores da Tabela 18-3 podem ser usados com precisão razoável em temperaturas próximas da temperatura ambiente.

Calor Específico Molar

Em muitas circunstâncias, a unidade mais conveniente para especificar a quantidade de uma substância é o mol, definido da seguinte forma:

$$1 \text{ mol} = 6{,}02 \times 10^{23} \text{ unidades elementares}$$

de *qualquer* substância. Assim, 1 mol de alumínio significa $6{,}02 \times 10^{23}$ átomos de Al (o átomo é a unidade elementar) e 1 mol de óxido de alumínio significa 6,02 ×

TESTE 3

Uma certa quantidade de calor Q aquece 1 g de uma substância A de 3C° e 1 g de uma substância B de 4C°. Qual das duas substâncias tem o maior calor específico?

Tabela 18-3

Alguns Calores Específicos e Calores Específicos Molares à Temperatura Ambiente

Substância	Calor Específico $\frac{cal}{g \cdot K}$	Calor Específico $\frac{J}{kg \cdot K}$	Calor Específico Molar $\frac{J}{mol \cdot K}$
Sólidos Elementares			
Chumbo	0,0305	128	26,5
Tungstênio	0,0321	134	24,8
Prata	0,0564	236	25,5
Cobre	0,0923	386	24,5
Alumínio	0,215	900	24,4
Outros Sólidos			
Latão	0,092	380	
Granito	0,19	790	
Vidro	0,20	840	
Gelo (−10°C)	0,530	2220	
Líquidos			
Mercúrio	0,033	140	
Etanol	0,58	2430	
Água do mar	0,93	3900	
Água doce	1,00	4187	

10^{23} fórmulas moleculares de Al_2O_3 (a fórmula molecular é a unidade elementar do composto).

Quando a quantidade de uma substância é expressa em mols, o calor específico deve ser expresso na forma de quantidade de calor por mol (e não por unidade de massa); nesse caso, é chamado de **calor específico molar**. A Tabela 18-3 mostra o calor específico molar de alguns sólidos elementares (formados por um único elemento) à temperatura ambiente.

Um Ponto Importante

Para determinar e utilizar corretamente o calor específico de uma substância, é preciso conhecer as condições em que ocorre a transferência de calor. No caso de sólidos e líquidos, em geral supomos que a amostra está submetida a uma pressão constante (normalmente, a pressão atmosférica) durante a transferência. Entretanto, também podemos imaginar que a amostra seja mantida com um volume constante durante a absorção de calor. Para isso, a dilatação térmica da amostra deve ser evitada pela aplicação de uma pressão externa. No caso de sólidos e líquidos, isso é muito difícil de executar experimentalmente, mas o efeito pode ser calculado, e verifica-se que a diferença entre os calores específicos à pressão constante e a volume constante é relativamente pequena. No caso dos gases, por outro lado, como vamos ver no próximo capítulo, os valores do calor específico à pressão constante e a volume constante são muito diferentes.

Calores de Transformação

Quando o calor é transferido para uma amostra sólida ou líquida, nem sempre a temperatura da amostra aumenta. Em vez disso, a amostra pode mudar de *fase* (ou de *estado*). A matéria pode existir em três estados principais. No *estado sólido*, os átomos ou moléculas do material formam uma estrutura rígida através de sua atração

mútua. No *estado líquido*, os átomos ou moléculas têm mais energia e maior mobilidade. Formam aglomerados transitórios, mas o material não tem uma estrutura rígida e pode escoar em um cano ou se acomodar à forma de um recipiente. No *estado gasoso*, os átomos ou moléculas têm uma energia ainda maior, não interagem, a não ser através de choques de curta duração, e podem ocupar todo o volume de um recipiente.

Fundir um sólido significa fazê-lo passar do estado sólido para o estado líquido. O processo requer energia porque os átomos ou moléculas do sólido devem ser liberados de sua estrutura rígida. A fusão de um cubo de gelo para formar água é um bom exemplo. *Solidificar* um líquido é o inverso de fundir e exige a retirada de energia do líquido para que os átomos ou moléculas voltem a formar a estrutura rígida de um sólido.

Vaporizar um líquido significa fazê-lo passar do estado líquido para o estado gasoso. Este processo, como o de fusão, requer energia porque os átomos ou moléculas devem ser liberados de seus aglomerados. Ferver a água para transformá-la em vapor é um bom exemplo. *Condensar* um gás é o inverso de vaporizar e exige a retirada de energia para que os átomos ou moléculas voltem a se aglomerar.

A quantidade de energia por unidade de massa que deve ser transferida na forma de calor para que uma amostra mude totalmente de fase é chamada de **calor de transformação** e representada pela letra L. Assim, quando uma amostra de massa m sofre uma mudança de fase, a energia total transferida é

$$Q = Lm. \qquad (18\text{-}16)$$

Quando a mudança é da fase líquida para a fase gasosa (caso em que a amostra absorve calor) ou da fase gasosa para a fase líquida (caso em que a amostra libera calor), o calor de transformação é chamado de **calor de vaporização** e representado pelo símbolo L_V. Para a água à temperatura normal de vaporização ou condensação,

$$L_V = 539 \text{ cal/g} = 40{,}7 \text{ kJ/mol} = 2256 \text{ kJ/kg}. \qquad (18\text{-}17)$$

Quando a mudança é da fase sólida para a fase líquida (caso em que a amostra absorve calor) ou da fase líquida para a fase sólida (caso em que a amostra libera calor), o calor de transformação é chamado de **calor de fusão** e representado pelo símbolo L_F. Para a água à temperatura normal de solidificação ou de fusão,

$$L_F = 79{,}5 \text{ cal/g} = 6{,}01 \text{ kJ/mol} = 333 \text{ kJ/kg}. \qquad (18\text{-}18)$$

A Tabela 18-4 mostra o calor de transformação de algumas substâncias.

Tabela 18-4

Alguns Calores de Transformação

	Fusão		Ebulição	
Substância	Ponto de Fusão (K)	Calor de Fusão L_F (kJ/kg)	Ponto de Ebulição (K)	Calor de Vaporização L_V (kJ/kg)
Hidrogênio	14,0	58,0	20,3	455
Oxigênio	54,8	13,9	90,2	213
Mercúrio	234	11,4	630	296
Água	273	333	373	2256
Chumbo	601	23,2	2017	858
Prata	1235	105	2323	2336
Cobre	1356	207	2868	4730

Exemplo

Equilíbrio térmico entre cobre e água

Um lingote de cobre de massa $m_c = 75$ g é aquecido em um forno de laboratório até a temperatura $T = 312°C$. Em seguida, o lingote é colocado em um béquer de vidro contendo uma massa $m_a = 220$ g de água. A capacidade térmica C_b do béquer é 45 cal/K. A temperatura inicial da água e do béquer é $T_i = 12°C$. Supondo que o lingote, o béquer e a água são um sistema isolado e que a água não é vaporizada, determine a temperatura final T_f do sistema quando o equilíbrio térmico é atingido.

IDEIAS-CHAVE

(1) Como o sistema é isolado, a energia total do sistema não pode mudar e apenas transferências internas de energia podem ocorrer. (2) Como nenhum componente do sistema sofre uma mudança de fase, as transferências de energia na forma de calor podem apenas mudar as temperaturas.

Cálculos Para relacionar as transferências de calor a mudanças de temperatura, usamos as Eqs. 18-13 e 18-14 para escrever

$$\text{para a água: } Q_a = c_a m_a (T_f - T_i); \quad (18\text{-}19)$$

$$\text{para o béquer: } Q_b = C_b (T_f - T_i); \quad (18\text{-}20)$$

$$\text{para o cobre: } Q_c = c_c m_c (T_f - T). \quad (18\text{-}21)$$

Como a energia total do sistema é constante, a soma das três transferências de energia é zero:

$$Q_a + Q_b + Q_c = 0. \quad (18\text{-}22)$$

Substituindo as Eqs. 18-19 a 18-21 na Eq. 18-22, obtemos:

$$c_a m_a (T_f - T_i) + C_b (T_f - T_i) + c_c m_c (T_f - T) = 0. \quad (18\text{-}23)$$

As temperaturas aparecem na Eq. 18-23 apenas na forma de diferenças. Como as diferenças nas escalas Celsius e Kelvin são iguais, podemos usar qualquer uma dessas escalas. Explicitando T_f, obtemos

$$T_f = \frac{c_c m_c T + C_b T_i + c_a m_a T_i}{c_a m_a + C_b + c_c m_c}.$$

Usando temperaturas Celsius e os valores de c_c e c_a da Tabela 18-3, obtemos para o numerador

$$(0{,}0923 \text{ cal/g}\cdot\text{K})(75 \text{ g})(312°\text{C}) + (45 \text{ cal/K})(12°\text{C}) + (1{,}00 \text{ cal/g}\cdot\text{K})(220 \text{ g})(12°\text{C}) = 5339{,}8 \text{ cal},$$

e para o denominador

$$(1{,}00 \text{ cal/g}\cdot\text{K})(220 \text{ g}) + 45 \text{ cal/K} + (0{,}0923 \text{ cal/g}\cdot\text{K})(75 \text{ g}) = 271{,}9 \text{ cal/C°}.$$

Assim, temos:

$$T_f = \frac{5339{,}8 \text{ cal}}{271{,}9 \text{ cal/C°}} = 19{,}6°\text{C} \approx 20°\text{C}. \quad \text{(Resposta)}$$

Substituindo os valores conhecidos nas Eqs. 18-19 a 18-21, obtemos

$$Q_a \approx 1670 \text{ cal}, \quad Q_b \approx 342 \text{ cal}, \quad Q_c \approx -2020 \text{ cal}.$$

A não ser pelos erros de arredondamento, a soma algébrica dessas três transferências de energia é realmente nula, como estabelece a Eq. 18-22.

Exemplo

Mudança de temperatura e de fase

(a) Que quantidade de calor deve absorver uma amostra de gelo de massa $m = 720$ g a $-10°C$ para passar ao estado líquido a 15°C?

IDEIAS-CHAVE

O processo de aquecimento ocorre em três etapas. (1) O gelo não pode fundir a uma temperatura abaixo do ponto de congelamento; assim, a energia transferida para o gelo na forma de calor apenas aumenta a temperatura do gelo até a temperatura chegar a 0°C. (2) A temperatura não pode passar de 0°C até que todo o gelo tenha fundido; assim, quando o gelo está a 0°C, toda a energia transferida para o gelo na forma de calor é usada para fundir o gelo. (3) Depois que todo o gelo funde, toda a energia transferida para a água é usada para aumentar a temperatura.

Aquecimento do gelo O calor Q_1 necessário para fazer a temperatura do gelo aumentar do valor inicial $T_i = -10°C$ para o valor final $T_f = 0°C$ (para que, depois, o gelo possa fundir) é dado pela Eq. 18-14 ($Q = cm\Delta T$). Usando o calor específico do gelo c_g da Tabela 18-3, obtemos

$$Q_1 = c_g m (T_f - T_i) = (2220 \text{ J/kg}\cdot\text{K})(0{,}720 \text{ kg})[0°\text{C} - (-10°\text{C})] = 15\,984 \text{ J} \approx 15{,}98 \text{ kJ}.$$

Fusão do gelo O calor Q_2 necessário para fundir todo o gelo é dado pela Eq. 18-16 ($Q = Lm$), onde L, nesse caso, é o calor de fusão L_F, com o valor dado na Eq. 18-18 e na Tabela 18-4. Temos:

$$Q_2 = L_F m = (333 \text{ kJ/kg})(0{,}720 \text{ kg}) \approx 239{,}8 \text{ kJ}.$$

Aquecimento da água O calor Q_3 necessário para fazer a temperatura da água aumentar do valor inicial $T_i = 0°C$

para o valor final $T_f = 15°C$ é dado pela Eq. 18-14 (com o calor específico da água c_a):

$$Q_3 = c_a m(T_f - T_i)$$
$$= (4186{,}8 \text{ J/kg}\cdot\text{K})(0{,}720 \text{ kg})(15°\text{C} - 0°\text{C})$$
$$= 45\,217 \text{ J} \approx 45{,}22 \text{ kJ}.$$

Total O calor total Q_{tot} necessário é a soma dos valores calculados nas três etapas:

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 + Q_3$$
$$= 15{,}98 \text{ kJ} + 239{,}8 \text{ kJ} + 45{,}22 \text{ kJ}$$
$$\approx 300 \text{ kJ}. \quad \text{(Resposta)}$$

Note que o calor necessário para fundir o gelo é muito maior que o calor necessário para aumentar a temperatura do gelo e da água.

(b) Se fornecermos ao gelo uma energia total de apenas 210 kJ (na forma de calor), quais serão o estado final e a temperatura da amostra?

IDEIA-CHAVE

Os resultados anteriores mostram que são necessários 15,98 kJ para aumentar a temperatura do gelo até o ponto de fusão. O calor restante Q_r é, portanto, 210 kJ − 15,98 kJ ou, aproximadamente, 194 kJ. Os resultados anteriores mostram que essa quantidade de calor não é suficiente para derreter todo o gelo. Como a fusão do gelo é incompleta, acabamos com uma mistura de gelo e água; a temperatura da mistura é a do ponto de fusão do gelo, 0°C.

Cálculos Podemos determinar a massa m do gelo que funde a partir da energia disponível Q_r usando a Eq. 18-16 com L_F:

$$m = \frac{Q_r}{L_F} = \frac{194 \text{ kJ}}{333 \text{ kJ/kg}} = 0{,}583 \text{ kg} \approx 580 \text{ g}.$$

Assim, a massa restante de gelo é 720 g − 580 g = 140 g e acabamos com

580 g de água e 140 g de gelo, a 0°C. (Resposta)

18-9 Calor e Trabalho

Vamos agora examinar de perto o modo como a energia pode ser transferida, na forma de calor e trabalho, de um sistema para o ambiente e vice-versa. Vamos tomar como sistema um gás confinado em um cilindro com um êmbolo, como na Fig. 18-13. A força para cima sobre o êmbolo devido à pressão do gás confinado é igual ao peso das esferas de chumbo colocadas sobre o êmbolo mais o peso do êmbolo. As paredes do cilindro são feitas de material isolante que não permite a transferência de energia na forma de calor. A base do cilindro repousa em um *reservatório térmico* (uma placa quente, por exemplo) cuja temperatura T pode ser controlada.

O sistema (gás) parte de um *estado inicial i*, descrito por uma pressão p_i, um volume V_i e uma temperatura T_i. Deseja-se levar o sistema a um *estado final f*, descrito por uma pressão p_f, um volume V_f e uma temperatura T_f. O processo de levar o sistema do estado inicial ao estado final é chamado de *processo termodinâmico*. Durante o processo, energia pode ser transferida do reservatório térmico para o sistema (calor positivo) ou vice-versa (calor negativo). Além disso, o sistema pode realizar trabalho sobre as esferas de chumbo, levantando o êmbolo (trabalho positivo) ou receber trabalho das esferas de chumbo (trabalho negativo). Vamos supor que todas as mudanças ocorrem lentamente, de modo que o sistema está sempre (aproximadamente) em equilíbrio térmico (ou seja, cada parte do sistema está em equilíbrio térmico com todas as outras partes).

Suponha que algumas esferas de chumbo sejam removidas do êmbolo da Fig. 18-13, permitindo que o gás empurre o êmbolo e as esferas restantes para cima com uma força $\vec{F}$, que produz um deslocamento infinitesimal $d\vec{s}$. Como o deslocamento é pequeno, podemos supor que $\vec{F}$ é constante durante o deslocamento. Nesse caso, o módulo de $\vec{F}$ é igual a pA, onde p é a pressão do gás e A é a área do êmbolo. O trabalho infinitesimal dW realizado pelo gás durante o deslocamento é dado por

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s} = (pA)(ds) = p(A\,ds)$$
$$= p\,dV, \quad (18\text{-}24)$$

onde dV é a variação infinitesimal do volume do gás devido ao movimento do êm-

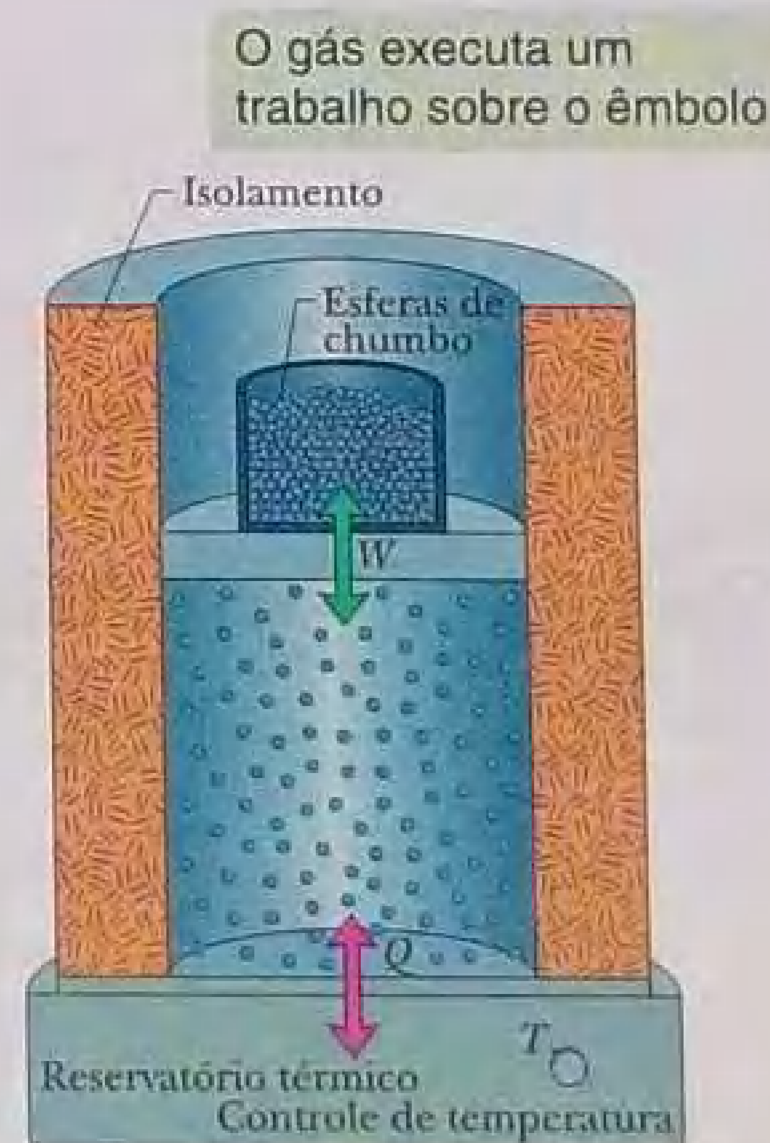


Figura 18-13 Um gás está confinado a um cilindro com um êmbolo móvel. Uma certa quantidade Q de calor pode ser adicionada ou removida do gás regulando a temperatura T do reservatório térmico ajustável. Uma certa quantidade de trabalho W pode ser realizada pelo gás ou sobre o gás levantando ou baixando o êmbolo.

bolo. Quando o número de esferas removidas é suficiente para que o volume varie de V_i para V_f, o trabalho realizado pelo gás é

$$W = \int dW = \int_{V_i}^{V_f} p\, dV. \tag{18-25}$$

Durante a variação de volume, a pressão e a temperatura do gás também podem variar. Para calcular diretamente a integral da Eq. 18-25, precisaríamos saber como a pressão varia com o volume no processo através do qual o sistema passa do estado *i* para o estado *f*.

Na prática, existem muitas formas de levar o gás do estado *i* para o estado *f*. Uma delas é mostrada na Fig. 18-14*a*, que é um gráfico da pressão do gás em função do volume, conhecido como diagrama *p-V*. Na Fig. 18-14*a*, a curva mostra que a pressão diminui com o aumento do volume. A integral da Eq. 18-25 (e, portanto, o trabalho *W* realizado pelo gás) é representada pela área sombreada sob a curva entre os pontos *i* e *f*. Independentemente do que fizermos exatamente para levar o gás do ponto *i* ao ponto *f*, esse trabalho será sempre positivo, já que o gás só pode aumentar de volume empurrando o êmbolo para cima, ou seja, realizando trabalho sobre o êmbolo.

Outra forma de levar o gás do estado *i* para o estado *f* é mostrada na Fig. 18-14*b*. Nesse caso, a mudança acontece em duas etapas: do estado *i* para o estado *a* e do estado *a* para o estado *f*.

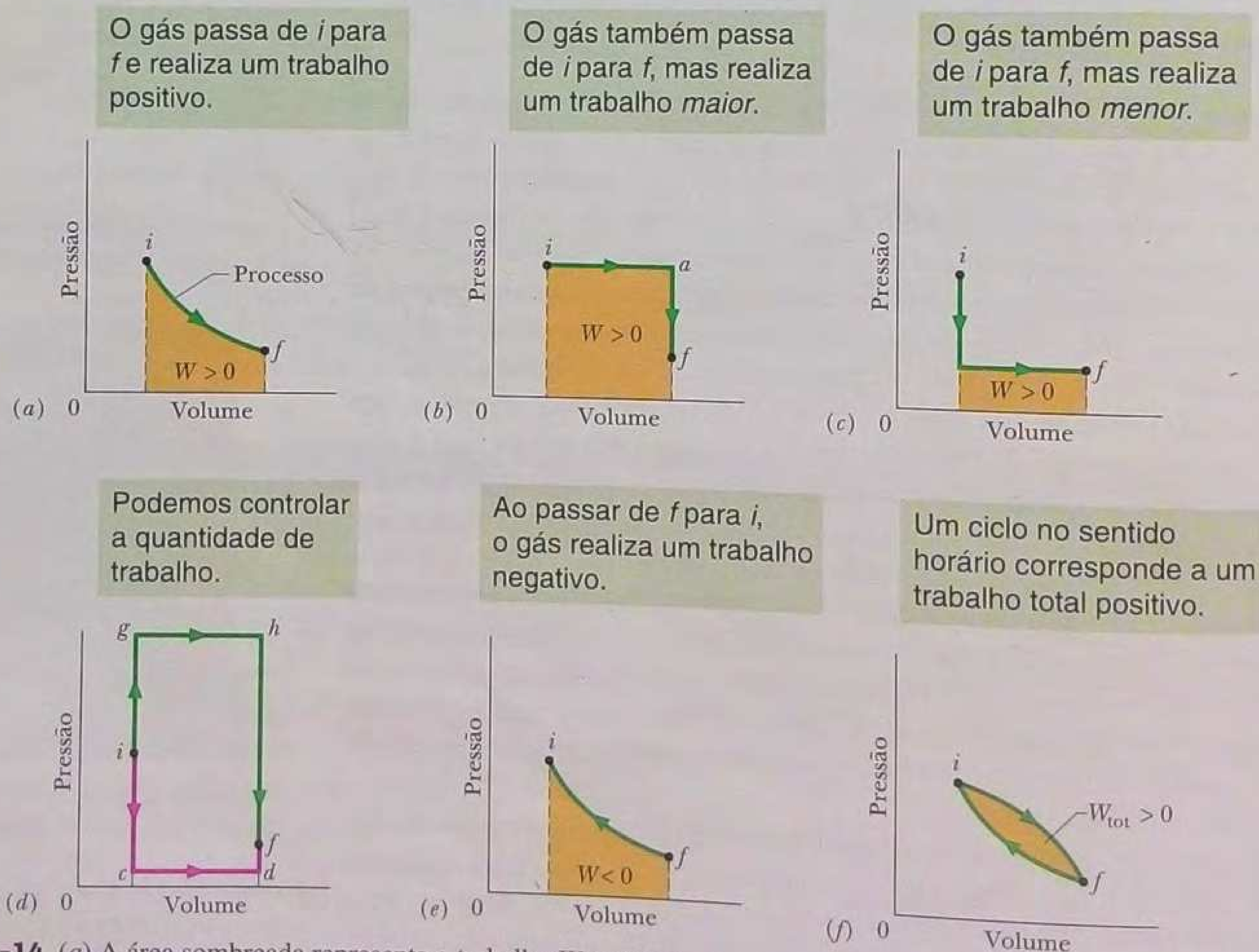


Figura 18-14 (*a*) A área sombreada representa o trabalho *W* realizado por um sistema ao passar de um estado inicial *i* para um estado final *f*. O trabalho *W* é positivo porque o volume do sistema aumenta. (*b*) *W* continua a ser positivo, mas agora é maior. (*c*) *W* continua a ser positivo, mas agora é menor. (*d*) *W* pode ser ainda menor (trajetória *icdf*) ou ainda maior (trajetória *ighf*). (*e*) Neste caso, o sistema vai do estado *f* para o estado *i* quando o gás é comprimido por uma força externa e o volume diminui; o trabalho *W* realizado pelo sistema é negativo. (*f*) O trabalho total W_{tot} realizado pelo sistema durante um ciclo completo é representado pela área sombreada.

A etapa *ia* deste processo acontece a pressão constante, o que significa que o número de esferas de chumbo sobre o êmbolo da Fig. 18-13 permanece constante. O aumento de volume (de V_i para V_f) é conseguido aumentando lentamente a temperatura do gás até um valor mais elevado T_a. (O aumento de temperatura aumenta a força que o gás exerce sobre o êmbolo, empurrando-o para cima.) Durante essa etapa, a expansão do gás realiza um trabalho positivo (levantar o êmbolo) e calor é absorvido pelo sistema a partir do reservatório térmico (quando a temperatura do reservatório térmico é aumentada lentamente). Esse calor é positivo porque é fornecido ao sistema.

A etapa *af* do processo da Fig. 18-14*b* acontece a volume constante, de modo que o êmbolo deve ser travado. A temperatura do reservatório térmico é reduzida lentamente e a pressão do gás diminui de p_a para o valor final p_f. Durante essa etapa, o sistema cede calor para o reservatório térmico.

Para o processo global *iaf*, o trabalho *W*, que é positivo e ocorre apenas durante o processo *ia*, é representado pela área sombreada sob a curva. A energia é transferida na forma de calor nas etapas *ia* e *af*, com uma transferência de energia líquida *Q*.

A Fig. 18-14*c* mostra um processo no qual os dois processos anteriores ocorrem em ordem inversa. O trabalho *W* nesse caso é menor que na Fig. 18-14*b* e o mesmo acontece com o calor total absorvido. A Fig. 18-14*d* mostra que é possível tornar o trabalho realizado pelo gás tão pequeno quanto se deseje (seguindo uma trajetória como *icdf*) ou tão grande quanto se deseje (seguindo uma trajetória como *ighf*).

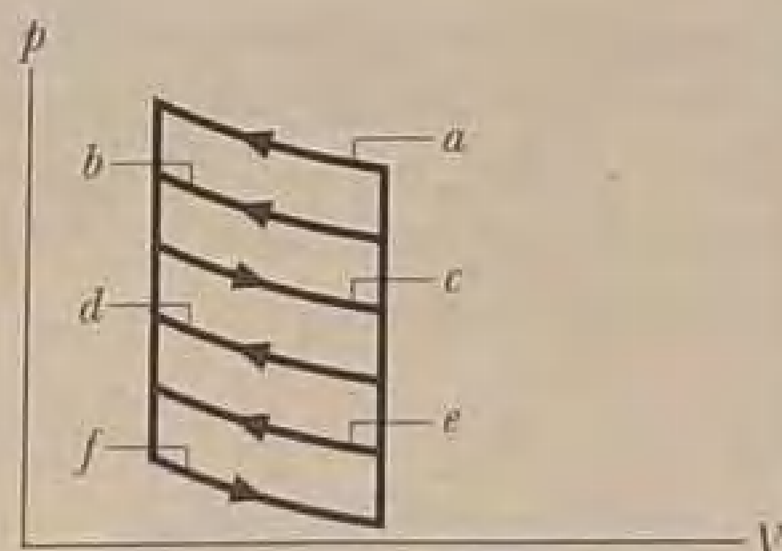
Resumindo: um sistema pode ser levado de um estado inicial para um estado final de um número infinito de formas e, em geral, o trabalho *W* e o calor *Q* têm valores diferentes em diferentes processos. Dizemos que o calor e o trabalho são grandezas *dependentes da trajetória*.

A Fig. 18-14*e* mostra um exemplo no qual um trabalho negativo é realizado por um sistema quando uma força externa comprime o sistema, reduzindo o volume. O valor absoluto do trabalho continua a ser igual à área sob a curva, mas, como o gás foi *comprimido*, o trabalho realizado pelo gás é negativo.

A Fig. 18-14*f* mostra um *ciclo termodinâmico* no qual o sistema é levado de um estado inicial *i* para um outro estado *f* e depois levado de volta para *i*. O trabalho total realizado pelo sistema durante o ciclo é a soma do trabalho *positivo* realizado durante a expansão com o trabalho *negativo* realizado durante a compressão. Na Fig. 18-14*f*, o trabalho total é positivo porque a área sob a curva de expansão (de *i* a *f*) é maior do que a área sob a curva de compressão (de *f* a *i*).

TESTE 4

O diagrama *p*-*V* da figura mostra seis trajetórias curvas (ligadas por trajetórias verticais) que podem ser seguidas por um gás. Quais são as duas trajetórias curvas que devem fazer parte de um ciclo fechado (ligadas às trajetórias verticais) para que o trabalho total realizado pelo gás tenha o maior valor positivo possível?



18-10 A Primeira Lei da Termodinâmica

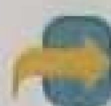
Com vimos, quando um sistema passa de um estado inicial para um estado final, tanto o trabalho *W* realizado como o calor *Q* transferido dependem do modo como a mudança é executada. Os experimentos, porém, revelaram algo interessante: *a diferença $Q - W$ depende apenas dos estados inicial e final e não da forma como o sistema passou de um estado para o outro.* Todas as outras combinações das grandezas *Q* e *W*, como *Q* apenas, *W* apenas, $Q + W$ e $Q - 2W$, são *dependentes da trajetória*; apenas $Q - W$ é independente. Esse fato sugere que a grandeza $Q - W$ é

uma medida da variação de uma propriedade intrínseca do sistema. Chamamos essa propriedade de *energia interna* (E_{int}) e escrevemos

$$\Delta E_{int} = E_{int,f} - E_{int,i} = Q - W \quad \text{(primeira lei).} \tag{18-26}$$

A Eq. 18-26 é a expressão matemática da **primeira lei da termodinâmica**. Se o sistema sofre apenas uma variação infinitesimal, podemos escrever a primeira lei na forma*

$$dE_{int} = dQ - dW \quad \text{(primeira lei).} \tag{18-27}$$


A energia interna E_{int} de um sistema tende a aumentar se acrescentamos energia na forma de calor Q e a diminuir se removemos energia na forma de trabalho W realizado pelo sistema.

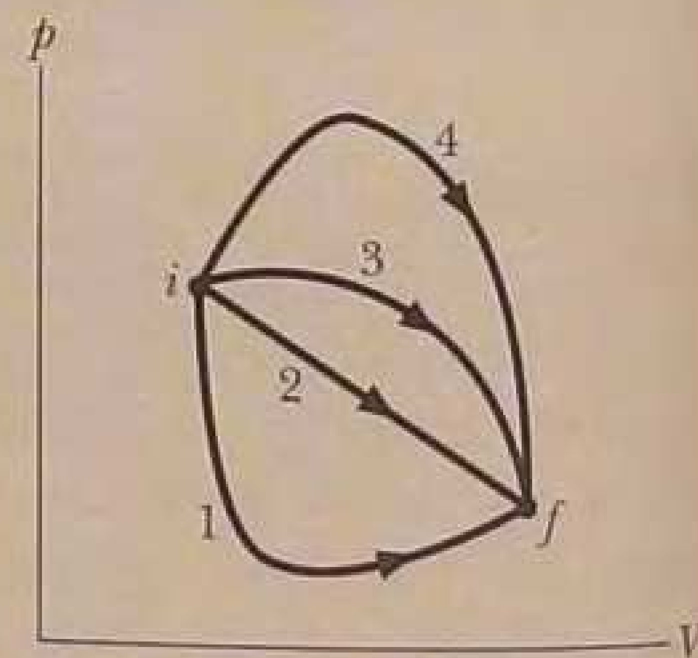
No Capítulo 8, discutimos a lei da conservação da energia em sistemas isolados, ou seja, em sistemas nos quais nenhuma energia entra ou sai do sistema. A primeira lei da termodinâmica é uma extensão dessa lei para sistemas que *não estão* isolados. Nesses casos, a energia pode entrar ou sair do sistema na forma de trabalho W ou calor Q. No enunciado da primeira lei da termodinâmica que foi apresentado, estamos supondo que o sistema como um todo não sofreu variações de energia cinética e energia potencial, ou seja, que $\Delta K = \Delta U = 0$.

Antes deste capítulo, o termo *trabalho* e o símbolo W sempre significaram o trabalho realizado *sobre* um sistema. Entretanto, a partir da Eq. 18-24 e nos próximos dois capítulos sobre termodinâmica, vamos nos concentrar no trabalho realizado *por* um sistema, como o gás da Fig. 18-13.

Como o trabalho realizado *sobre* um sistema é sempre o negativo do trabalho realizado *pelo* sistema, se reescrevemos a Eq. 18-26 em termos do trabalho W_s realizado *sobre* o sistema, temos $\Delta E_{int} = Q + W_s$. Isso significa o seguinte: a energia interna de um sistema tende a crescer se fornecemos calor ao sistema ou realizamos trabalho sobre o sistema. Por outro lado, a energia interna tende a diminuir se removemos calor *do* sistema ou o sistema realiza trabalho.


TESTE 5

A figura mostra quatro trajetórias em um diagrama p-V ao longo das quais um gás pode ser levado de um estado i para um estado f. Ordene as trajetórias de acordo com (a) a variação ΔE_{int} da energia interna do gás, (b) o trabalho W realizado pelo gás, (c) o valor absoluto da energia transferida na forma de calor entre o gás e o ambiente, em ordem decrescente.



18-11 Alguns Casos Especiais da Primeira Lei da Termodinâmica

Vamos agora examinar quatro processos termodinâmicos diferentes para verificar o que acontece quando aplicamos a esses processos a primeira lei da termodinâmica. Os processos e os resultados correspondentes estão indicados na Tabela 18-5.

*Na Eq. 18-27, as grandezas dQ e dW, ao contrário de dE_{int}, não são diferenciais verdadeiras, ou seja, não existem funções do tipo $Q(p,V)$ e $W(p,V)$ que dependam apenas do estado do sistema. As grandezas dQ e dW são chamadas de *diferenciais inexatas* e costumam ser representadas pelos símbolos δQ e δW. Para nossos propósitos, podemos tratá-las simplesmente como transferências de energia infinitesimais.

Tabela 18-5

A Primeira Lei da Termodinâmica: Quatro Casos Especiais

A Lei: $\Delta E_{int} = Q - W$ (Eq. 18-26)

Processo	Restrição	Consequência
Adiabático	$Q = 0$	$\Delta E_{int} = -W$
Volume constante	$W = 0$	$\Delta E_{int} = Q$
Ciclo fechado	$\Delta E_{int} = 0$	$Q = W$
Expansão livre	$Q = W = 0$	$\Delta E_{int} = 0$

1. ***Processos adiabáticos.*** Processo adiabático é aquele que acontece tão depressa ou em um sistema tão bem isolado *que não há trocas de calor* entre o sistema e o ambiente. Fazendo $Q = 0$ na primeira lei (Eq. 18-26), obtemos

$$\Delta E_{int} = -W \quad \text{(processo adiabático).} \tag{18-28}$$

De acordo com a Eq. 18-28, se o sistema realiza trabalho sobre o ambiente (ou seja, se W é positivo), a energia interna do sistema diminui de um valor igual ao do trabalho realizado. Se, por outro lado, o ambiente realiza trabalho sobre o sistema (ou seja, se W é negativo), a energia interna do sistema aumenta de um valor igual ao trabalho realizado.

A Fig. 18-15 mostra um processo adiabático. Como o calor não pode entrar ou sair do sistema por causa do isolamento, a única troca possível de energia entre o sistema e o ambiente é através de trabalho. Se removemos esferas de chumbo do êmbolo e deixamos o gás se expandir, o trabalho realizado pelo sistema (o gás) é positivo e a energia interna diminui. Se, em vez disso, acrescentamos esferas e comprimimos o gás, o trabalho realizado pelo sistema é negativo e a energia interna do gás aumenta.

2. ***Processos a volume constante.*** Se o volume de um sistema (como um gás) é mantido constante, o sistema não pode realizar trabalho. Fazendo $W = 0$ na primeira lei (Eq. 18-26), obtemos

$$\Delta E_{int} = Q \quad \text{(processo a volume constante).} \tag{18-29}$$

Assim, se o sistema recebe calor (ou seja, se Q é positivo), a energia interna do sistema aumenta. Se, por outro lado, o sistema cede calor (ou seja, se Q é negativo), a energia interna do sistema diminui.

3. ***Processos cíclicos.*** Existem processos nos quais, após certas trocas de calor e de trabalho, o sistema volta ao estado inicial. Nesse caso, nenhuma propriedade intrínseca do sistema (incluindo a energia interna) pode variar. Fazendo $\Delta E_{int} = 0$ na primeira lei (Eq. 18-26), obtemos

$$Q = W \quad \text{(processo cíclico).} \tag{18-30}$$

Assim, o trabalho total realizado durante o processo é exatamente igual à quantidade de energia transferida na forma de calor; a energia interna do sistema permanece a mesma. Os processos cíclicos representam uma trajetória fechada no diagrama p-V, como a da Fig. 18-14f. Esses processos serão discutidos com detalhes no Capítulo 20.

4. ***Expansões livres.*** São processos nos quais não há troca de calor com o ambiente e nenhum trabalho é realizado. Assim, $Q = W = 0$ e, de acordo com a primeira lei,

$$\Delta E_{int} = 0 \quad \text{(expansão livre).} \tag{18-31}$$

A Fig. 18-16 mostra de que forma esse tipo de expansão pode ocorrer. Um gás, cujas moléculas se encontram em equilíbrio térmico, está inicialmente confinado por uma válvula fechada em uma das duas câmaras que compõem um sistema isolado; a outra câmara está vazia. A válvula é aberta e o gás se expande livremente

Removendo algumas esferas de chumbo, permitimos que o gás se expanda sem transferência de calor.



Figura 18-15 Uma expansão adiabática pode ser realizada removendo esferas de chumbo do êmbolo. O processo pode ser invertido a qualquer momento acrescentando novas esferas.

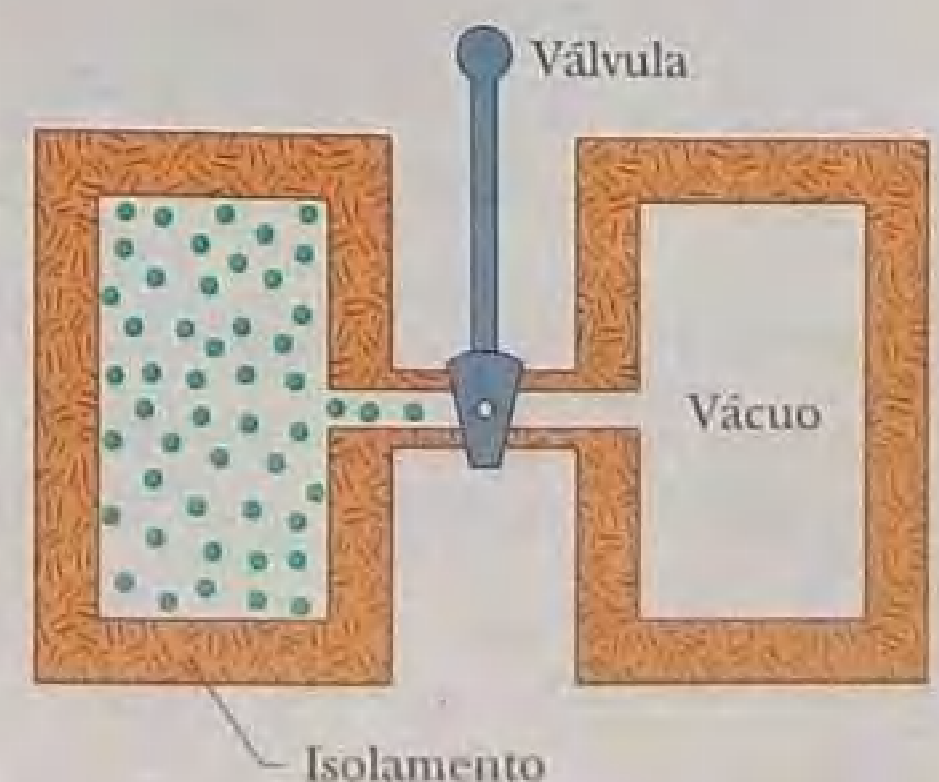
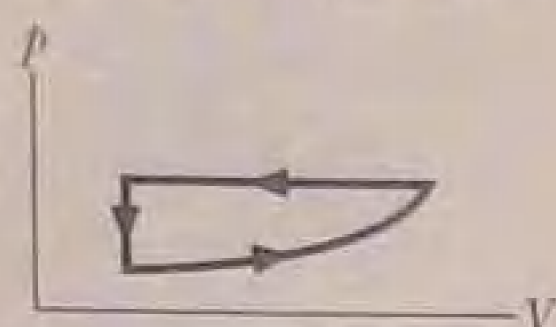


Figura 18-16 O estágio inicial de um processo de expansão livre. Quando a válvula é aberta, o gás passa a ocupar as duas câmaras e, após algum tempo, atinge um estado de equilíbrio.

TESTE 6

Para o ciclo fechado mostrado no diagrama p-V da figura, (a) ΔE_{int} do gás e (b) a energia Q transferida na forma de calor é positiva, negativa ou nula?



até ocupar as duas câmaras. Nenhum calor é transferido do ambiente para o gás ou do gás para o ambiente por causa do isolamento. Nenhum trabalho é realizado pelo gás porque ele se desloca para uma região vazia e, portanto, não encontra nenhuma resistência (pressão) na segunda câmara.

Uma expansão livre é diferente dos outros processos porque não pode ser realizada lentamente, de forma controlada. Em consequência, durante a expansão abrupta, o gás não está em equilíbrio térmico e a pressão não é uniforme. Assim, embora os estados inicial e final possam ser mostrados em um diagrama p-V, não podemos plotar a trajetória da expansão.

Exemplo

Primeira lei da termodinâmica: trabalho, calor e variação de energia interna

Suponha que 1,00 kg de água a 100°C seja convertido em vapor a 100°C à pressão atmosférica padrão (1,00 atm = $1{,}01 \times 10^5$ Pa) no arranjo da Fig. 18-17. O volume da água varia de um valor inicial de $1{,}00 \times 10^{-3}$ m³ como líquido para 1,671 m³ como vapor.

(a) Qual é o trabalho realizado pelo sistema durante o processo?

IDEIAS-CHAVE

(1) O trabalho realizado pelo sistema é positivo, já que o volume aumenta. (2) Podemos calcular o trabalho W integrando a pressão em relação ao volume (Eq. 18-25).

Cálculo Como a pressão é constante, podemos colocar p do lado de fora do sinal de integração. Temos, portanto,

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p\,dV = p\int_{V_i}^{V_f} dV = p(V_f - V_i)$$
$$= (1{,}01 \times 10^5\ \text{Pa})(1{,}671\ \text{m}^3 - 1{,}00 \times 10^{-3}\ \text{m}^3)$$
$$= 1{,}69 \times 10^5\ \text{J} = 169\ \text{kJ}. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a energia é transferida na forma de calor durante o processo?

IDEIA-CHAVE

Como o calor provoca apenas uma mudança de fase (a temperatura é a mesma nos estados inicial e final), é dado integralmente pela Eq. 18-16 ($Q = Lm$).

Cálculo Como a mudança é da fase líquida para a fase gasosa, L é o calor de vaporização L_V da água, cujo valor aparece na Eq. 18-17 e na Tabela 18-4. Temos:

$$Q = L_V m = (2256\ \text{kJ/kg})(1{,}00\ \text{kg})$$
$$= 2256\ \text{kJ} \approx 2260\ \text{kJ}. \quad \text{(Resposta)}$$

(c) Qual é a variação da energia interna do sistema durante o processo?

IDEIA-CHAVE

A variação da energia interna do sistema está relacionada ao calor (no caso, a energia transferida para o sistema) e ao trabalho (no caso, a energia transferida para fora do sistema) através da primeira lei da termodinâmica (Eq. 18-26).

Cálculo A primeira lei pode ser escrita na forma

$$\Delta E_{int} = Q - W = 2256\ \text{kJ} - 169\ \text{kJ}$$
$$\approx 2090\ \text{kJ} = 2{,}09\ \text{MJ}. \quad \text{(Resposta)}$$

Como este valor é positivo, a energia interna do sistema aumentou durante o processo de ebulição. Essa energia é usada para separar as moléculas de H_2O, que se atraem fortemente no estado líquido. Vemos que, quando a água é transformada em vapor, cerca de 7,5% (= 169 kJ/2260 kJ) do calor é transferido para o trabalho de abrir caminho na atmosfera. O resto do calor é transferido para a energia interna do sistema.

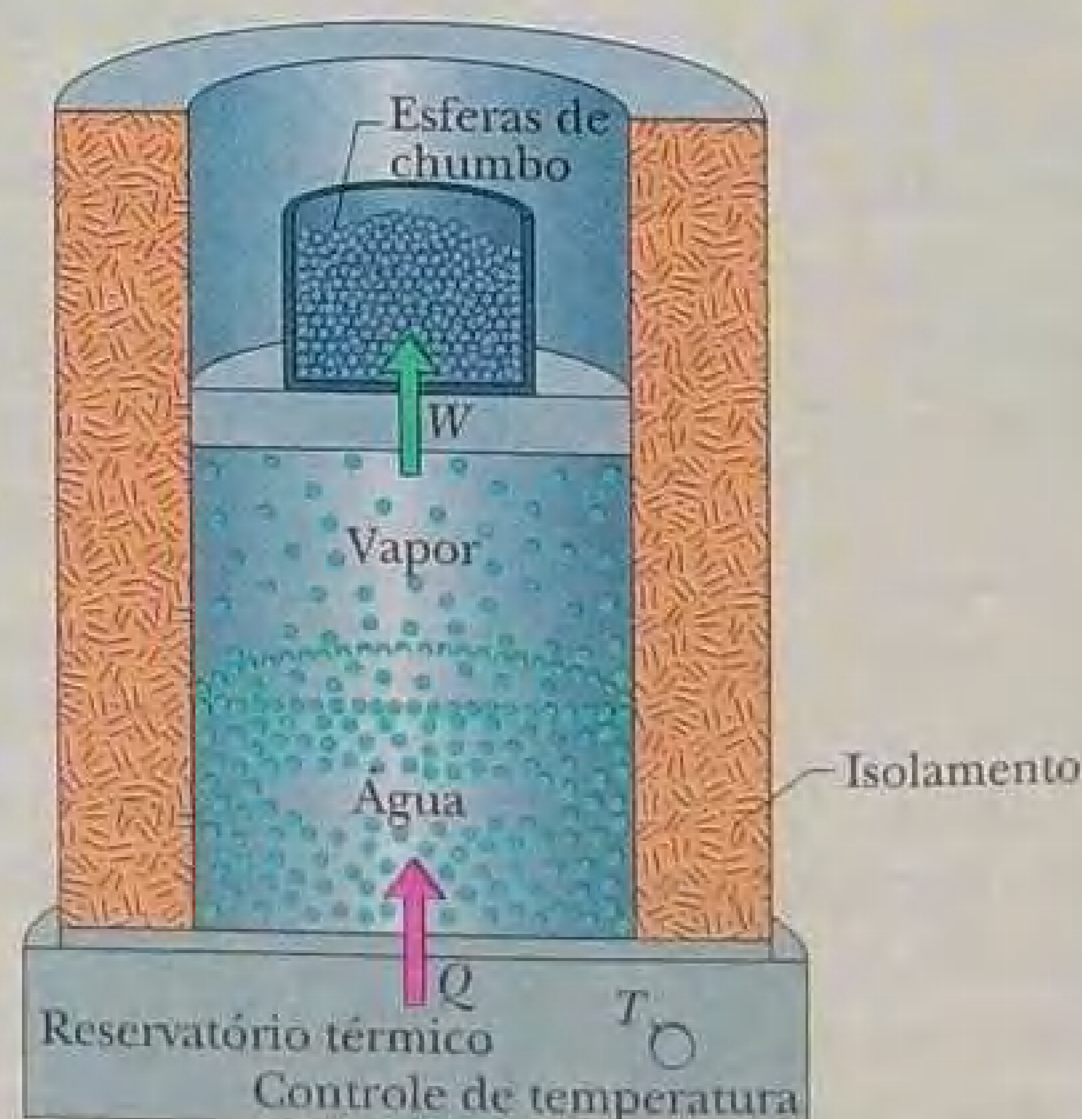


Figura 18-17 Água fervendo à pressão constante. A energia é transferida do reservatório térmico, na forma de calor, até que toda a água se transforme em vapor. O gás se expande e realiza trabalho ao levantar o êmbolo.

18-12 Mecanismos de Transferência de Calor

Já discutimos a transferência de energia na forma de calor, mas ainda não falamos do modo como essa transferência ocorre. Existem três mecanismos de transferência de calor: condução, convecção e radiação.

Condução

Se você deixa uma panela com cabo de metal no fogo por algum tempo, o cabo da panela fica tão quente que pode queimar sua mão. A energia é transferida da panela para o cabo por **condução**. Os elétrons e átomos da panela vibram intensamente por causa da alta temperatura a que estão expostos. Essas vibrações, e a energia associada, são transferidas para o cabo através de colisões entre os átomos. Dessa forma, uma região de temperatura crescente se propaga em direção ao cabo.

Considere uma placa de área A e de espessura L, cujas faces são mantidas a temperaturas T_Q e T_F por uma fonte quente e uma fonte fria, como na Fig. 18-18. Seja Q a energia transferida na forma de calor através da placa, da face quente para a face fria, em um intervalo de tempo t. As experiências mostram que a *taxa de condução* P_{cond} (a energia transferida por unidade de tempo) é dada por

$$P_{cond} = \frac{Q}{t} = kA\,\frac{T_Q - T_F}{L}, \qquad (18\text{-}32)$$

onde k, a *condutividade térmica*, é uma constante que depende do material de que é feita a placa. Um material que transfere facilmente energia por condução é um *bom condutor de calor* e tem um alto valor de k. A Tabela 18-6 mostra a condutividade térmica de alguns metais, gases e materiais de construção.

Supomos uma transferência constante de energia na forma de calor.

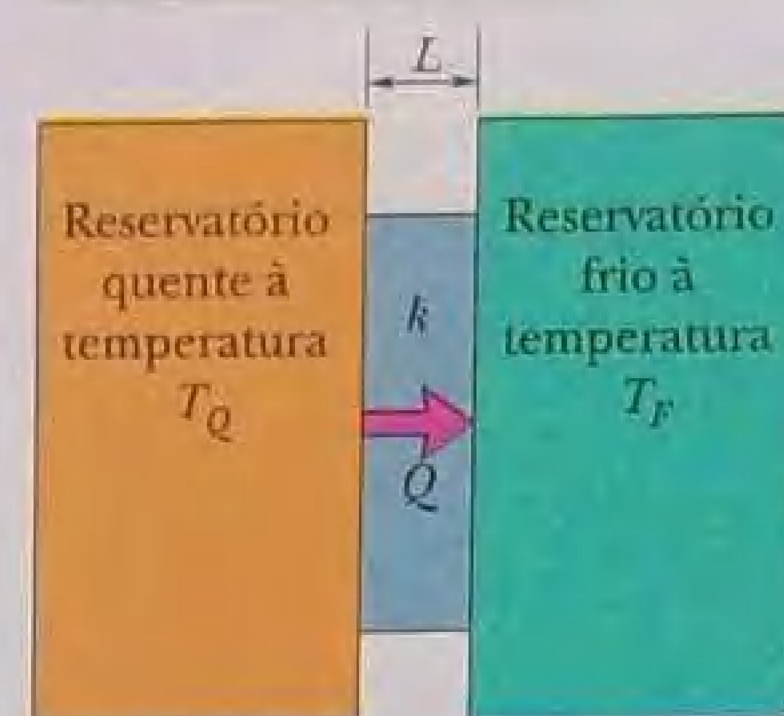


Figura 18-18 Condução de calor. A energia é transferida na forma de calor de um reservatório à temperatura T_Q para um reservatório mais frio à temperatura T_F através de uma placa de espessura L e condutividade térmica k.

Resistência Térmica

Se você está interessado em manter a casa aquecida nos dias de inverno ou conservar a cerveja gelada em um piquenique, precisa mais de maus condutores de calor do que de bons condutores. Por essa razão, o conceito de *resistência térmica* (R) foi introduzido na engenharia. O valor de R de uma placa de espessura L é definido como

$$R = \frac{L}{k}. \qquad (18\text{-}33)$$

Quanto menor a condutividade térmica do material de que é feita uma placa, maior a resistência térmica da placa. Um objeto com uma resistência térmica elevada é um *mau condutor de calor* e, portanto, um *bom isolante térmico*.

Note que a resistência térmica é uma propriedade atribuída a uma placa com uma certa espessura e não a um material. A unidade de resistência térmica no SI é o $m^2 \cdot K/W$. Nos Estados Unidos, a unidade mais usada (embora raramente seja indicada) é o pé quadrado – grau Fahrenheit – hora por British thermal unit ($ft^2 \cdot F° \cdot h/Btu$).

Tabela 18-6

Algumas Condutividades Térmicas

Substância	k (W/m·K)
Metais	
Aço inoxidável	14
Chumbo	35
Ferro	67
Latão	109
Alumínio	235
Cobre	401
Prata	428
Gases	
Ar (seco)	0,026
Hélio	0,15
Hidrogênio	0,18
Materiais de Construção	
Espuma de poliuretano	0,024
Lã de pedra	0,043
Fibra de vidro	0,048
Pinho	0,11
Vidro de janela	1,0

Condução Através de uma Placa Composta

A Fig. 18-19 mostra uma placa composta, formada por dois materiais de diferentes espessuras L_1 e L_2 e diferentes condutividades térmicas k_1 e k_2. As temperaturas das superfícies externas da placa são T_Q e T_F. As superfícies das placas têm área A. Vamos formular uma expressão para a taxa de condução através da placa supondo que a transferência acontece no regime *estacionário*, ou seja, que as temperaturas em todos os pontos da placa e a taxa de transferência de energia não variam com o tempo.

No regime estacionário, as taxas de condução através dos dois materiais são iguais. Isso é o mesmo que dizer que a energia transferida através de um dos materiais em um certo instante é igual à energia transferida através do outro material no mesmo instante. Se isso não fosse verdade, as temperaturas na placa estariam mudando

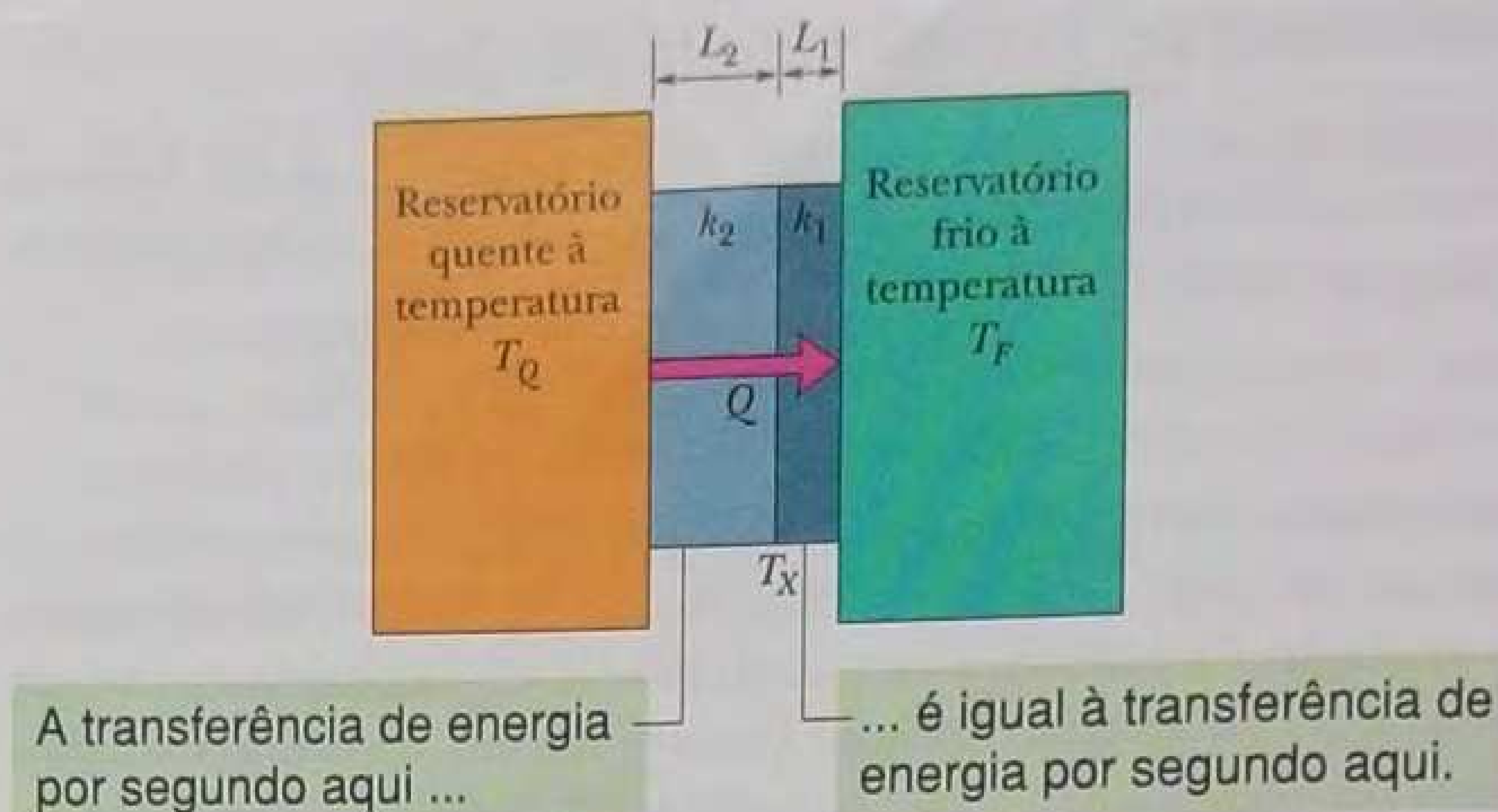


Figura 18-19 O calor é transferido a uma taxa constante através de uma placa composta feita de dois materiais diferentes com diferentes espessuras e diferentes condutividades térmicas. A temperatura da interface dos dois materiais no regime estacionário é T_X.

e não teríamos um regime estacionário. Chamando de T_X a temperatura da interface dos dois materiais, podemos usar a Eq. 18-32 para escrever

$$P_{\text{cond}} = \frac{k_2 A(T_H - T_X)}{L_2} = \frac{k_1 A(T_X - T_C)}{L_1}. \tag{18-34}$$

Explicitando T_X na Eq. 18-34, obtemos

$$T_X = \frac{k_1 L_2 T_C + k_2 L_1 T_H}{k_1 L_2 + k_2 L_1}. \tag{18-35}$$

Substituindo T_X por seu valor em uma das expressões da Eq. 18-34, obtemos:

$$P_{\text{cond}} = \frac{A(T_H - T_C)}{L_1/k_1 + L_2/k_2}. \tag{18-36}$$

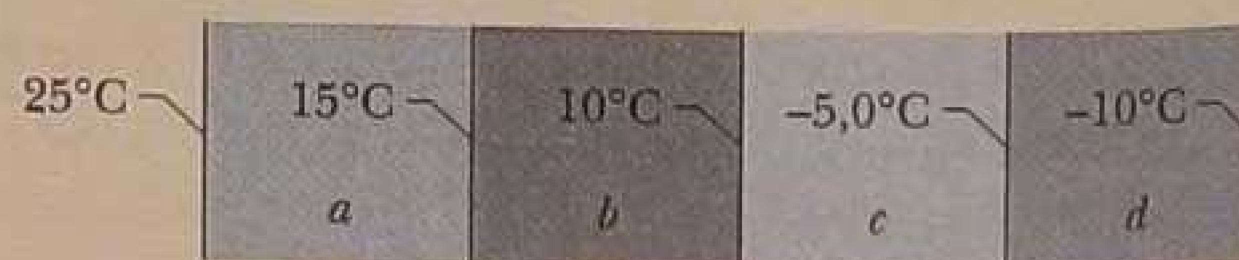
Podemos generalizar a Eq. 18-36 para uma placa composta por um número n de materiais:

$$P_{\text{cond}} = \frac{A(T_H - T_C)}{\Sigma\,(L/k)}. \tag{18-37}$$

O símbolo de somatório no denominador indica que devemos somar os valores de L/k de todos os materiais.

TESTE 7

A figura mostra as temperaturas das faces e das interfaces, no regime estacionário, de uma conjunto de quatro placas de mesma espessura, feitas de materiais diferentes, através das quais o calor é transferido. Ordene os materiais de acordo com a condutividade térmica, em ordem decrescente.



Convecção

Quando olhamos para a chama de uma vela ou de um fósforo, vemos a energia térmica ser transportada para cima por **convecção**. Esse tipo de transferência de energia acontece quando um fluido, como ar ou água, entra em contato com um objeto cuja temperatura é maior que a do fluido. A temperatura da parte do fluido que está em contato com o objeto quente aumenta e (na maioria dos casos) essa parte do fluido se expande, ficando menos densa. Como o fluido expandido é mais leve do que o fluido que o cerca, mais frio, a força de empuxo o faz subir. O fluido mais frio escoa para tomar o lugar do fluido mais quente que sobe e o processo pode continuar indefinidamente.

A convecção está presente em muitos processos naturais. A convecção atmosférica desempenha um papel fundamental na formação de padrões climáticos globais e nas variações do tempo de curto prazo. Tanto os pilotos de asa delta como os pássaros usam térmicas (correntes de convecção de ar quente) para se manter por

mais tempo no ar. Grandes transferências de energia ocorrem nos oceanos pelo mesmo processo. Finalmente, no Sol, a energia térmica produzida por reações de fusão nuclear é transportada do centro para a superfície através de gigantescas células de convecção, nas quais o gás mais quente sobe pela parte central da célula e o gás mais frio desce pelos lados.



Figura 18-20 Um termograma em cores falsas mostra a taxa com a qual a energia é irradiada por um gato. O branco e o vermelho correspondem às maiores taxas; o azul (nariz) às menores. *(Edward Kinsman/Photo Researchers)*

Radiação

Um sistema e o ambiente também podem trocar energia através de ondas eletromagnéticas (a luz visível é um tipo de onda eletromagnética). As ondas eletromagnéticas que transferem calor são muitas vezes chamadas de **radiação térmica** para distingui-las dos *sinais* eletromagnéticos (como, por exemplo, os das transmissões de televisão) e da radiação nuclear (ondas e partículas emitidas por núcleos atômicos). Quando você se aproxima de uma fogueira, é aquecido pela radiação térmica proveniente do fogo, ou seja, sua energia térmica aumenta ao mesmo tempo em que a energia térmica do fogo diminui. Não é necessária a existência de um meio material para que o calor seja transferido por radiação. O calor do Sol, por exemplo, chega até nós através do vácuo.

A taxa P_{rad} com a qual um objeto emite energia através da radiação eletromagnética depende da área A da superfície do objeto e da temperatura T dessa área (em kelvins) e é dada por

$$P_{rad} = \sigma \varepsilon A T^4 \qquad (18\text{-}38)$$

onde $\sigma = 5{,}6704 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2 \cdot K^4}$ é uma constante física conhecida como *constante de Stefan–Boltzmann* em homenagem a Josef Stefan (que descobriu a Eq. 18-38 experimentalmente em 1879) e Ludwig Boltzmann (que a deduziu teoricamente logo depois). O símbolo ε representa a *emissividade* da superfície do objeto, que tem um valor entre 0 e 1, dependendo da composição da superfície. Uma superfície com a emissão máxima de 1,0 é chamada de *radiador de corpo negro*, mas uma superfície como essa é um limite ideal e não existe na natureza. Note que a temperatura da Eq. 18-38 deve estar em kelvins para que uma temperatura de zero absoluto corresponda à ausência de radiação. Note também que todo objeto cuja temperatura está acima de 0 K (como o leitor, por exemplo) emite radiação térmica. (Veja a Fig. 18-20.)

A taxa P_{abs} com a qual um objeto absorve energia através da radiação térmica do ambiente, que supomos estar a uma temperatura uniforme T_{amb} (em kelvins), é dada por

$$P_{abs} = \sigma \varepsilon A T_{amb}^4. \qquad (18\text{-}39)$$

A emissividade ε que aparece na Eq. 18-39 é a mesma da Eq. 18-38. Um radiador de corpo negro ideal, com $\varepsilon = 1$, absorve toda a energia eletromagnética que recebe (em vez de refletir ou espalhar parte da radiação).

Como um objeto irradia energia para o ambiente enquanto está absorvendo energia do ambiente, a taxa líquida $P_{líq}$ de troca de energia com o ambiente por radiação térmica é dada por

$$P_{líq} = P_{abs} - P_{rad} = \sigma \varepsilon A (T_{amb}^4 - T^4). \qquad (18\text{-}40)$$

$P_{líq}$ é positiva se o corpo absorve energia e negativa se o corpo perde energia por radiação.



Figura 18-21 A cabeça de uma cobra cascavel possui detectores de radiação térmica que permitem ao réptil localizar uma presa mesmo na escuridão total. *(David A. Northcott/Corbis Images)*

A radiação térmica também está envolvida em muitos casos de pessoas que foram picadas na mão por uma cobra cascavel *morta*. Pequenos furos entre os olhos e as narinas da cobra cascavel (Fig. 18-21) funcionam como sensores de radiação térmica. Quando um pequeno animal, como um rato, por exemplo, se aproxima de uma cascavel, a radiação térmica emitida pelo animal dispara esses sensores, provocando um ato reflexo no qual a cobra morde o animal e injeta veneno. Mesmo que a cobra esteja morta há quase meia hora, a radiação térmica da mão que se aproxima

de uma cobra cascavel pode causar esse ato reflexo, porque o sistema nervoso da cobra ainda está funcionando. Assim, recomendam os especialistas, se você tiver que remover uma cobra cascavel morta recentemente, use uma vara comprida em lugar das mãos.

Exemplo

Condução térmica em uma parede feita de vários materiais

A Fig. 18-22 mostra a seção reta de uma parede feita com uma camada interna de madeira, de espessura L_a, uma camada externa de tijolos, de espessura L_d $(= 2{,}0L_a)$ e duas camadas intermediárias de espessura e composição desconhecidas. A condutividade térmica da madeira é k_a e a dos tijolos é k_d $(= 5{,}0k_a)$. A área A da parede também é desconhecida. A condução térmica através da parede atingiu o regime estacionário; as únicas temperaturas conhecidas são $T_1 = 25°C$, $T_2 = 20°C$ e $T_5 = -10°C$. Qual é a temperatura T_4?

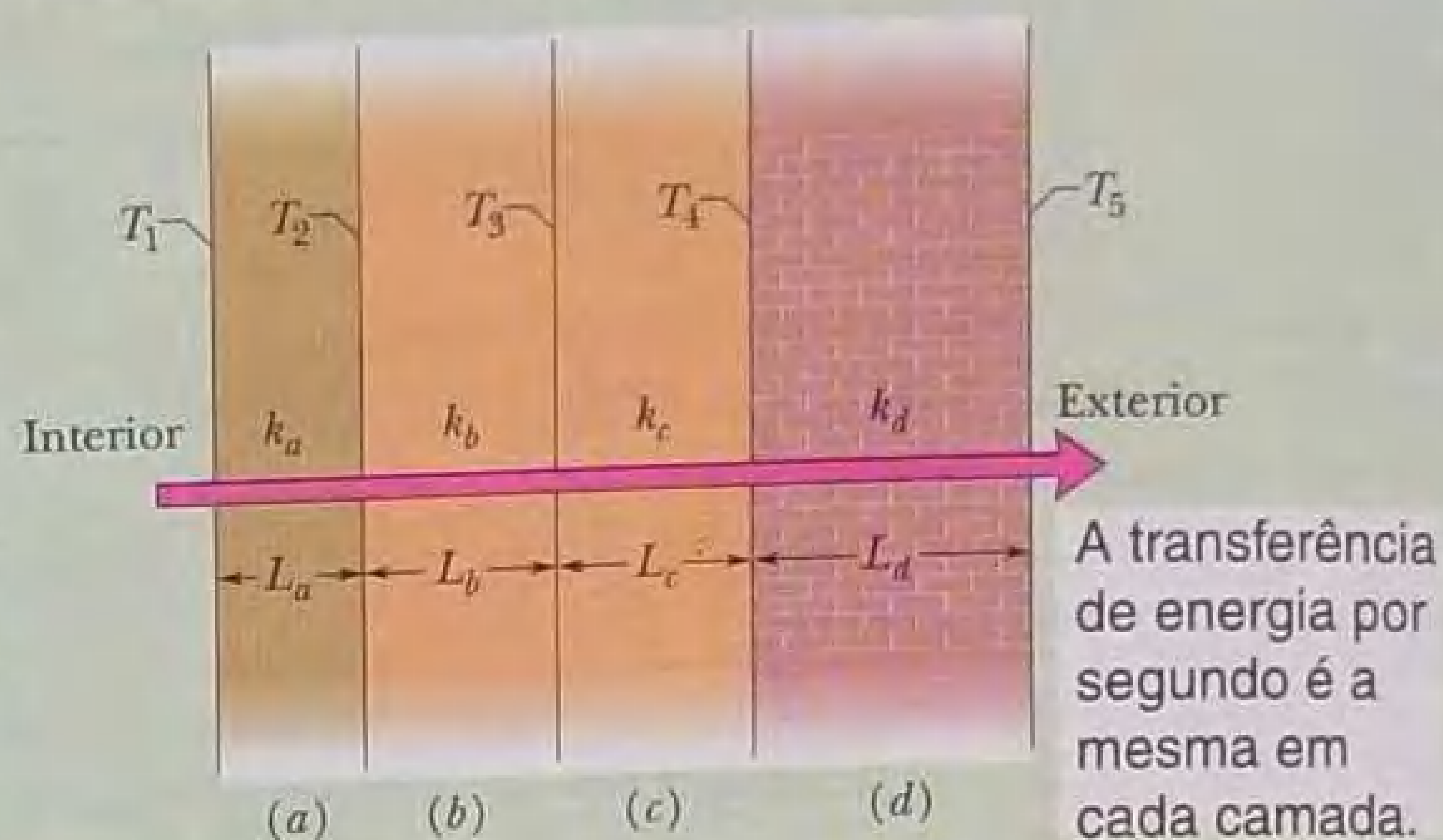


Figura 18-22 Uma parede de quatro camadas através da qual existe transferência de calor.

IDEIAS-CHAVE

(1) A temperatura T_4 aparece na equação da taxa P_d com a qual a energia térmica atravessa os tijolos (Eq. 18-32). Entretanto, não temos dados suficientes para calcular o valor de T_4 usando apenas a Eq. 18-32. (2) Como o regime é estacionário, a taxa de condução P_d através dos tijolos é igual à taxa de condução P_a através da madeira.

Cálculos De acordo com a Eq. 18-32 e a Fig. 18-22, temos:

$$P_a = k_a A \frac{T_1 - T_2}{L_a} \quad \text{e} \quad P_d = k_d A \frac{T_4 - T_5}{L_d}.$$

Fazendo $P_a = P_d$ e explicitando T_4, obtemos

$$T_4 = \frac{k_a L_d}{k_d L_a}(T_1 - T_2) + T_5.$$

Fazendo $L_d = 2{,}0L_a$, $k_d = 5{,}0k_a$ e substituindo T_1, T_2 e T_5 por seus valores, obtemos

$$T_4 = \frac{k_a(2{,}0L_a)}{(5{,}0k_a)L_a}(25°C - 20°C) + (-10°C)$$
$$= -8{,}0°C. \qquad \text{(Resposta)}$$

REVISÃO E RESUMO

Temperatura, Termômetros A temperatura é uma das grandezas fundamentais do SI e está relacionada às nossas sensações de quente e frio. É medida com um termômetro, instrumento que contém uma substância com uma propriedade mensurável, como comprimento ou pressão, que varia de forma regular quando a substância se torna mais quente ou mais fria.

Lei Zero da Termodinâmica Quando um termômetro e um objeto são postos em contato, entram em equilíbrio térmico após um certo tempo. Depois que o equilíbrio térmico é atingido, a leitura do termômetro é tomada como a temperatura do objeto. O processo fornece medidas úteis e coerentes de temperatura por causa da **lei zero da termodinâmica**: se dois corpos A e B estão separadamente em equilíbrio térmico com um terceiro corpo T (o termômetro), A e B estão em equilíbrio térmico entre si.

A Escala Kelvin de Temperatura No SI, a temperatura é medida na **escala Kelvin**, que se baseia no **ponto triplo** da água (273,16 K). Outras temperaturas são definidas pelo uso de um *termômetro de gás a volume constante*, no qual uma amostra de gás é mantida a volume constante, de modo que a pressão é proporcional à temperatura. Definimos a *temperatura T* medida por um termômetro de gás como

$$T = (273{,}16\ \text{K}) \left(\lim_{\text{gás} \to 0} \frac{p}{p_3} \right), \qquad (18\text{-}6)$$

onde T está em kelvins e p_3 e p são as pressões do gás a 273,16 K e na temperatura que está sendo medida, respectivamente.

As Escalas Celsius e Fahrenheit A escala Celsius de temperatura é definida através da equação

$$T_C = T - 273{,}15°, \qquad (18\text{-}7)$$

com T em kelvins. A escala Fahrenheit de temperatura é definida através da equação

$$T_F = \tfrac{9}{5}T_C + 32°. \qquad (18\text{-}8)$$

Dilatação Térmica Todos os objetos variam de tamanho quando a temperatura varia. Para uma variação de temperatura ΔT, uma variação ΔL de qualquer dimensão linear L é dada por

$$\Delta L = L\alpha\,\Delta T, \tag{18-9}$$

onde α é o **coeficiente de dilatação linear**. A variação ΔV do volume V de um sólido ou de um líquido é dada por

$$\Delta V = V\beta\,\Delta T, \tag{18-10}$$

onde $\beta = 3\alpha$ é o coeficiente de dilatação volumétrica.

Calor Calor (Q) é a energia transferida de um sistema para o ambiente ou vice-versa em virtude de uma diferença de temperatura. O calor pode ser medido em **joules** (J), **calorias** (cal), **quilocalorias** (Cal ou kcal), ou **British thermal units** (Btu), onde

$$1 \text{ cal} = 3{,}968 \times 10^{-3} \text{ Btu} = 4{,}1868 \text{ J}. \tag{18-12}$$

Capacidade Térmica e Calor Específico Se uma quantidade de calor Q é absorvida por um objeto, a variação de temperatura do objeto, $T_f - T_i$, está relacionada a Q através da equação

$$Q = C(T_f - T_i), \tag{18-13}$$

em que C é a **capacidade térmica** do objeto. Se o objeto tem massa m,

$$Q = cm(T_f - T_i), \tag{18-14}$$

em que c é o **calor específico** do material de que é feito o objeto. O **calor específico molar** de um material é a capacidade térmica por mol. Um mol equivale a $6{,}02 \times 10^{23}$ unidades elementares do material.

Calor de Transformação O calor absorvido por um material pode mudar o estado físico do material, fazendo-o passar, por exemplo, do estado sólido para o estado líquido ou do estado líquido para o estado gasoso. A quantidade de energia por unidade de massa necessária para mudar o estado (mas não a temperatura) de um material é chamada de **calor de transformação** (L). Assim,

$$Q = Lm. \tag{18-16}$$

O **calor de vaporização** L_V é a quantidade de energia por unidade de massa que deve ser fornecida para vaporizar um líquido ou que deve ser removida para condensar um gás. O **calor de fusão** L_F é a quantidade de energia por unidade de massa que deve ser fornecida para fundir um sólido ou que deve ser removida para solidificar um líquido.

Trabalho Associado a uma Variação de Volume Um gás pode trocar energia com o ambiente através do trabalho. O trabalho W realizado por um gás quando ao se expandir ou se contrair de um volume inicial V_i para um volume final V_f é dado por

$$W = \int dW = \int_{V_i}^{V_f} p\,dV. \tag{18-25}$$

A integração é necessária porque a pressão p pode variar durante a variação de volume.

Primeira Lei da Termodinâmica A lei de conservação da energia para processos termodinâmicos é expressa através da **primeira lei da termodinâmica**, que pode assumir duas formas:

$$\Delta E_{\text{int}} = E_{\text{int},f} - E_{\text{int},i} = Q - W \quad \text{(primeira lei)} \tag{18-26}$$

ou

$$dE_{\text{int}} = dQ - dW \quad \text{(primeira lei)}, \tag{18-27}$$

em que E_{int} é a energia interna do material, que depende apenas do estado do material (temperatura, pressão e volume), Q é a energia trocada entre o sistema e o ambiente na forma de calor (Q é positivo se o sistema absorve calor e negativo se o sistema libera calor) e W é o trabalho realizado pelo sistema (W é positivo se o sistema se expande contra uma força externa e negativo se o sistema se contrai sob o efeito de uma força externa). Q e W são grandezas *dependentes da trajetória*; ΔE_{int} é *independente da trajetória*.

Aplicações da Primeira Lei A primeira lei da termodinâmica pode ser aplicada a vários casos especiais:

processos adiabáticos: $Q = 0, \quad \Delta E_{\text{int}} = -W$

processos a volume constante: $W = 0, \quad \Delta E_{\text{int}} = Q$

processos cíclicos: $\Delta E_{\text{int}} = 0, \quad Q = W$

expansões livres: $Q = W = \Delta E_{\text{int}} = 0$

Condução, Convecção e Radiação A taxa P_{cond} com a qual a energia é *conduzida* através de uma placa cujas faces são mantidas nas temperaturas T_Q e T_F é dada pela equação

$$P_{\text{cond}} = \frac{Q}{t} = kA\,\frac{T_H - T_C}{L} \tag{18-32}$$

em que A e L são a área e a espessura da placa e k é a condutividade térmica do material.

A *convecção* é uma transferência de energia associada ao movimento em um fluido produzido por diferenças de temperatura.

A *radiação* é uma transferência de energia através de ondas eletromagnéticas. A taxa P_{rad} com a qual um objeto emite energia por radiação térmica é dada por

$$P_{\text{rad}} = \sigma\varepsilon A T^4, \tag{18-38}$$

em que σ ($= 5{,}6704 \times 10^{-8}$ W/m$^2 \cdot$ K^4) é a constante de Stefan–Boltzmann, ε é a emissividade da superfície do objeto, A é a área da superfície e T é a temperatura de sua superfície (em kelvins). A taxa P_{abs} com a qual um objeto absorve energia da radiação térmica do ambiente, quando este se encontra a uma temperatura uniforme T_{amb} (em kelvins), é dada por

$$P_{\text{abs}} = \sigma\varepsilon A T_{\text{amb}}^4. \tag{18-39}$$

PERGUNTAS

1 O comprimento inicial L, a variação de temperatura ΔT e a variação de comprimento ΔL de quatro barras são mostrados na tabela. Ordene as barras de acordo com o coeficiente de expansão térmica, em ordem decrescente.

Barra	L (m)	ΔT (C°)	ΔL (m)
a	2	10	4×10^{-4}
b	1	20	4×10^{-4}
c	2	10	8×10^{-4}
d	4	5	4×10^{-4}

2 A Fig. 18-23 mostra três escalas de temperatura lineares, com os pontos de congelamento e ebulição da água indicados. Ordene as três escalas de acordo com o tamanho do grau de cada uma, em ordem decrescente.

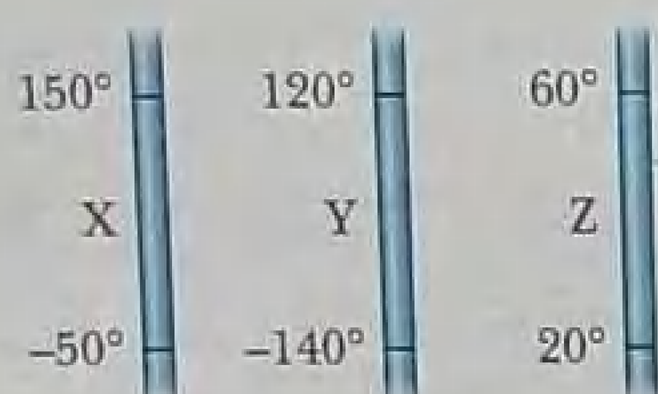


Figura 18-23 Pergunta 2.

3 Os materiais A, B e C são sólidos que estão em seus pontos de fusão. São necessários 200 J para fundir 4 kg do material A, 300 J para fundir 5 kg do material B e 300 J para fundir 6 kg do material C. Ordene os materiais de acordo com o calor de fusão, em ordem decrescente.

4 Uma amostra A de água e uma amostra B de gelo, de massas iguais, são colocadas em um recipiente termicamente isolado e se espera até que entrem em equilíbrio térmico. A Fig. 18-24a é um gráfico da temperatura T das amostras em função do tempo t. (a) A temperatura do equilíbrio está acima, abaixo ou no ponto de congelamento da água? (b) Ao atingir o equilíbrio, o líquido congela parcialmente, congela totalmente ou não congela? (c) O gelo derrete parcialmente, derrete totalmente ou não derrete?

5 Continuação da Pergunta 4. A Fig. 18-24 b-f mostra outros gráficos de T em função de t, dos quais um ou mais são impossíveis. (a) Quais são os gráficos impossíveis e por quê? (b) Nos gráficos possíveis, a temperatura de equilíbrio está acima, abaixo ou no ponto de congelamento da água? (c) Nas situações possíveis, quando o sistema atinge o equilíbrio, o líquido congela parcialmente, congela totalmente ou não congela? O gelo derrete parcialmente, derrete totalmente ou não derrete?

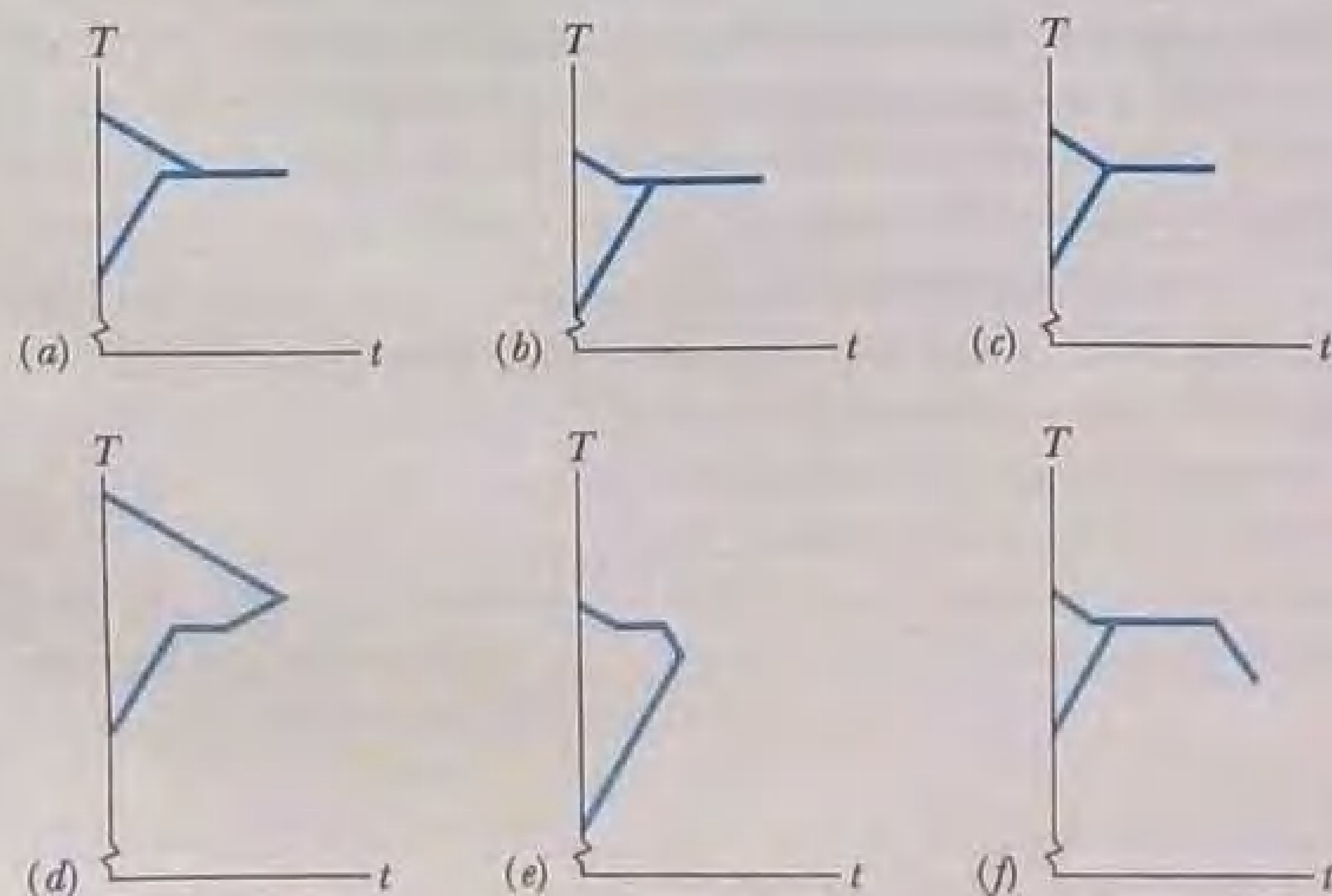


Figura 18-24 Perguntas 4 e 5.

6 A Fig. 18-25 mostra três arranjos diferentes de materiais 1, 2 e 3 para formar uma parede. As condutividades térmicas são $k_1 > k_2 > k_3$. O lado esquerdo da parede está 20C° mais quente que o lado direito. Ordene os arranjos de acordo (a) com a taxa de condução de energia através da parede (no regime estacionário) e (b) com a diferença de temperatura entre as duas superfícies do material 1, em ordem decrescente.

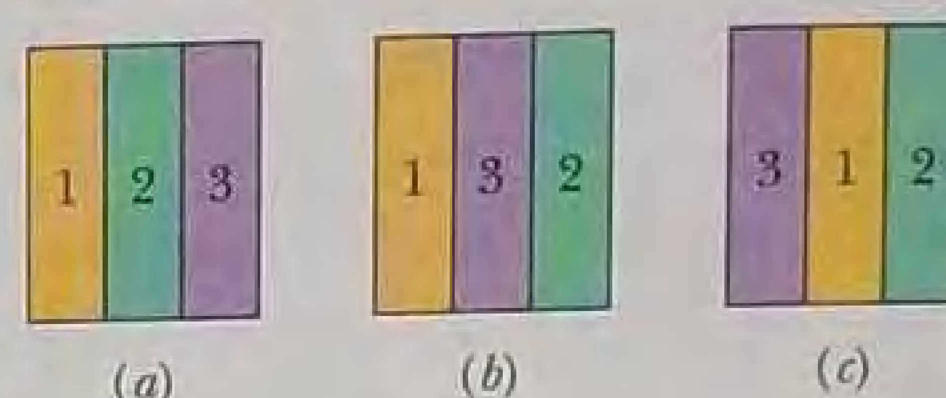


Figura 18-25 Pergunta 6.

7 A Fig. 18-26 mostra dois ciclos fechados em diagramas p-V de um gás. As três partes do ciclo 1 têm o mesmo comprimento e forma que as do ciclo 2. Os ciclos devem ser percorridos no sentido horário ou anti-horário (a) para que o trabalho total W realizado pelo gás seja positivo e (b) para que a energia líquida transferida pelo gás na forma de calor Q seja positiva?

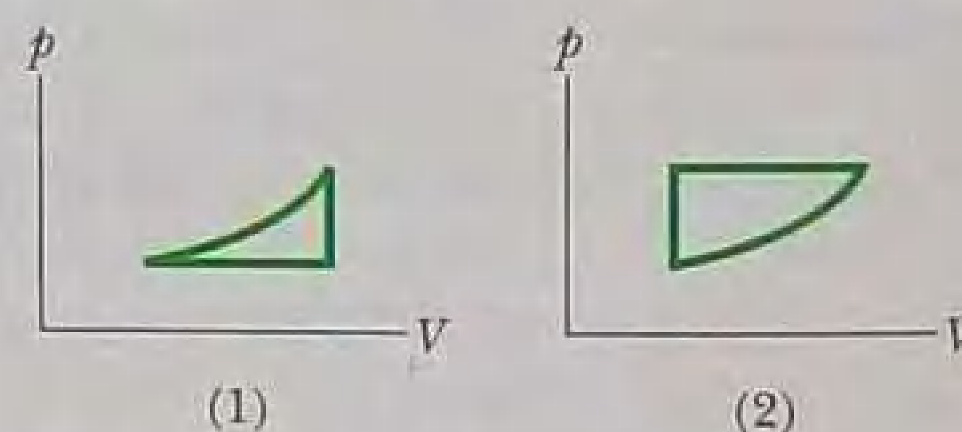


Figura 18-26 Perguntas 7 e 8.

8 Para que ciclo da Fig. 18-26, percorrido no sentido horário, (a) W é maior e (b) Q é maior?

9 Três materiais diferentes de massas iguais são colocados, um de cada vez, em um congelador especial que pode extrair energia do material a uma taxa constante. Durante o processo de resfriamento, cada material começa no estado líquido e termina no estado sólido; a Fig. 18-27 mostra a temperatura T em função do tempo t. (a) O calor específico do material 1 no estado líquido é maior ou menor que no estado sólido? Ordene os materiais de acordo (b) com a temperatura do ponto de fusão, (c) com o calor específico no estado líquido, (d) com o calor específico no estado sólido e (e) com o calor de fusão, em ordem decrescente.

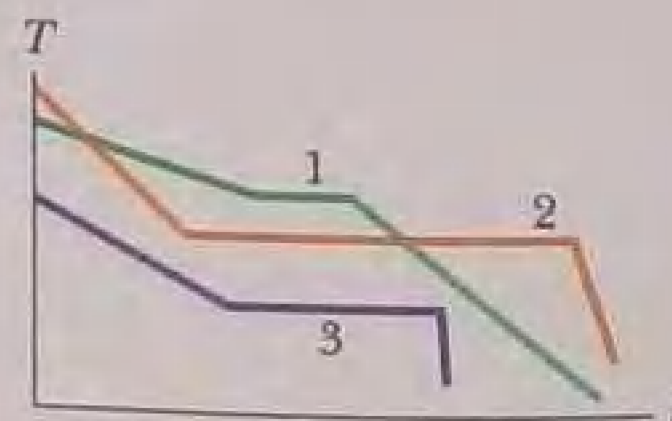


Figura 18-27 Pergunta 9.

10 Um cubo de lado r, uma esfera de raio r e um hemisfério de raio r, todos feitos do mesmo material, são mantidos à temperatura de 300 K em um ambiente cuja temperatura é 350 K. Ordene os objetos de acordo com a taxa com a qual a radiação térmica é trocada com o ambiente, em ordem decrescente.

11 Um objeto quente é jogado em um recipiente termicamente isolado cheio d'água e se espera até que o objeto e a água entrem em equilíbrio térmico. O experimento é repetido com dois outros objetos quentes. Os três objetos têm a mesma massa e a mesma temperatura inicial. A massa e a temperatura inicial da água são iguais nos três experimentos. A Fig. 18-28 mostra os gráficos da temperatura T do objeto e da água em função do tempo t para os três experimentos. Ordene os gráficos de acordo com o calor específico do objeto, em ordem decrescente.

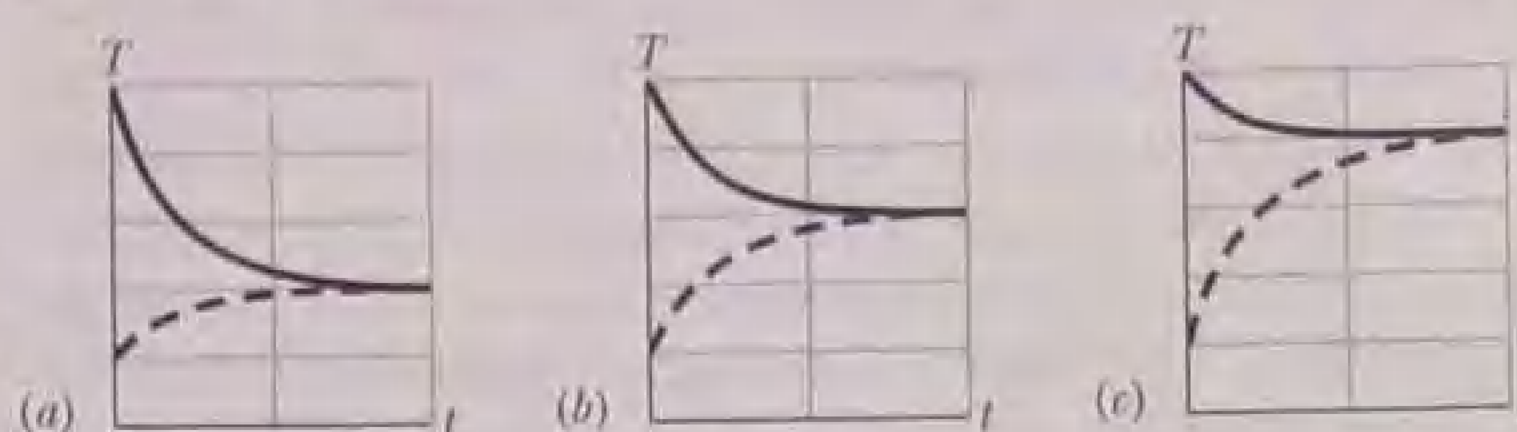


Figura 18-28 Pergunta 11.

PROBLEMAS

•–••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Seção 18-4 Medindo a Temperatura

•1 A temperatura de um gás é 373,15 K quando está no ponto de ebulição da água. Qual é o valor limite da razão entre a pressão do gás no ponto de ebulição e a pressão no ponto triplo da água? (Suponha que o volume do gás é o mesmo nas duas temperaturas.)

•2 Dois termômetros de gás a volume constante são construídos, um com nitrogênio e o outro com hidrogênio. Ambos contêm gás suficiente para que $p_3 = 80$ kPa. (a) Qual é a diferença de pressão entre os dois termômetros se os dois bulbos estão imersos em água fervente? (*Sugestão:* veja a Fig. 18-6.) (b) Qual dos dois gases está a uma pressão mais alta?

•3 Um termômetro de gás é constituído por dois bulbos com gás imersos em recipientes com água, como mostra a Fig. 18-29. A diferença de pressão entre os dois bulbos é medida por um manômetro de mercúrio. Reservatórios apropriados, que não aparecem na figura, mantêm constante o volume de gás nos dois bulbos. Não há diferença de pressão quando os dois recipientes estão no ponto triplo da água. A diferença de pressão é 120 torr quando um recipiente está no ponto triplo e o outro está no ponto de ebulição da água e 90,0 torr quando um recipiente está no ponto triplo da água e o outro em uma temperatura desconhecida a ser medida. Qual é a temperatura desconhecida?



Figura 18-29 Problema 3.

Seção 18-5 As Escalas Celsius e Fahrenheit

•4 (a) Em 1964, a temperatura na aldeia de Oymyakon, na Sibéria, chegou a −71°C. Qual é o valor dessa temperatura na escala Fahrenheit? (b) A maior temperatura registrada oficialmente nos Estados Unidos foi 134°F, no vale da Morte, Califórnia. Qual é o valor dessa temperatura na escala Celsius?

•5 Para que temperatura a leitura na escala Fahrenheit é igual (a) a duas vezes a leitura na escala Celsius e (b) a metade da leitura na escala Celsius?

••6 Em uma escala linear de temperatura X, a água congela a −125,0°X e evapora a 375,0°X. Em uma escala linear de temperatura Y, a água congela a −70,00°Y e evapora a −30,00°Y. Uma temperatura de 50,00°Y corresponde a que temperatura na escala X?

••7 Em uma escala linear de temperatura X, a água evapora a −53,5°X e congela a −170°X. Quanto vale a temperatura de 340 K na escala X? (Aproxime o ponto de ebulição da água para 373 K.)

Seção 18-6 Dilatação Térmica

•8 A 20°C, um cubo de latão tem 30 cm de aresta. Qual é o aumento da área superficial do cubo quando é aquecido de 20°C para 75°C?

•9 Um furo circular em uma placa de alumínio tem 2,725 cm de diâmetro a 0,000°C. Qual é o diâmetro do furo quando a temperatura da placa é aumentada para 100,0°C?

•10 Um mastro de alumínio tem 33 m de altura. De quanto o comprimento do mastro aumenta quando a temperatura aumenta de 15C°?

•11 Qual é o volume de uma bola de chumbo a 30,00°C se o volume da bola é 50,00 cm³ a 60,00°C?

•12 Uma barra feita de uma liga de alumínio tem um comprimento de 10,000 cm a 20,000°C e um comprimento de 10,015 cm no ponto de ebulição da água. (a) Qual é o comprimento da barra no ponto de congelamento da água? (b) Qual é a temperatura para a qual o comprimento da barra é 10,009 cm?

•13 Determine a variação de volume de uma esfera de alumínio com um raio inicial de 10 cm quando a esfera é aquecida de 0,0°C para 100°C.

••14 Quando a temperatura de uma moeda de cobre é aumentada de 100C°, o diâmetro aumenta de 0,18%. Determine, com precisão de dois algarismos significativos, o aumento percentual (a) da área, (b) da espessura, (c) do volume e (d) da massa específica da moeda. (e) Calcule o coeficiente de dilatação linear da moeda.

••15 Uma barra de aço tem 3,000 cm de diâmetro a 25,00°C. Um anel de latão tem um diâmetro interno de 2,992 cm a 25,00°C. Se os dois objetos são mantidos em equilíbrio térmico, a que temperatura a barra se ajusta perfeitamente ao furo?

••16 Quando a temperatura de um cilindro de metal é aumentada de 0,0°C para 100°C, o comprimento aumenta de 0,23%. (a) Determine a variação percentual da massa específica. (b) De que metal é feito o cilindro? Consulte a Tabela 18-2.

••17 Uma xícara de alumínio com um volume de 100 cm³ está cheia de glicerina a 22°C. Que volume de glicerina é derramado se a temperatura da glicerina e da xícara aumenta para 28°C? (O coeficiente de dilatação volumétrica da glicerina é $5{,}1 \times 10^{-4}$/C°.)

••18 A 20°C, uma barra tem exatamente 20,05 cm de comprimento, de acordo com uma régua de aço. Quando a barra e a régua são colocadas em um forno a 270°C, a barra passa a medir 20,11 cm de acordo com a mesma régua. Qual é o coeficiente de expansão linear do material de que é feita a barra?

••19 Um tubo de vidro vertical de comprimento $L = 1{,}280\,000$ m está cheio até a metade com um líquido a 20,000 000°C. De quanto a altura do líquido no tubo varia quando o tubo é aquecido para 30,000 000°C? Suponha que $\alpha_{vidro} = 1{,}000\,000 \times 10^{-5}$/K e $\beta_{líquido} = 4{,}000\,000 \times 10^{-5}$/K.

••20 Em um certo experimento, uma pequena fonte radioativa deve se mover com velocidades selecionadas, extremamente baixas. O movimento é conseguido prendendo a fonte a uma das extremidades de uma barra de alumínio e aquecendo a região central da barra de forma controlada. Se a parte aquecida da barra da Fig. 18-30 tem um comprimento $d = 2{,}00$ cm, a que taxa constante a temperatura da barra deve variar para que a fonte se mova com uma velocidade constante de 100 nm/s?

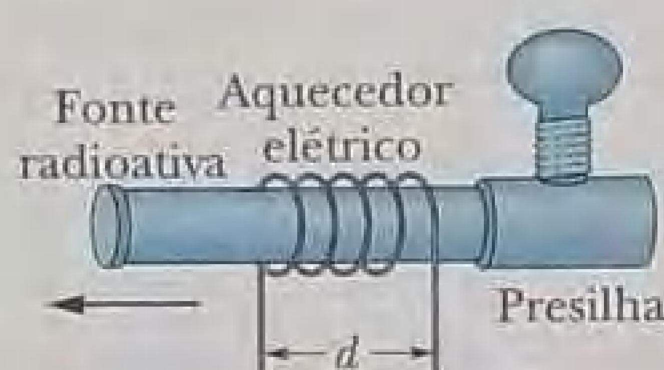


Figura 18-30 Problema 20.

•••21 Como resultado de um aumento de temperatura de 32C°, uma barra com uma rachadura no centro dobra para cima (Fig. 18-31). Se a distância fixa L_0 é 3,77 m e o coeficiente de dilatação linear da barra é 25×10^{-6}/C°, determine a altura x do centro da barra.

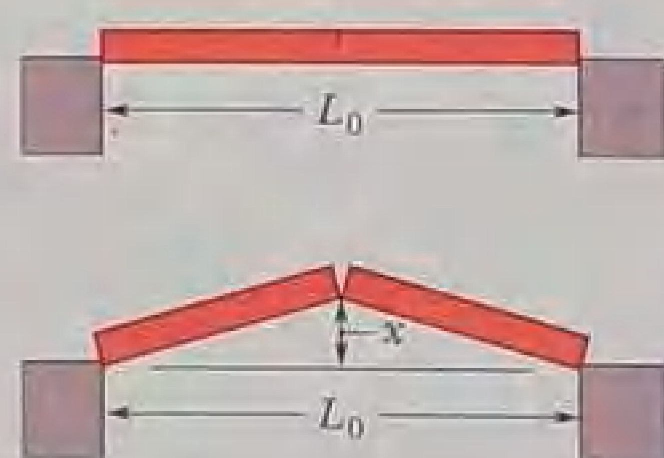


Figura 18-31 Problema 21.

Seção 18-8 A Absorção de Calor por Sólidos e Líquidos

•22 Uma forma de evitar que os objetos que se encontram no interior de uma garagem congelem em uma noite fria de inverno, na qual a temperatura cai abaixo do ponto de congelamento da água, é colocar uma banheira velha com água na garagem. Se a massa da água é 125 kg e a temperatura inicial é 20°C, (a) que energia a água deve transferir para o ambiente para congelar totalmente e (b) qual é a menor temperatura possível da água e do ambiente até que isso aconteça?

•23 Para preparar uma xícara de café solúvel, um pequeno aquecedor elétrico de imersão é usado para esquentar 100 g de água. O rótulo diz que se trata de um aquecedor de "200 watts" (essa é a taxa de conversão de energia elétrica em energia térmica). Calcule o tempo necessário para aquecer a água de 23,0°C para 100°C, desprezando as perdas de calor.

•24 Uma substância tem uma massa de 50,0 g/mol. Quando 314 J são adicionados na forma de calor a uma amostra de 30,0 g da substância, a temperatura sobe de 25,0°C para 45,0°C. Qual é (a) o calor específico e (b) o calor específico molar da substância? (c) Quantos mols estão presentes na amostra?

•25 Um nutricionista aconselha as pessoas que querem perder peso a beber água gelada, alegando que o corpo precisa queimar gordura para aumentar a temperatura da água de 0,00°C para a temperatura do corpo, 37,0°C. Quantos litros de água gelada uma pessoa precisa beber para queimar 500 g de gordura, supondo que, ao ser queimada essa quantidade de gordura, 3500 Cal são transferidas para a água? Por que não é recomendável seguir o conselho do nutricionista? (Um litro = 10^3 cm^3. A massa específica da água é 1,00 g/cm^3.)

•26 Que massa de manteiga, que possui um valor calórico de 6,0 Cal/g (= 6000 cal/g), equivale à variação de energia potencial gravitacional de um homem de 73,0 kg que sobe do nível do mar para o alto do monte Everest, a 8,84 km de altura? Suponha que o valor médio de g durante a escalada é 9,80 m/s^2.

•27 Calcule a menor quantidade de energia, em joules, necessária para fundir 130 g de prata inicialmente a 15,0°C.

•28 Que massa de água permanece no estado líquido depois que 50,2 kJ são transferidos na forma de calor a partir de 260 g de água inicialmente no ponto de congelamento?

••29 Em um aquecedor solar, a radiação do Sol é absorvida pela água que circula em tubos em um coletor situado no telhado. A radiação solar penetra no coletor através de uma cobertura transparente e aquece a água dos tubos; em seguida, a água é bombeada para um tanque de armazenamento. Suponha que a eficiência global do sistema é de 20% (ou seja, 80% da energia solar incidente é perdida). Que área de coleta é necessária para aumentar a temperatura de 200 L de água no tanque de 20°C para 40°C em 1,0 h se a intensidade da luz solar incidente é 700 W/m^2?

••30 Uma amostra de 0,400 kg de uma substância é colocada em um sistema de resfriamento que remove calor a uma taxa constante. A Fig. 18-32 mostra a temperatura T da amostra em função do tempo t; a escala do eixo horizontal é definida por $t_s = 80{,}0$ min. A amostra congela durante o processo. O calor específico da substância no estado líquido inicial é 3000 J/kg · K. Determine (a) o calor de fusão da substância e (b) o calor específico da substância na fase sólida.

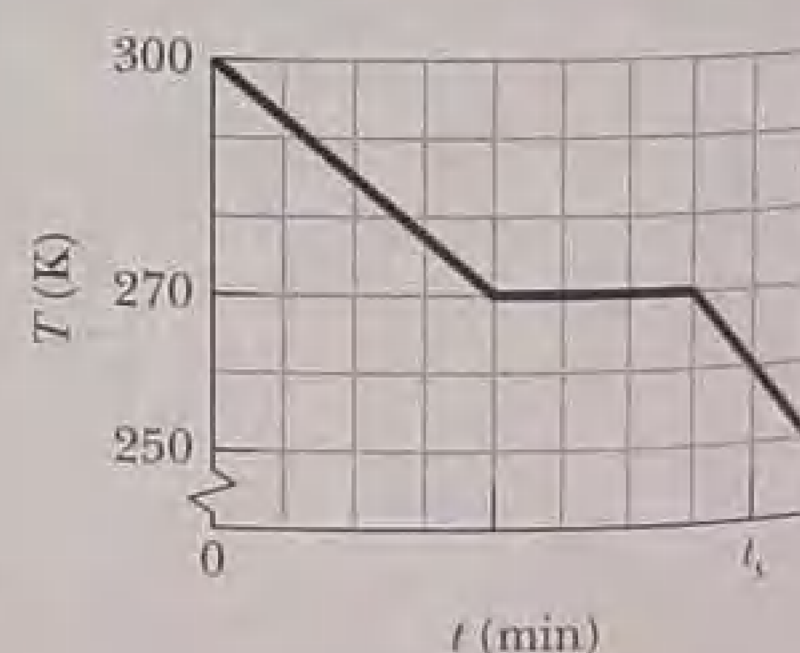


Figura 18-32 Problema 30.

••31 Que massa de vapor a 100°C deve ser misturada com 150 g de gelo no ponto de fusão, em um recipiente isolado termicamente, para produzir água a 50°C?

••32 O calor específico de uma substância varia com a temperatura de acordo com a equação $c = 0{,}20 + 0{,}14T + 0{,}023T^2$, com T em °C e c em cal/g · K. Determine a energia necessária para aumentar a temperatura de 2,0 g desta substância de 5,0°C para 15°C.

••33 *Versão não métrica* (a) Quanto tempo um aquecedor de água de $2{,}0 \times 10^5$ Btu/h leva para elevar a temperatura de 40 galões de água de 70°F para 100°F? *Versão métrica.* (b) Quanto tempo um aquecedor de água de 59 kW leva para elevar a temperatura de 150 litros de água de 21°C para 38°C?

••34 Duas amostras, A e B, estão a diferentes temperaturas quando são colocadas em contato em um recipiente termicamente isolado

até entrarem em equilíbrio térmico. A Fig. 18-33a mostra as temperaturas T das duas amostras em função do tempo t. A amostra A tem uma massa de 5,0 kg; a amostra B tem uma massa de 1,5 kg. A Fig. 18-33b é um gráfico do material da amostra B que mostra a variação de temperatura ΔT que o material sofre quando recebe uma energia Q na forma de calor; a variação ΔT está plotada em função da energia Q por unidade de massa do material. Qual é o calor específico do material da amostra A?

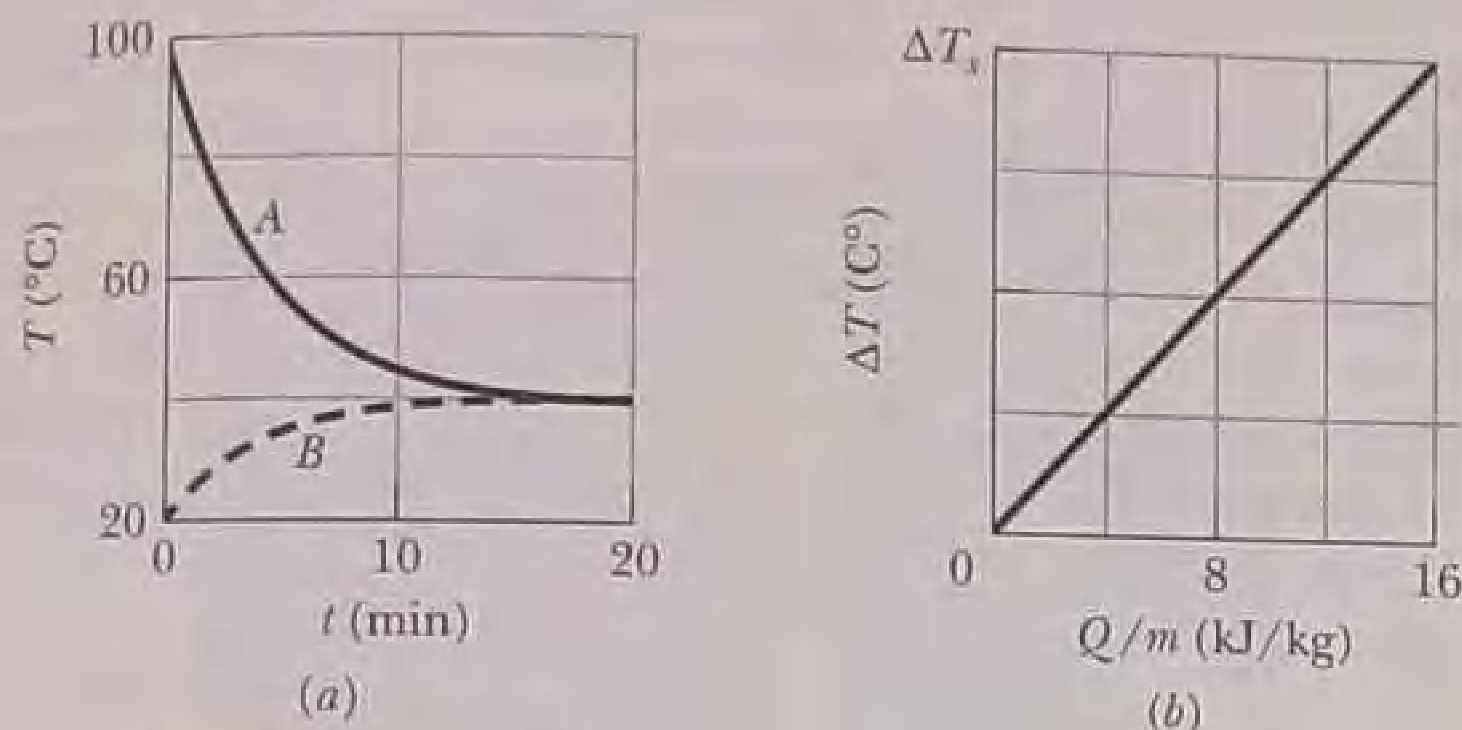


Figura 18-33 Problema 34.

••**35** Uma garrafa térmica contém 130 cm³ de café a 80,0°C. Um cubo de gelo de 12,0 g à temperatura de fusão é usado para esfriar o café. De quantos graus o café esfria depois que todo o gelo derrete e o equilíbrio térmico é atingido? Trate o café como se fosse água pura e despreze as trocas de energia com o ambiente.

••**36** Um tacho de cobre de 150 g contém 220 g de água e ambos estão a 20,0°C. Um cilindro de cobre de 300 g, muito quente, é jogado na água, fazendo a água ferver e transformando 5,0 g da água em vapor. A temperatura final do sistema é de 100°C. Despreze a transferência de energia para o ambiente. (a) Qual é a energia (em calorias) transferida para a água na forma de calor? (b) Qual é a energia transferida para o tacho? (c) Qual é a temperatura inicial do cilindro?

••**37** Uma pessoa faz chá gelado misturando 500 g de chá quente (que se comporta como água pura) com a mesma massa de gelo no ponto de fusão. Suponha que a troca de energia entre a mistura e o ambiente é desprezível. Se a temperatura inicial do chá é $T_i = 90°C$, qual é (a) a temperatura da mistura T_f e (b) a massa m_f do gelo remanescente quando o equilíbrio térmico é atingido? Se $T_i = 70°C$, qual é o valor (c) de T_f e (d) de m_f quando o equilíbrio térmico é atingido?

••**38** Uma amostra de 0,530 kg de água e uma amostra de gelo são colocadas em um recipiente termicamente isolado. O recipiente também contém um dispositivo que transfere calor da água para o gelo a uma taxa constante P até que o equilíbrio térmico seja estabelecido. As temperaturas T da água e do gelo são mostradas na Fig. 18-34 em função do tempo t; a escala do eixo horizontal é definida por $t_s = 80,0$ min. (a) Qual é a taxa P? (b) Qual é a massa inicial de gelo no recipiente? (c) Quando o equilíbrio térmico é atingido, qual é a massa do gelo produzido no processo?

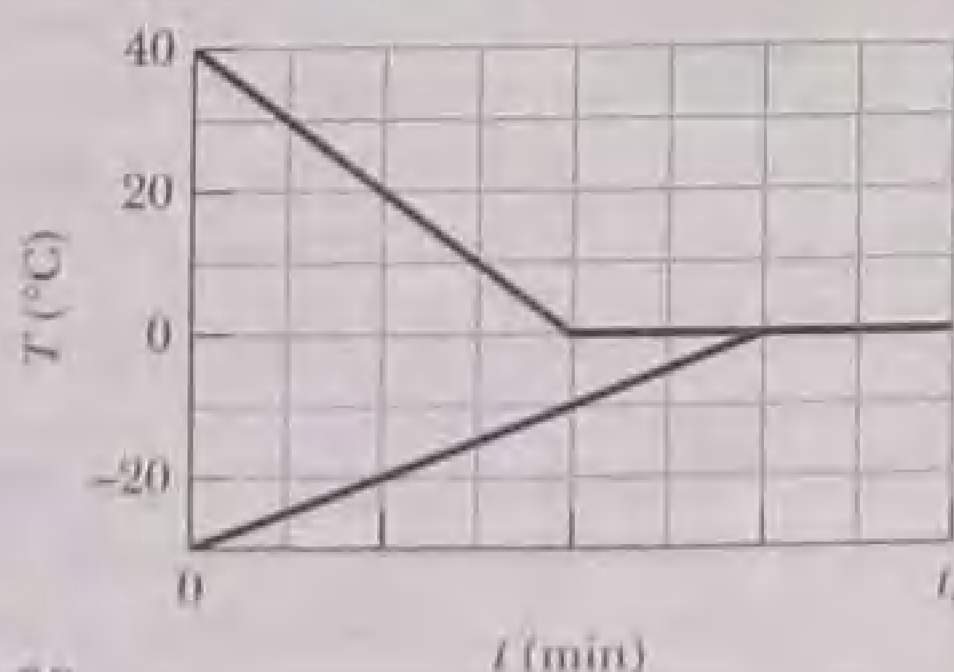


Figura 18-34 Problema 38.

••**39** O álcool etílico tem um ponto de ebulição de 78,0°C, um ponto de congelamento de −114°C, um calor de vaporização de 879 kJ/kg, um calor de fusão de 109 kJ/kg e um calor específico de 2,43 kJ/kg · K. Quanta energia deve ser removida de 0,510 kg de álcool etílico que está inicialmente na forma de gás a 78,0°C para que se torne um sólido a −114°C?

••**40** Calcule o calor específico de um metal a partir dos dados a seguir. Um recipiente feito do metal tem uma massa de 3,6 kg e contém 14 kg de água. Um pedaço de 1,8 kg do metal, inicialmente à temperatura de 180°C, é mergulhado na água. O recipiente e a água estão inicialmente a uma temperatura de 16,0°C e a temperatura final do sistema (termicamente isolado) é 18,0°C.

•••**41** (a) Dois cubos de gelo de 50 g são misturados com 200 g de água em um recipiente termicamente isolado. Se a água está inicialmente a 25°C e o gelo foi removido de um congelador a −15°C, qual é a temperatura final em equilíbrio térmico? (b) Qual é a temperatura final se é usado apenas um cubo de gelo?

•••**42** Um anel de cobre de 20,0 g a 0,000°C tem um diâmetro interno D = 2,540 00 cm. Uma esfera de alumínio a 100,0°C tem um diâmetro d = 2,545 08 cm. A esfera é colocada acima do anel (Fig. 18-35) até que os dois atinjam o equilíbrio térmico, sem perda de calor para o ambiente. A esfera se ajusta exatamente ao anel na temperatura do equilíbrio. Qual é a massa da esfera?

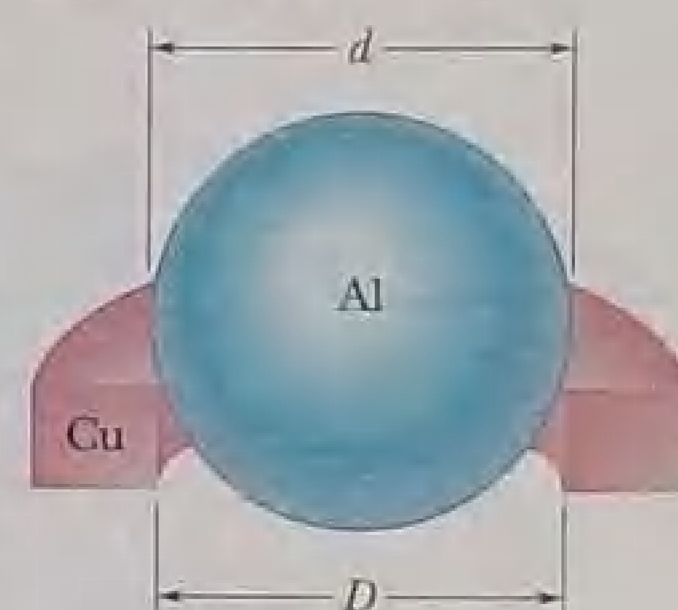


Figura 18-35 Problema 42.

Seção 18-11 Alguns Casos Especiais da Primeira Lei da Termodinâmica

•**43** Na Fig. 18-36, uma amostra de gás se expande de V_0 para $4{,}0V_0$ enquanto a pressão diminui de p_0 para $p_0/4{,}0$. Se $V_0 = 1{,}0$ m³ e $p_0 = 40$ Pa, qual é o trabalho realizado pelo gás se a pressão varia com o volume de acordo (a) com a trajetória A, (b) com a trajetória B e (c) com a trajetória C?

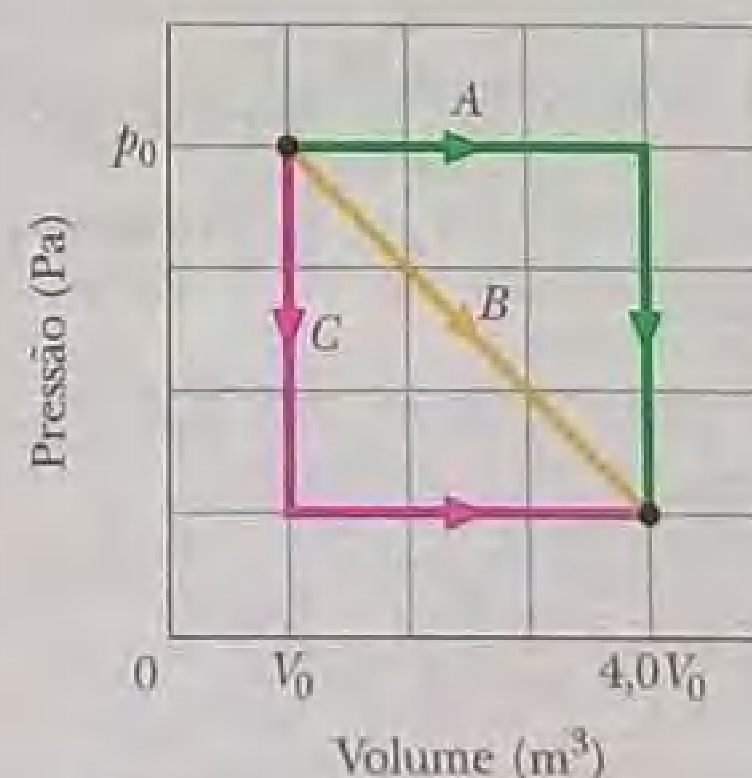
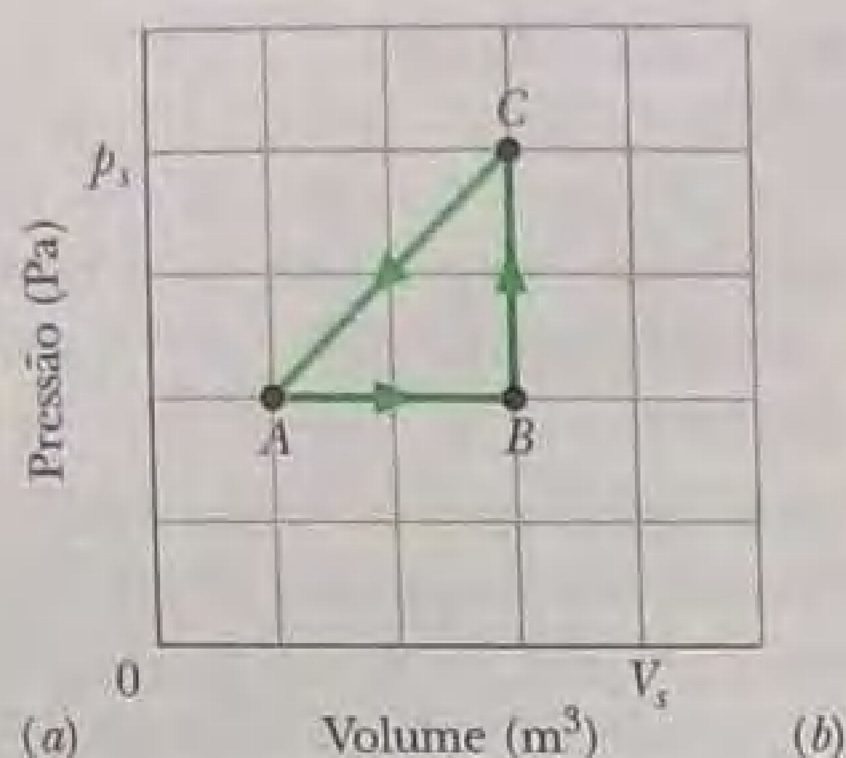


Figura 18-36 Problema 43.

•**44** Um sistema termodinâmico passa do estado A para o estado B, do estado B para o estado C e de volta para o estado A, como mostra o diagrama p-V da Fig. 18-37a. A escala do eixo vertical é definida por $p_s = 40$ Pa e a escala do eixo horizontal é definida por $V_s = 4{,}0$ m³. (a)–(g) Complete a tabela da Fig. 18-37b introduzindo um sinal positivo, um sinal negativo ou um zero na célula indicada. (h) Qual é o trabalho realizado pelo sistema no ciclo $ABCA$?



(b)

	Q	W	ΔE_{int}
$A \rightarrow B$	(a)	(b)	+
$B \rightarrow C$	+	(c)	(d)
$C \rightarrow A$	(e)	(f)	(g)

Figura 18-37 Problema 44.

•**45** Um gás em uma câmara fechada passa pelo ciclo mostrado no diagrama p-V da Fig. 18-38. A escala do eixo horizontal é definida por $V_s = 4{,}0\ m^3$. Calcule a energia adicionada ao sistema na forma de calor durante um ciclo completo.

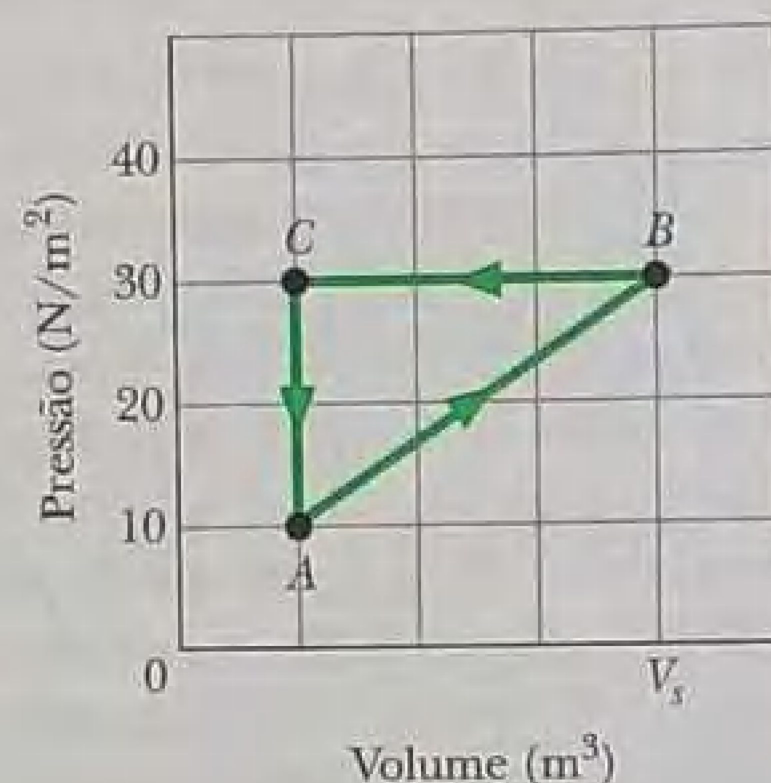


Figura 18-38 Problema 45.

•**46** Um trabalho de 200 J é realizado sobre um sistema e uma quantidade de calor de 70,0 cal é removida do sistema. Qual é o valor (incluindo o sinal) (a) de W, (b) de Q e (c) de ΔE_{int}?

••**47** Quando um sistema passa do estado i para o estado f seguindo a trajetória iaf da Fig. 18-39, $Q = 50$ cal e $W = 20$ cal. Ao longo da trajetória ibf, $Q = 36$ cal. (a) Quanto vale W ao longo da trajetória ibf? (b) Se $W = -13$ cal na trajetória de retorno fi, quanto vale Q nessa trajetória? (c) Se $E_{int,i} = 10$ cal, qual é o valor de $E_{int,f}$? Se $E_{int,b} = 22$ cal, qual é o valor de Q (d) na trajetória ib e (e) na trajetória bf?

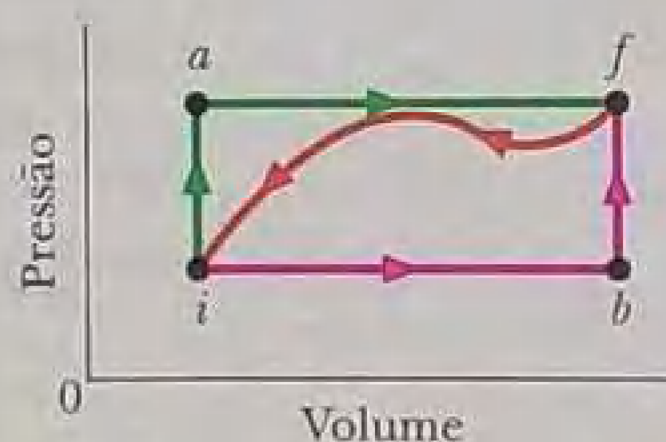


Figura 18-39 Problema 47.

••**48** Um gás em uma câmara passa pelo ciclo mostrado na Fig. 18-40. Determine a energia transferida pelo sistema na forma de calor durante o processo CA se a energia adicionada como calor Q_{AB} durante o processo AB é 20,0 J, nenhuma energia é transferida como calor durante o processo BC e o trabalho realizado durante o ciclo é 15,0 J.

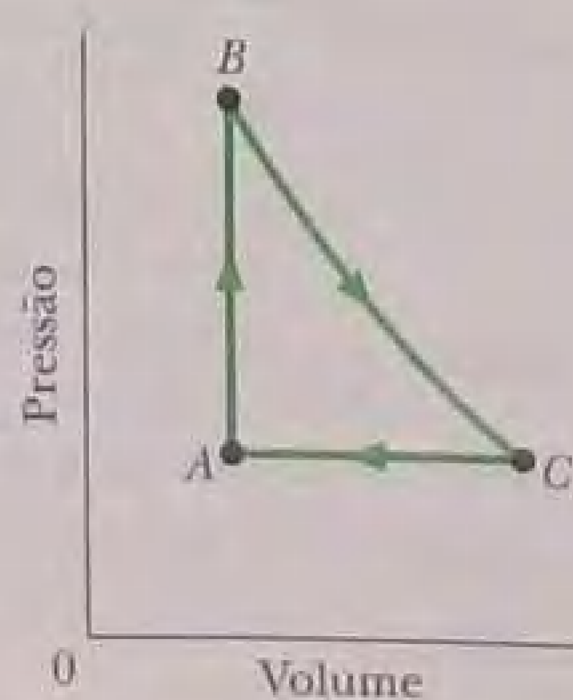


Figura 18-40 Problema 48.

••**49** A Fig. 18-41 mostra um ciclo fechado de um gás (a figura não foi desenhada em escala). A variação da energia interna do gás ao passar de a para c ao longo da trajetória abc é -200 J. Quando o gás passa de c para d, recebe 180 J na forma de calor. Mais 80 J são recebidos quando o gás passa de d para a. Qual é o trabalho realizado sobre o gás quando passa de c para d?

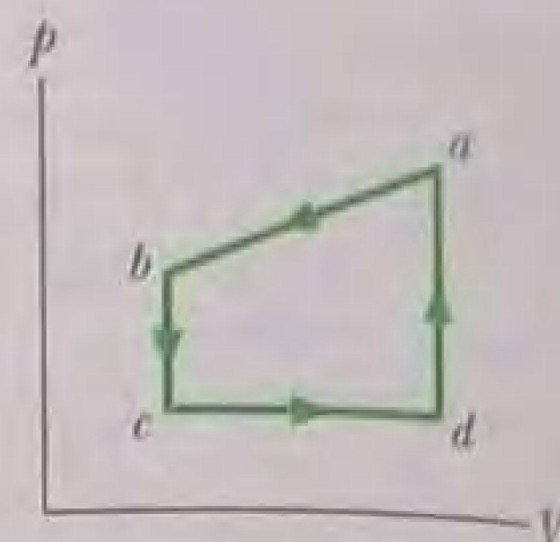


Figura 18-41 Problema 49.

••**50** Uma amostra de gás passa pelo ciclo $abca$ mostrado no diagrama p-V da Fig. 18-42. O trabalho realizado é $+1{,}2$ J. Ao longo da trajetória ab, a variação da energia interna é $+3{,}0$ J e o valor absoluto do trabalho realizado é 5,0 J. Ao longo da trajetória ca, a energia transferida para o gás na forma de calor é $+2{,}5$ J. Qual é a energia transferida na forma de calor ao longo (a) da trajetória ab e (b) da trajetória bc?

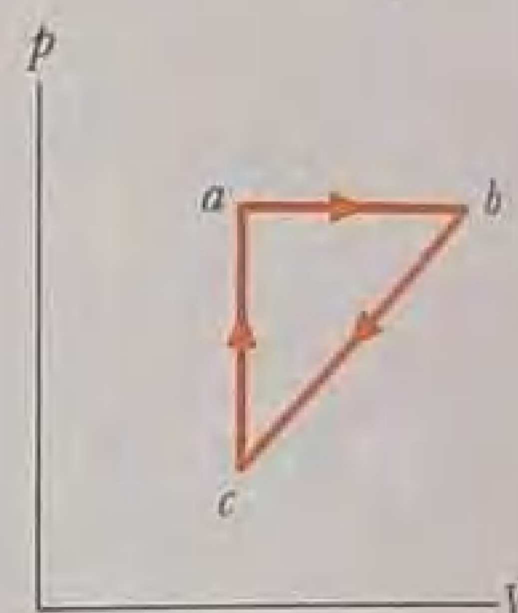


Figura 18-42 Problema 50.

Seção 18-12 Mecanismos de Transferência de Calor

•**51** Uma esfera com 0,500 m de raio, cuja emissividade é 0,850, está a 27,0°C em um local onde a temperatura ambiente é 77,0°C. Com que taxa a esfera (a) emite e (b) absorve radiação térmica? (c) Qual é a taxa de troca de energia da esfera?

•**52** O teto de uma casa em uma cidade de clima frio deve ter uma resistência térmica R de $30\ m^2 \cdot K/W$. Para isso, qual deve ser a espessura de um revestimento (a) de espuma de poliuretano e (b) de prata?

•**53** Considere a placa da Fig. 18-18. Suponha que $L = 25{,}0$ cm, $A = 90{,}0\ cm^2$ e que o material é cobre. Se $T_Q = 125°C$, $T_F = 10{,}0°C$ e o sistema está no regime estacionário, determine a taxa de condução de calor através da placa.

•**54** Se você se expusesse por alguns momentos ao espaço sideral longe do Sol e sem um traje espacial (como fez um astronauta no filme *2001: Uma Odisseia no Espaço*), sentiria o frio do espaço, ao irradiar muito mais energia que a absorvida do ambiente. (a) Com que taxa você perderia energia? (b) Quanta energia você perderia em 30 s? Suponha que sua emissividade é 0,90 e estime outros dados necessários para os cálculos.

•**55** Uma barra cilíndrica de cobre de 1,2 m de comprimento e 4,8 cm^2 de seção reta é bem isolada e não perde energia através da superfície. A diferença de temperatura entre as extremidades é 100C°, já que uma está imersa em uma mistura de água e gelo e a outra em uma mistura de água e vapor. (a) Com que taxa a energia é conduzida pela barra? (b) Com que taxa o gelo derrete na extremidade fria?

••**56** A vespa gigante *Vespa mandarinia japonica* se alimenta de abelhas japonesas. Entretanto, se uma vespa tenta invadir uma colmeia, centenas de abelhas formam rapidamente uma bola em torno da vespa para detê-la. As abelhas não picam, mordem, esma-

gam ou sufocam a vespa; limitam-se a aquecê-la, aumentando sua temperatura do valor normal de 35°C para 47°C ou 48°C, um valor que é mortal para a vespa, mas não para as abelhas (Fig. 18-43). Suponha o seguinte: 500 abelhas formam uma bola de raio $R = 2{,}0$ cm durante um intervalo de tempo $t = 20$ min, o mecanismo principal de perda de energia da bola é a radiação térmica, a superfície da bola tem uma emissividade $\varepsilon = 0{,}80$ e a temperatura da bola é uniforme. Qual é a quantidade de energia que uma abelha precisa produzir, em média, durante os 20 min para manter a temperatura da bola em 47°C?



Figura 18-43 Problema 56. *(©Dr. Masato Ono, Tamagawa University)*

••57 (a) Qual é a taxa de perda de energia em watts por metro quadrado através de uma janela de vidro de 3,0 mm de espessura se a temperatura externa é −20°F e a temperatura interna é +72°F? (b) Uma janela para tempestades, feita com a mesma espessura de vidro, é instalada do lado de fora da primeira, com um espaço de 7,5 cm entre as duas janelas. Qual é a nova taxa de perda de energia se a condução é o único mecanismo importante de perda de energia?

••58 Um cilindro maciço de raio $r_1 = 2{,}5$ cm, comprimento $h_1 = 5{,}0$ cm, emissividade $\varepsilon = 0{,}850$ e temperatura $T_c = 30$°C está suspenso em um ambiente de temperatura $T_a = 50$°C. (a) Qual é a taxa líquida P_1 de transferência de radiação térmica do cilindro? (b) Se o cilindro é esticado até que o raio diminua para $r_2 = 0{,}50$ cm, a taxa líquida de transferência de radiação térmica passa a ser P_2. Qual é a razão P_2/P_1?

••59 Na Fig. 18-44*a*, duas barras retangulares metálicas de mesmas dimensões e feitas da mesma substância são soldadas pelas faces de menor área e mantidas a uma temperatura $T_1 = 0$°C do lado esquerdo e a uma temperatura $T_2 = 100$°C do lado direito. Em 2,0 min, 10 J são conduzidos a uma taxa constante do lado direito para o lado esquerdo. Que tempo seria necessário para conduzir 10 J se as placas fossem soldadas pelas faces de maior área, como na Fig. 18-44*b*?

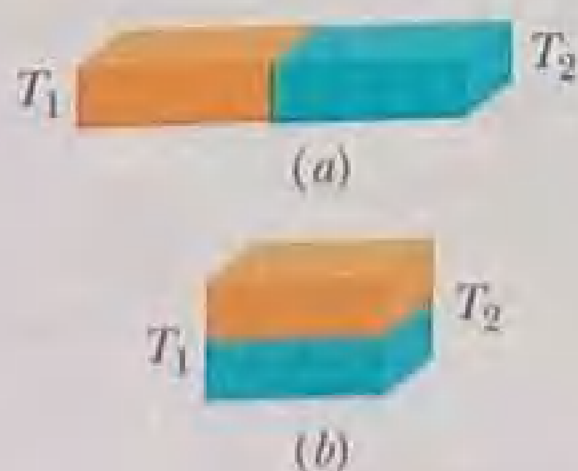


Figura 18-44 Problema 59.

••60 A Fig. 18-45 mostra uma parede feita de três camadas de espessuras L_1, $L_2 = 0{,}700L_1$ e $L_3 = 0{,}350L_1$. As condutividades térmicas são k_1, $k_2 = 0{,}900k_1$ e $k_3 = 0{,}800k_1$. As temperaturas do lado esquerdo e do lado direito da parede são $T_Q = 30{,}0$°C e $T_F = -15{,}0$°C, respectivamente. O sistema está no regime estacionário. (a) Qual é a diferença de temperatura ΔT_2 na camada 2 (entre o lado esquerdo e o lado direito da camada)? Se o valor de k_2 fosse $1{,}1k_1$, (b) a taxa de condução de energia através da parede seria maior, menor ou igual à anterior e (c) qual seria o valor de ΔT_2?

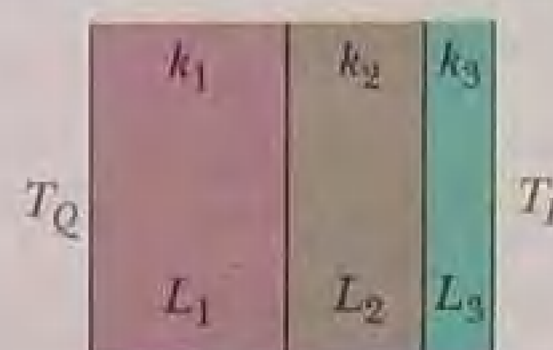


Figura 18-45 Problema 60.

••61 Uma placa de gelo com 5,0 cm de espessura se formou na superfície de uma caixa d'água em um dia frio de inverno (Fig. 18-46). O ar acima do gelo está a −10°C. Calcule a taxa de formação da placa de gelo em cm/h. Suponha que a condutividade térmica do gelo é 0,0040 cal/s · cm · C° e que a massa específica é 0,92 g/cm³. Suponha também que a transferência de energia através das paredes e do fundo do tanque pode ser desprezada.



Figura 18-46 Problema 61.

••62 *Efeito Leidenfrost.* Quando se deixa cair uma gota d'água em uma frigideira cuja temperatura está entre 100°C e 200°C, a gota dura menos de 1 s. Entretanto, se a temperatura da frigideira é maior, a gota pode durar vários minutos, um efeito que recebeu o nome de um médico alemão que foi um dos primeiros a investigar o fenômeno. O efeito se deve à formação de uma fina camada de ar e vapor d'água que separa a gota do metal (Fig. 18-47). Suponha que a distância entre a gota e a frigideira é $L = 0{,}100$ mm e que a gota tem a forma de um cilindro de altura $h = 1{,}50$ mm e área da base $A = 4{,}00 \times 10^{-6}$ m². Suponha também que a frigideira é mantida a uma temperatura constante $T_f = 300$°C e que a temperatura da gota é 100°C. A massa específica da água é $\rho = 1000$ kg/m³ e a condutividade térmica da camada que separa a gota da frigideira é $k = 0{,}026$ W/m · K. (a) Com que taxa a energia é conduzida da frigideira para a gota? (b) Se a condução é a principal forma de transmissão de energia da frigideira para a gota, quanto tempo a gota leva para evaporar?



Figura 18-47 Problema 62.

••63 A Fig. 18-48 mostra uma parede feita de quatro camadas, de condutividades térmicas $k_1 = 0{,}060$ W/m·K, $k_3 = 0{,}040$ W/m · K e $k_4 = 0{,}12$ W/m · K (k_2 não é conhecida). As espessuras das ca-

madas são $L_1 = 1{,}5$ cm, $L_3 = 2{,}8$ cm e $L_4 = 3{,}5$ cm (L_2 não é conhecida). As temperaturas conhecidas são $T_1 = 30°C$, $T_{12} = 25°C$ e $T_4 = -10°C$. A transferência de energia está no regime estacionário. Qual é o valor da temperatura T_{34}?

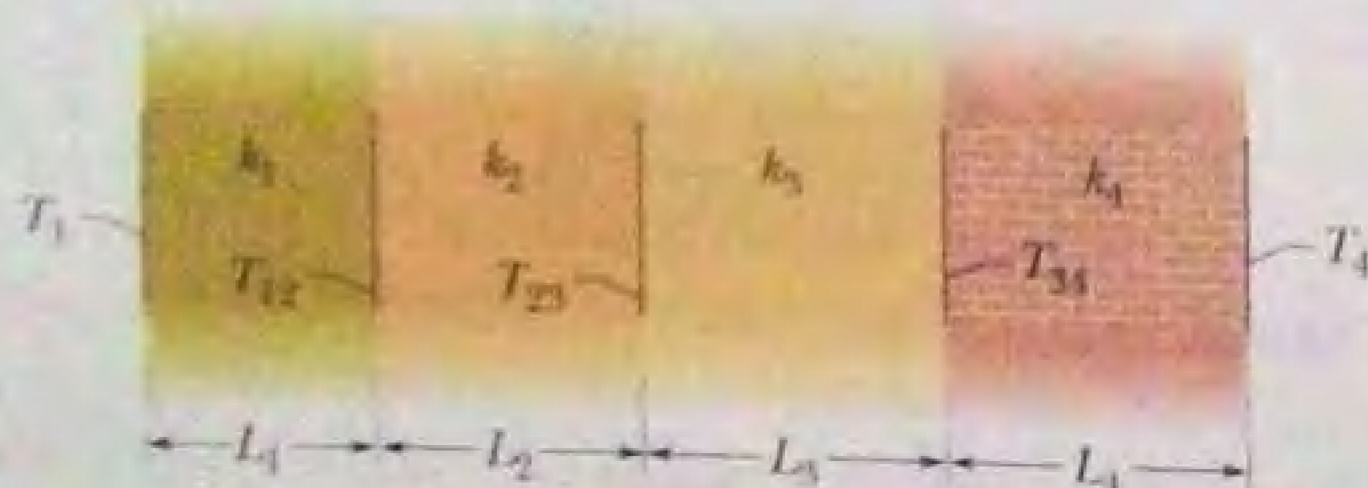


Figura 18-48 Problema 63.

••64 *Aglomerações de pinguins.* Para suportar o frio da Antártica, os pinguins-imperadores se aglomeram (Fig. 18-49). Suponha que um pinguim é um cilindro circular de altura $h = 1{,}1$ m e com uma área da base $a = 0{,}34$ m². Seja P_i a taxa com a qual um pinguim isolado irradia energia para o ambiente (através das superfícies superior e lateral); nesse caso, NP_i é a taxa com a qual N pinguins iguais e separados irradiam energia. Se os pinguins se aglomeram para formar um *cilindro único* de altura h e área da base Na, o cilindro irradia com uma taxa P_h. Se $N = 1000$, determine (a) o valor da razão P_h/NP_i e (b) a redução percentual da perda de energia devido à aglomeração.



Figura 18-49 Problema 64. *(Alain Torterotot/Peter Arnold, Inc.)*

••65 Formou-se gelo em um pequeno lago e o regime estacionário foi atingido com o ar acima do gelo a $-5{,}0°C$ e o fundo do lago a $4{,}0°C$. Se a profundidade total do *gelo + água* é 1,4 m, qual é a espessura do gelo? (Suponha que as condutividades térmicas do gelo e da água são 0,40 e 0,12 cal/m · C° · s, respectivamente.)

•••66 *Resfriamento de bebidas por evaporação.* Uma bebida pode ser mantida fresca mesmo em um dia quente se for colocada em um recipiente poroso de cerâmica embebida em água. Suponha que a energia perdida por evaporação seja igual à energia recebida em consequência da troca de radiação através da superfície superior e das superfícies laterais do recipiente. O recipiente e a bebida estão a uma temperatura $T = 15°C$, a temperatura ambiente é $T_{amb} = 32°C$ e o recipiente é um cilindro de raio $r = 2{,}2$ cm e altura $h = 10$ cm. Suponha que a emissividade é $\varepsilon = 1$ e despreze outras trocas de energia. Qual é a taxa dm/dt de perda de massa de água do recipiente, em g/s?

Problemas Adicionais

67 Na extrusão de chocolate frio através de um tubo, o êmbolo que empurra o chocolate realiza trabalho. O trabalho por unidade de massa do chocolate é igual a p/ρ, onde p é a diferença entre a pressão aplicada e a pressão no local onde chocolate sai do tubo e ρ é a massa específica do chocolate. Em vez de aumentar a temperatura, esse trabalho funde a manteiga de cacau do chocolate, cujo calor de fusão é 150 kJ/kg. Suponha que todo o trabalho é consumido na fusão e que a manteiga de cacau constitui 30% da massa do chocolate. Que porcentagem da manteiga de cacau é fundida durante a extrusão se $p = 5{,}5$ MPa e $\rho = 1200$ kg/m³?

68 Os icebergs do Atlântico Norte constituem um grande perigo para os navios; por causa deles, as distâncias das rotas marítimas sofrem um aumento da ordem de 30% durante a temporada de icebergs. Já se tentou destruir os icebergs usando explosivos, bombas, torpedos, balas de canhão, aríetes e cobrindo-os com fuligem. Suponha que a fusão direta de um iceberg, através da instalação de fontes de calor no gelo, seja tentada. Que quantidade de energia na forma de calor é necessária para derreter 10% de um iceberg com uma massa de 200.000 toneladas métricas? (1 tonelada métrica = 1000 kg).

69 A Fig. 18-50 mostra um ciclo fechado de um gás. A variação da energia interna ao longo da trajetória ca é -160 J. A energia transferida para o gás como calor é 200 J ao longo da trajetória ab e 40 J ao longo da trajetória bc. Qual é o trabalho realizado pelo gás ao longo (a) da trajetória abc e (b) da trajetória ab?

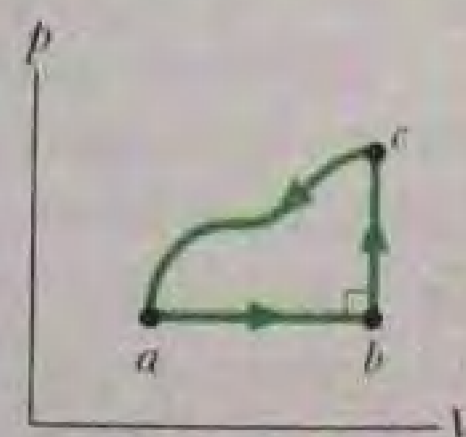


Figura 18-50 Problema 69.

70 Em casa com aquecimento solar, a energia proveniente do Sol é armazenada em barris com água. Em cinco dias seguidos no inverno em que o tempo permanece nublado, $1{,}00 \times 10^6$ kcal são necessárias para manter o interior da casa a $22{,}0°C$. Supondo que a água dos barris está a $50{,}0°C$ e que a água tem uma massa específica de $1{,}00 \times 10^3$ kg/m³, que volume de água é necessário?

71 Uma amostra de 0,300 kg é colocada em uma geladeira que remove calor a uma taxa constante de 2,81 W. A Fig. 18-51 mostra a temperatura T da amostra em função do tempo t. A escala de temperatura é definida por $T_s = 30°C$ e a escala de tempo é definida por $t_s = 20$ min. Qual é o calor específico da amostra?

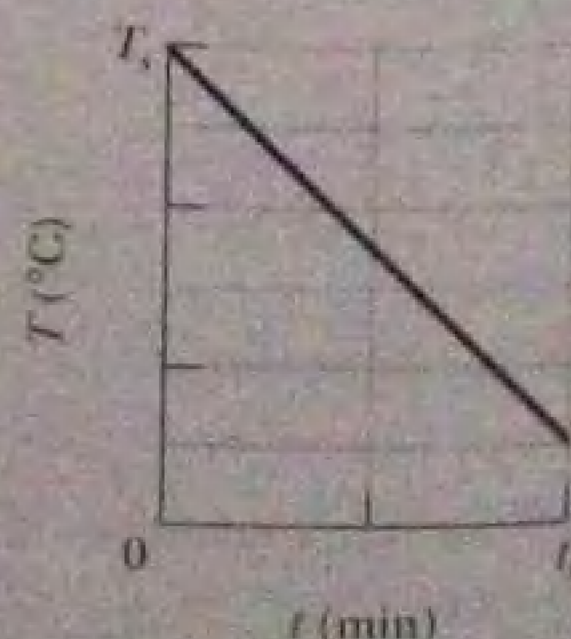


Figura 18-51 Problema 71.

72 A taxa média com a qual a energia chega à superfície na América do Norte é 54,0 mW/m² e a condutividade térmica média das rochas próximas da superfície é 2,50 W/m · K. Supondo que a temperatura

da superfície é 10,0°C, determine a temperatura a uma profundidade de 35,0 km (perto da base da crosta). Ignore o calor gerado pela presença de elementos radioativos.

73 Qual é o aumento de volume de um cubo de alumínio com 5,00 cm de lado quando o cubo é aquecido de 10,0°C para 60,0°C?

74 Em uma série de experimentos, um bloco B é colocado em um recipiente termicamente isolado em contato com um bloco A, que tem a mesma massa que o bloco B. Em cada experimento, o bloco B está inicialmente à temperatura T_B, mas a temperatura do bloco A varia de experimento para experimento. Suponha que T_f representa a temperatura final dos dois blocos ao atingirem o equilíbrio térmico. A Fig. 18-52 mostra a temperatura T_f em função da temperatura inicial T_A para um intervalo de valores de T_A, de $T_{A1} = 0$ K até $T_{A2} = 500$ K. Qual é (a) a temperatura T_B e (b) a razão c_B/c_A entre os calores específicos dos blocos?

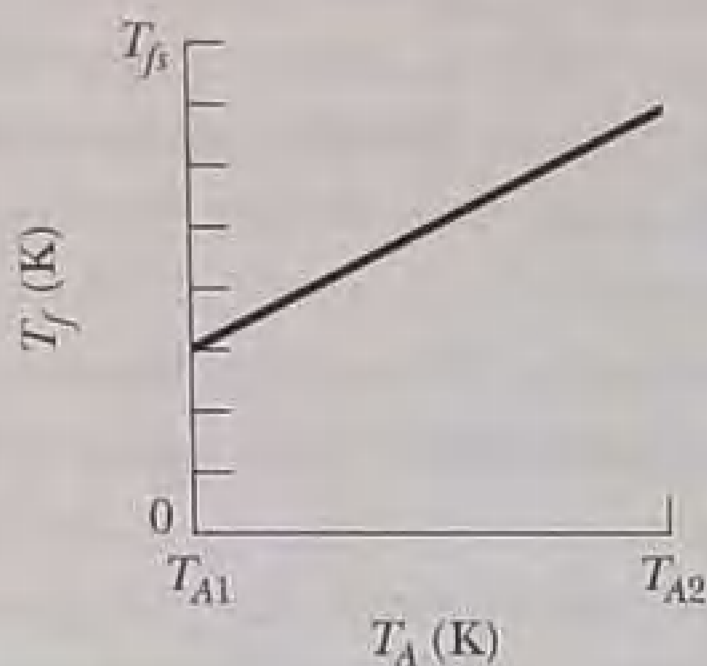


Figura 18-52 Problema 74.

75 A Fig. 18-53 mostra um ciclo fechado a que um gás é submetido. De c até b, 40 J deixam o gás na forma de calor. De b até a, 130 J deixam o gás na forma de calor e o valor absoluto do trabalho realizado pelo gás é 80 J. De a até c, 400 J são recebidos pelo gás na forma de calor. Qual é o trabalho realizado pelo gás de a até c? (*Sugestão:* é preciso levar em conta os sinais dos dados fornecidos.)

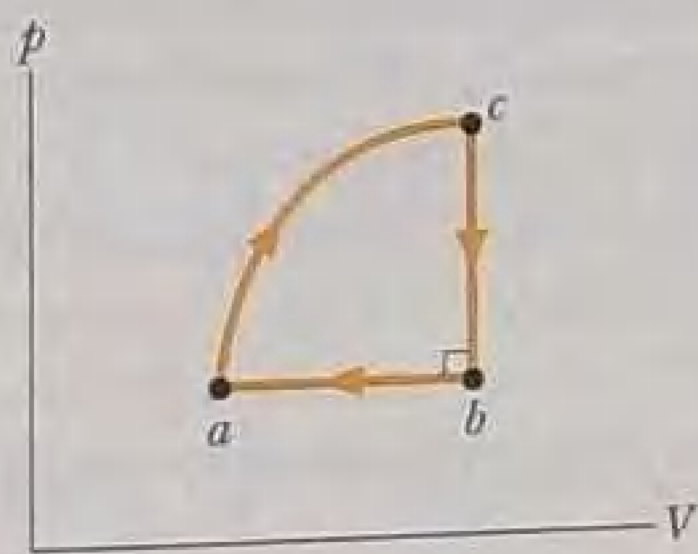


Figura 18-53 Problema 75.

76 Três barras retilíneas de mesmo comprimento, feitas de alumínio, Invar e aço, todas a 20,0°C, formam um triângulo equilátero com pinos articulados nos vértices. A que temperatura o ângulo oposto à barra de Invar é 59,95°? As fórmulas trigonométricas necessárias estão no Apêndice E e os dados necessários estão na Tabela 18-2.

77 A temperatura de um cubo de gelo de 0,700 kg é reduzida para −150°C. Em seguida, é fornecido calor ao cubo, mantendo-o termicamente isolado do ambiente. A transferência total é de 0,6993 MJ. Suponha que o valor de c_{gelo} que aparece na Tabela 18-3 é válido para temperaturas de −150°C a 0°C. Qual é a temperatura final da água?

78 *Pingentes de gelo.* A água cobre a superfície de um pingente de gelo ativo (em processo de crescimento) e forma um tubo curto e estreito na extremidade do eixo central (Fig. 18-54). Como a temperatura da interface água–gelo é 0°C, a água do tubo não pode perder energia para os lados do pingente ou para a ponta do tubo porque não há variação de temperatura nessas direções. A água pode perder energia e congelar apenas transferindo energia para cima (através de uma distância L) até o alto do pingente, onde a temperatura T_r pode ser menor que 0°C. Suponha que $L = 0,12$ m e $T_r = -5$°C. Suponha também que a seção reta do tubo e do pingente é A. Qual é, em termos de A, (a) a taxa com a qual a energia é transferida para cima e (b) a taxa com a qual a massa é convertida de água para gelo no alto do tubo central? (c) Qual é a velocidade com a qual o pingente se move para baixo por causa do congelamento da água? A condutividade térmica do gelo é 0,400 W/m · K e a massa específica da água é 1000 kg/m³.

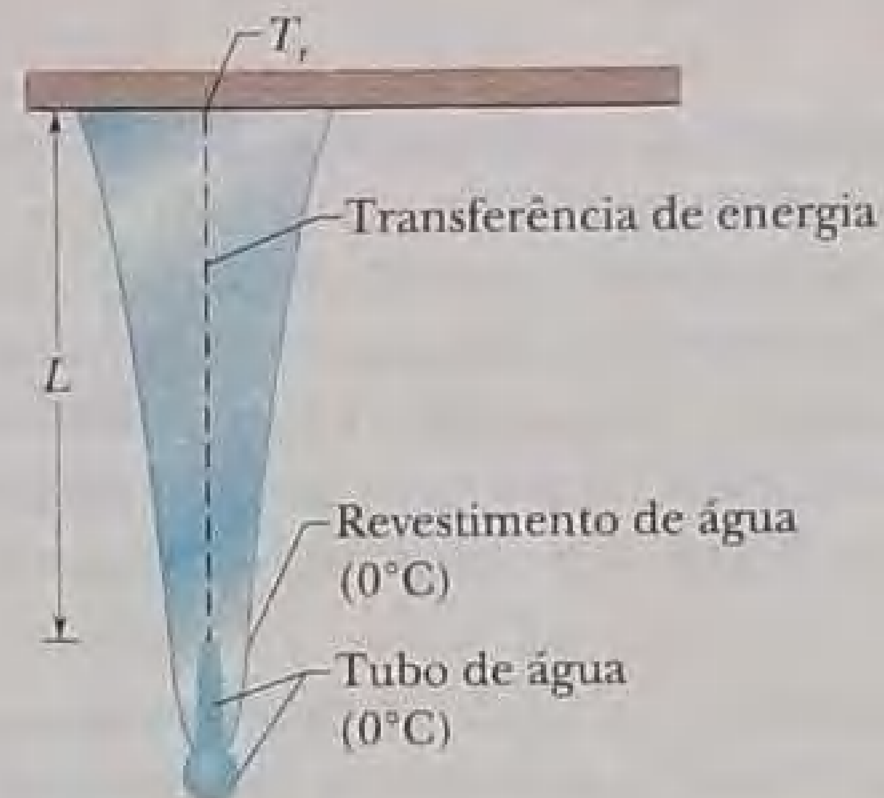


Figura 18-54 Problema 78.

79 Uma amostra de gás se expande de uma pressão inicial de 10 Pa e um volume inicial de 1,0 m³ para um volume final de 2,0 m³. Durante a expansão, a pressão e o volume estão relacionados pela equação $p = aV^2$, onde $a = 10$ N/m⁸. Determine o trabalho realizado pelo gás durante a expansão.

80 A Fig. 18-55a mostra um cilindro com gás, fechado por um êmbolo móvel. O cilindro é mantido submerso em uma mistura de gelo e água. O êmbolo é empurrado para baixo *rapidamente* da posição 1 para a posição 2 e mantido na posição 2 até que o gás esteja novamente à temperatura da mistura de gelo e água; em seguida, é erguido *lentamente* de volta para a posição 1. A Fig. 18-55b é um diagrama p-V do processo. Se 100 g de gelo são derretidos durante o ciclo, qual é o trabalho realizado *sobre* o gás?

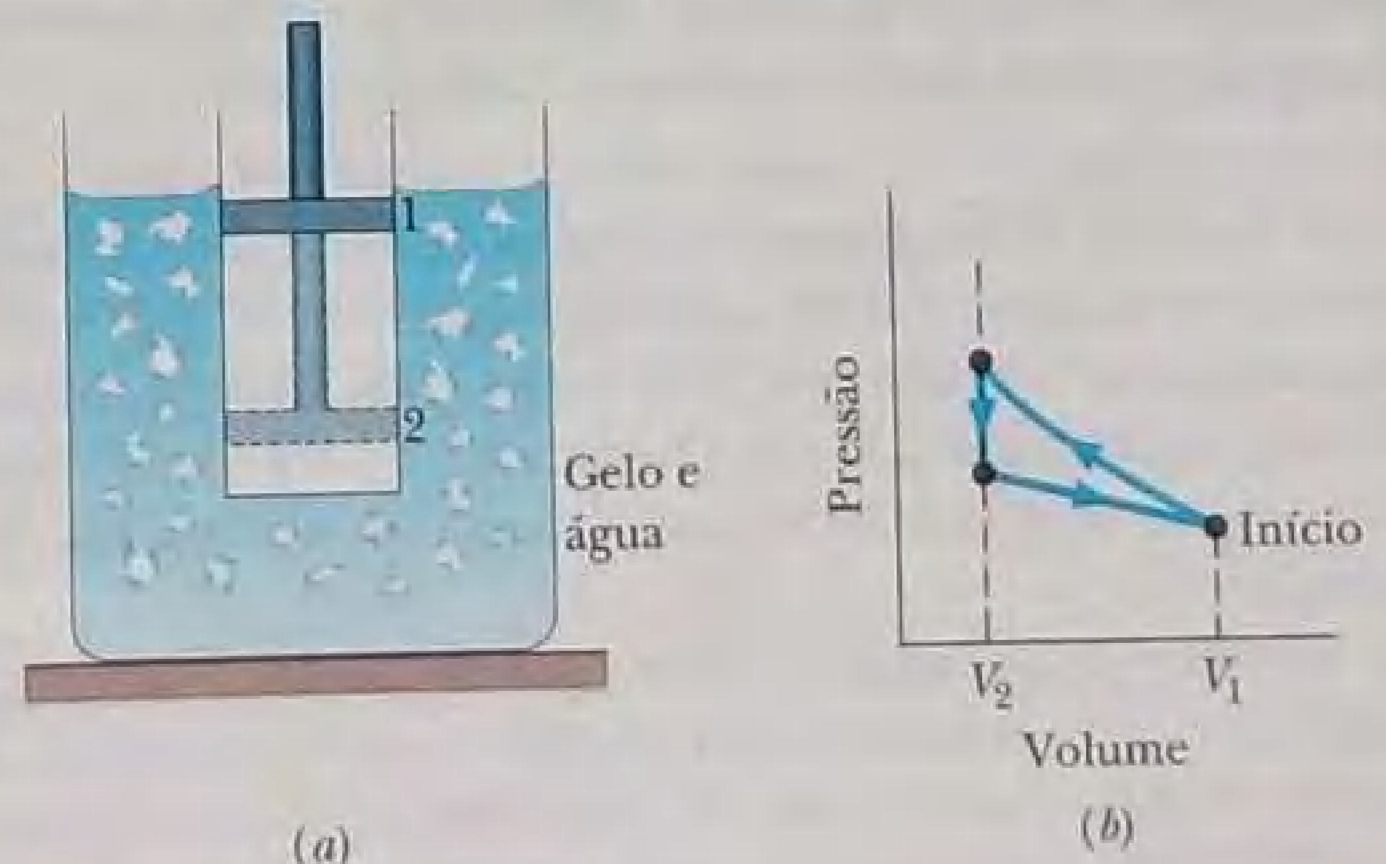


Figura 18-55 Problema 80.

81 Uma amostra de gás sofre uma transição de um estado inicial a para um estado final b por três diferentes trajetórias (processos), como mostra o diagrama p-V da Fig. 18-56, onde $V_b = 5,00V_i$. A energia transferida para o gás como calor no processo 1 é $10p_iV_i$. Em termos de p_iV_i, qual é (a) a energia transferida para o gás como

calor no processo 2 e (b) a variação da energia interna do gás no processo 3?

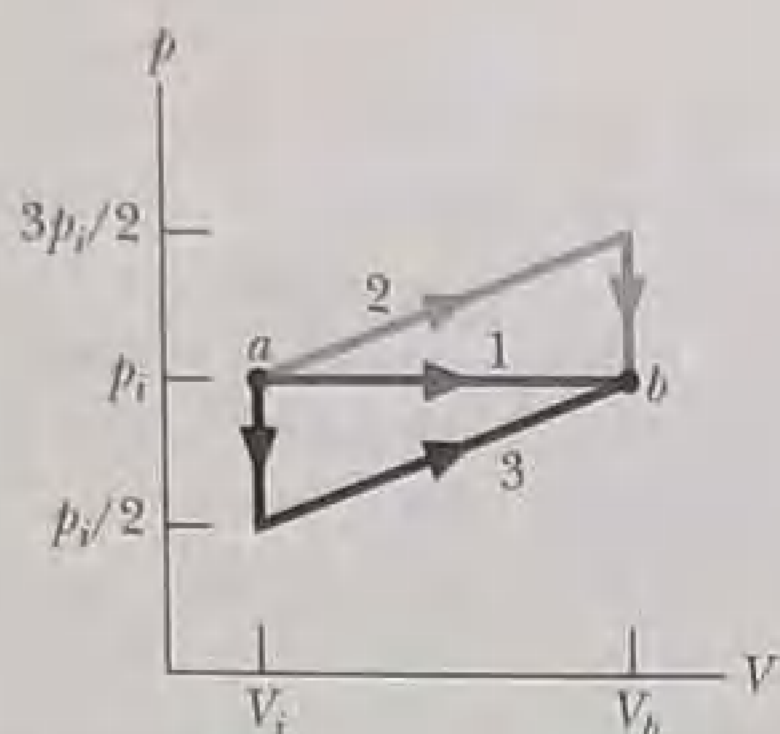


Figura 18-56 Problema 81.

82 Uma barra de cobre, uma barra de alumínio e uma barra de latão, todas com 6,00 m de comprimento e 1,00 cm de diâmetro, são colocadas em contato pelas extremidades, com a barra de alumínio no meio. A extremidade livre da barra de cobre é mantida no ponto de ebulição da água e a extremidade livre da barra de latão é mantida no ponto de congelamento da água. Qual é a temperatura, no regime estacionário, (a) da junção cobre–alumínio e (b) da junção alumínio–latão?

83 A temperatura de um disco de Pyrex varia de 10,0°C para 60,0°C. O raio inicial do disco é 8,00 cm e a espessura inicial é 0,500 cm. Tome esses dados como sendo exatos. Qual é a variação do volume do disco? (Veja a Tabela 18-2.)

84 (a) Calcule a taxa com a qual o calor do corpo atravessa a roupa de um esquiador em regime estacionário, a partir dos seguintes dados: a área da superfície do corpo é 1,8 m^2; a roupa tem 1,0 cm de espessura; a temperatura da pele é 33°C; a temperatura da superfície externa da roupa é 1,0°C; a condutividade térmica da roupa é 0,040 W/m · K. (b) Se, após uma queda, a roupa do esquiador fica encharcada de água, cuja condutividade térmica é 0,60 W/m · K, por que fator a taxa de condução é multiplicada?

85 Um lingote de 2,50 kg de alumínio é aquecido até 92,0°C e mergulhado em 8,00 kg de água a 5,00°C. Supondo que o sistema amostra–água está termicamente isolado, qual é a temperatura de equilíbrio do sistema?

86 Uma vidraça tem exatamente 20 cm por 30 cm a 10°C. De quanto aumenta a área da vidraça quando a temperatura aumenta para 40°C, supondo que pode se expandir livremente?

87 Um novato só pode entrar para o semissecreto clube "300 F"* da Estação Polar Amundsen-Scott, no Polo Sul, quando a temperatura do lado de fora está abaixo de −70°C. Em um dia como esse, o novato tem que fazer uma sauna e depois correr ao ar livre usando apenas sapatos. (Naturalmente, fazer isso é muito perigoso, mas o ritual é um protesto contra os riscos da exposição ao frio.)

Suponha que, ao sair da sauna, a temperatura da pele do novato seja 102°F e que as paredes, teto e piso da base estejam a uma temperatura de 30°C. Estime a área da superfície do novato e suponha que a emissividade da pele é 0,80. (a) Qual é a taxa líquida, $P_{líq}$, com a qual o novato perde energia através da troca de radiação térmica com o aposento? Em seguida, suponha que, ao ar livre, metade da área da superfície do recruta troca energia térmica com o céu à temperatura de −25°C e que a outra metade troca radiação térmica com a neve e o solo à temperatura de −80°C. Qual é a taxa líquida com a qual o recruta perde energia através da troca de radiação térmica (b) com o céu e (c) com a neve e o solo?

88 Uma barra de aço a 25,0°C é fixada nas duas extremidades e resfriada. A que temperatura a barra se rompe? Use a Tabela 12-1.

89 Um atleta precisa perder peso e decide "puxar ferro". (a) Quantas vezes um peso de 80,0 kg deve ser levantado a uma altura de 1,00 m para queimar 0,50 kg de gordura, supondo que essa quantidade de gordura equivale a 3500 Cal? (b) Se o peso for levantado uma vez a cada 2,00 s, quanto tempo será necessário?

90 Logo depois que a Terra se formou, o calor liberado pelo decaimento de elementos radioativos aumentou a temperatura interna média de 300 para 3000 K, valor que permanece até hoje. Supondo que o coeficiente de dilatação volumétrica médio é $3{,}0 \times 10^{-5}$ K^{-1}, de quanto o raio da Terra aumentou desde que o planeta se formou?

91 É possível derreter um bloco de gelo esfregando-o em outro bloco de gelo. Qual é o trabalho, em joules, necessário para derreter 1,00 g de gelo?

92 Uma placa retangular de vidro mede inicialmente 0,200 m por 0,300 m. O coeficiente de expansão linear do vidro é $9{,}00 \times 10^{-6}$/K. Qual é a variação da área da placa se a temperatura aumenta de 20,0 K?

93 Suponha que você intercepte $5{,}0 \times 10^{-3}$ da energia irradiada por uma esfera quente que tem um raio de 0,020 m, uma emissividade de 0,80 e uma temperatura de 500 K na superfície. Qual é a quantidade de energia que você intercepta em 2,0 min?

94 Um termômetro com 0,0550 kg de massa e um calor específico de 0,837 kJ/kg · K indica 15,0°C. O termômetro é totalmente imerso em 0,300 kg de água por tempo suficiente para ficar à mesma temperatura que a água. Se o termômetro indica 44,4°C, qual era a temperatura da água antes da introdução do termômetro?

95 Uma amostra de gás se expande de $V_1 = 1{,}0$ m^3 e $p_1 = 40$ Pa para $V_2 = 4{,}0$ m^3 e $p_2 = 10$ Pa seguindo a trajetória *B* do diagrama *p-V* da Fig. 18-57. Em seguida, o gás é comprimido de volta para V_1 seguindo a trajetória *A* ou a trajetória *C*. Calcule o trabalho realizado pelo gás em um ciclo completo ao longo (a) da trajetória *BA* e (b) da trajetória *BC*.

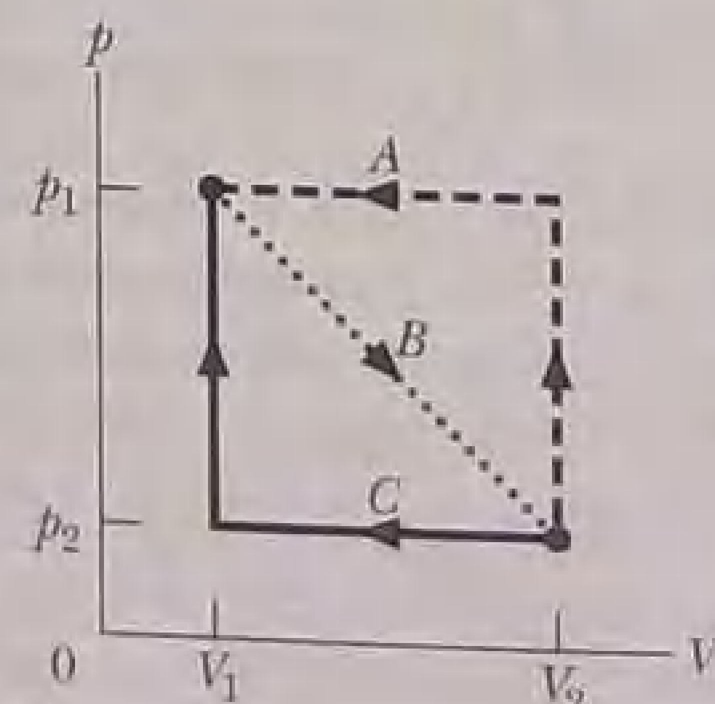


Figura 18-57 Problema 95.

*O nome se refere a uma diferença de 300°F entre a temperatura da sauna e a

CAPÍTULO

19

A TEORIA CINÉTICA DOS GASES

19-1 O QUE É FÍSICA?

Um dos tópicos principais da termodinâmica é a física dos gases. Um gás é formado por átomos (isolados ou unidos em moléculas) que ocupam totalmente o volume do recipiente em que se encontram e exercem pressão sobre as paredes. Em geral, podemos atribuir uma temperatura a um gás confinado. Essas três propriedades dos gases (volume, pressão e temperatura) estão relacionadas ao movimento dos átomos. O volume é uma consequência da liberdade que os átomos têm para se espalhar por todo o recipiente, a pressão é causada por colisões dos átomos com as paredes do recipiente e a temperatura está associada à energia cinética dos átomos. A **teoria cinética dos gases**, o foco deste capítulo, relaciona o volume, pressão e temperatura de um gás ao movimento dos átomos.

A teoria cinética dos gases tem muitas aplicações práticas. Os engenheiros automobilísticos estudam a queima do combustível vaporizado (um gás) no motor dos carros. Os engenheiros de alimentos medem a produção do gás de fermentação que faz o pão crescer quando está sendo assado. Os engenheiros da indústria de bebidas procuram entender de que forma o gás produz um "colarinho" em um copo de chope e arranca a rolha de uma garrafa de champanha. Os engenheiros biomédicos tentam calcular o tempo mínimo que um mergulhador deve levar para subir à superfície para não correr o risco de que bolhas de nitrogênio se formem no sangue. Os meteorologistas investigam os efeitos das trocas de calor entre os oceanos e a atmosfera sobre as condições do tempo.

O primeiro passo em nossa discussão da teoria cinética dos gases tem a ver com a medição da quantidade de gás presente em uma amostra, que envolve o número de Avogadro.

19-2 O Número de Avogadro

Quando estamos lidando com átomos e moléculas, faz sentido medir o tamanho das amostras em mols. Fazendo isso, temos certeza de que estamos comparando amostras que contêm o mesmo número de átomos e moléculas. O *mol*, uma das sete unidades fundamentais do SI, é definido da seguinte forma:

> Um mol é o número de átomos em uma amostra de 12 g de carbono 12.

A pergunta óbvia é a seguinte: "Quantos átomos ou moléculas existem em um mol?" A resposta foi obtida experimentalmente. Como vimos no Capítulo 18, esse número é

$$N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1} \quad \text{(número de Avogadro)}, \tag{19-1}$$

onde mol^{-1} representa o inverso do mol ou "por mol" e mol é o símbolo da unidade mol. O número N_A é chamado de **número de Avogadro** em homenagem ao cientista

italiano Amedeo Avogadro (1776–1856), um dos primeiros a concluir que todos os gases que ocupam o mesmo volume nas mesmas condições de temperatura e pressão contêm o mesmo número de átomos ou moléculas.

O número de mols n contidos em uma amostra de qualquer substância é igual à razão entre o número de moléculas N da amostra e o número de moléculas N_A em 1 mol:

$$n = \frac{N}{N_A}. \tag{19-2}$$

(*Atenção:* como os três símbolos da Eq. 19-2 podem ser facilmente confundidos, certifique-se de que compreendeu bem o que significam, para evitar problemas futuros.) Podemos calcular o número de mols n em uma amostra a partir da massa M_{am} da amostra e da *massa molar* M (a massa de um mol) ou da massa molecular m (a massa de uma molécula):

$$n = \frac{M_{am}}{M} = \frac{M_{am}}{mN_A}. \tag{19-3}$$

Na Eq. 19-3, usamos o fato de que a massa M de 1 mol é o produto da massa m de uma molécula pelo número de moléculas N_A em 1 mol:

$$M = mN_A. \tag{19-4}$$

19-3 Gases Ideais

Nosso objetivo neste capítulo é explicar as propriedades macroscópicas de um gás (como, por exemplo, pressão e temperatura) em termos das moléculas que o constituem. Surge, porém, um problema: de que gás estamos falando? Seria hidrogênio, oxigênio, metano, ou, talvez, hexafluoreto de urânio? São todos diferentes. As medidas mostram, porém, que se colocamos 1 mol de vários gases em recipientes de mesmo volume e os mantemos à mesma temperatura, as pressões são quase iguais. Se repetimos as medidas com concentrações dos gases cada vez menores, as pequenas diferenças de pressão tendem a desaparecer. Medidas muito precisas mostram que, em baixas concentrações, todos os gases reais obedecem à relação

$$pV = nRT \quad \text{(lei dos gases ideais)}, \tag{19-5}$$

em que p é a pressão absoluta (e não a manométrica), n é o número de mols do gás e T é a temperatura em kelvins. O fator R é chamado de **constante dos gases ideais** e possui o mesmo valor para todos os gases:

$$R = 8{,}31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}. \tag{19-6}$$

A Eq. 19-5 é a chamada **lei dos gases ideais**. Contanto que a concentração do gás seja baixa, a lei se aplica a qualquer gás ou mistura de gases. (No caso de uma mistura, n é o número total de mols na mistura.)

Podemos escrever a Eq. 19-5 de outra forma, em termos de uma constante k chamada **constante de Boltzmann**, definida como

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8{,}31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}}{6{,}02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}} = 1{,}38 \times 10^{-23} \text{ J/K}. \tag{19-7}$$

De acordo com a Eq. 19-7, $R = kN_A$. Assim, de acordo com a Eq. 19-2 ($n = N/N_A$), temos:

$$nR = Nk. \tag{19-8}$$

Substituindo essa relação na Eq. 19-5, obtemos uma segunda expressão para a lei dos gases ideais:

$$pV = NkT \quad \text{(lei dos gases ideais).} \tag{19-9}$$

(*Atenção:* note a diferença entre as duas expressões da lei dos gases ideais. A Eq. 19-5 envolve o número de mols, n, enquanto a Eq. 19-9 envolve o número de moléculas, N.)

O leitor pode estar se perguntando: O que é, afinal, um gás *ideal* e qual é sua importância? A resposta está na simplicidade da lei (Eqs. 19-5 e 19-9) que governa as propriedades macroscópicas de um gás ideal. Usando essa lei, como veremos em seguida, podemos deduzir muitas das propriedades de um gás real. Embora não exista na natureza um gás com as propriedades exatas de um gás ideal, *todos os gases reais* se aproximam do estado ideal em concentrações suficientemente baixas, ou seja, em condições nas quais as moléculas estão tão distantes umas das outras que praticamente não interagem. Assim, o conceito de gás ideal nos permite obter informações úteis a respeito do comportamento limite dos gases reais.



Figura 19-1 Um vagão-tanque esmagado da noite para o dia. (*Cortesia de www.Houston.RailFan.net*)

Uma equipe de faxina estava usando vapor d'água para limpar o interior do vagão-tanque da Fig. 19-1. Como ainda não haviam terminado o trabalho no final do expediente, fecharam as válvulas do vagão e foram embora. Quando voltaram na manhã seguinte, descobriram que as grossas paredes de aço do vagão tinham sido esmagadas, como se uma criatura gigantesca de um filme de ficção científica classe B tivesse pisado no vagão durante a noite.

A Eq. 19-9 fornece uma explicação para o que aconteceu com o vagão. Quando o vagão estava sendo lavado, o interior estava cheio de vapor quente, que é um gás de moléculas de água. A equipe de faxina deixou o vapor dentro do tanque quando fechou as válvulas do vagão no final do expediente. Nessa ocasião, a pressão no interior do tanque era igual à pressão atmosférica porque as válvulas tinham permanecido abertas durante a limpeza. Quando o vagão esfriou durante a noite, o vapor esfriou e a maior parte se transformou em água, o que significa que tanto o número N de moléculas de gás quanto a temperatura T do gás diminuíram. Assim, o lado direito da Eq. 19-9 diminuiu e, como o volume V se manteve constante, a pressão p do lado esquerdo também diminuiu. Em algum momento durante a noite, a pressão do gás no interior do vagão ficou tão baixa que a pressão atmosférica foi suficiente para esmagar as paredes de aço do vagão. A equipe de faxina poderia ter evitado o acidente deixando as válvulas abertas para que o ar entrasse no vagão e mantivesse a pressão interna igual à pressão atmosférica.

Trabalho Realizado por um Gás Ideal à Temperatura Constante

Suponha que um gás ideal seja introduzido em um cilindro com um êmbolo, como o do Capítulo 18. Suponha também que permitimos que o gás se expanda de um volume inicial V_i para um volume final V_f mantendo constante a temperatura T do gás. Um processo desse tipo, à *temperatura constante*, é chamado de **expansão isotérmica** (e o processo inverso é chamado de **compressão isotérmica**).

Em um diagrama p-V, uma *isoterma* é uma curva que liga pontos de mesma temperatura. Assim, é o gráfico da pressão em função do volume para um gás cuja temperatura T é mantida constante. Para n mols de um gás ideal, é o gráfico da equação

$$p = nRT\frac{1}{V} = (\text{constante})\ \frac{1}{V}. \tag{19-10}$$

A Fig. 19-2 mostra três isotermas, cada uma correspondendo a um valor diferente (constante) de T. (Observe que os valores de T das isotermas aumentam para cima e para a direita.) A expansão isotérmica do gás do estado i para o estado f à temperatura constante de 310 K está indicada na isoterma do meio.

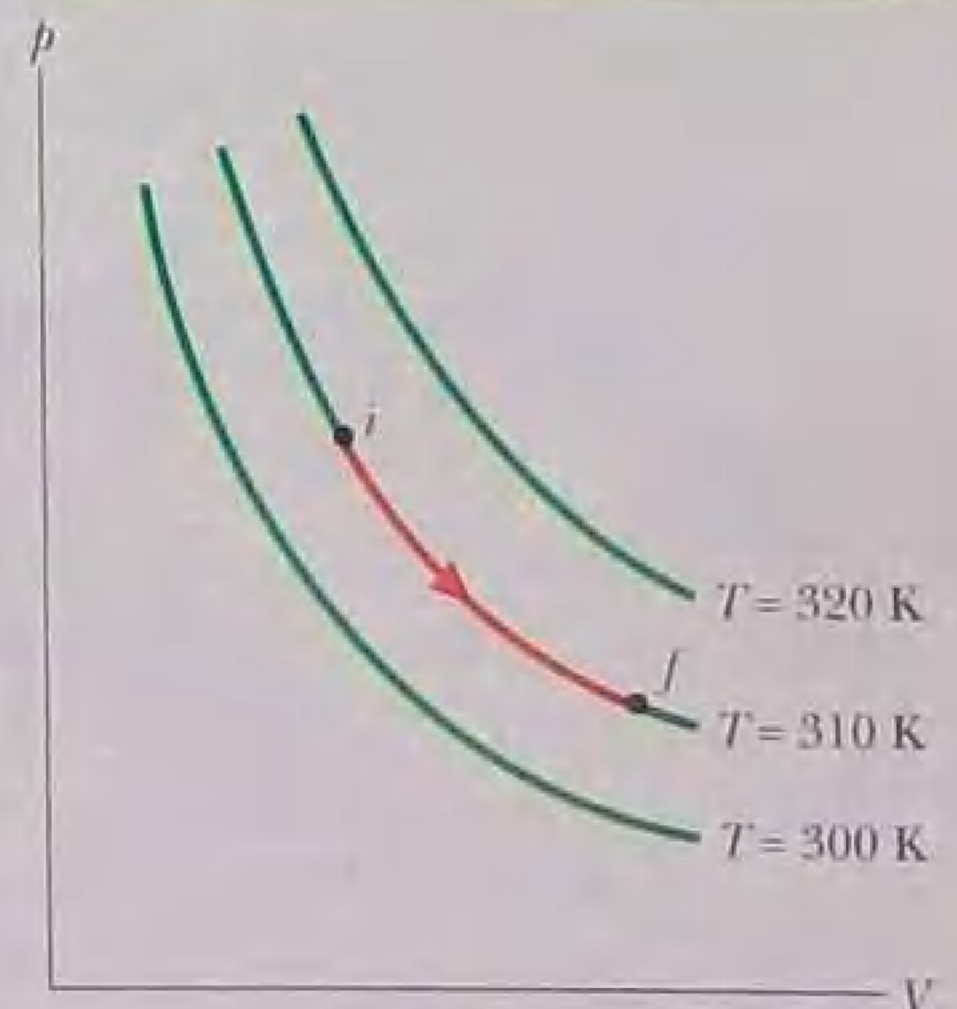


Figura 19-2 Três isotermas em um diagrama p-V. A trajetória mostrada na isoterma central representa uma expansão isotérmica de um gás de um estado inicial i para um estado final f. A trajetória de f para i na mesma isoterma representa o processo inverso, ou seja, uma compressão isotérmica.

Para determinar o trabalho realizado por um gás ideal durante uma expansão isotérmica, começamos com a Eq. 18-25,

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p\, dV. \tag{19-11}$$

A Eq. 19-11 é uma expressão geral para o trabalho realizado durante qualquer variação de volume de um gás. No caso de um gás ideal, podemos usar a Eq. 19-5 ($pV = nRT$) para eliminar p, obtendo

$$W = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}\, dV. \tag{19-12}$$

Como estamos supondo que se trata de uma expansão isotérmica, a temperatura T é constante, de modo que podemos colocá-la do lado de fora do sinal de integração e escrever

$$W = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \Big[\ln V\Big]_{V_i}^{V_f}. \tag{19-13}$$

Calculando o valor da expressão entre colchetes nos limites indicados e usando a identidade $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$, obtemos

$$W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \quad \text{(gás ideal, processo isotérmico).} \tag{19-14}$$

Lembre-se de que o símbolo ln indica que se trata de um logaritmo *natural*, de base e.

No caso de uma expansão, V_f é maior do que V_i, de modo que a razão V_f/V_i na Eq. 19-14 é maior que 1. O logaritmo natural de um número maior do que 1 é positivo e, portanto, como era de se esperar, o trabalho W realizado por um gás ideal durante uma expansão isotérmica é positivo. No caso de uma compressão, V_f é menor que V_i, de modo que a razão entre os volumes na Eq. 19-14 é menor que 1. Assim, como era de se esperar, o logaritmo natural nesta equação (e, portanto, o trabalho W) é negativo.

Trabalho Realizado a Volume Constante e à Pressão Constante

A Eq. 19-14 não permite calcular o trabalho W realizado por um gás ideal em *qualquer* processo termodinâmico; só pode ser usada quando a temperatura é mantida constante. Se a temperatura varia, a variável T da Eq. 19-12 não pode ser colocada do lado de fora do sinal de integração, como na Eq. 19-13, de modo que não é possível obter a Eq. 19-14.

TESTE 1

Um gás ideal tem uma pressão inicial de 3 unidades de pressão e um volume inicial de 4 unidades de volume. A tabela mostra a pressão final e o volume final do gás (nas mesmas unidades) em cinco processos. Que processos começam e terminam na mesma isoterma?

	a	*b*	*c*	*d*	*e*
p	12	6	5	4	1
V	1	2	7	3	12

Entretanto, podemos sempre voltar à Eq. 19-11 para determinar o trabalho W realizado por um gás ideal (ou qualquer outro gás) durante qualquer processo, como os processos a volume constante e à pressão constante. Se o volume do gás é constante, a Eq. 19-11 nos dá

$$W = 0 \quad \text{(processo a volume constante).} \tag{19-15}$$

Se, em vez disso, o volume varia enquanto a pressão p do gás é mantida constante, a Eq. 19-11 se torna

$$W = p(V_f - V_i) = p\,\Delta V \quad \text{(processo à pressão constante).} \tag{19-16}$$

Exemplo

Variações de temperatura, volume e pressão de um gás ideal

Um cilindro contém 12 L de oxigênio a 20°C e 15 atm. A temperatura é aumentada para 35°C e o volume é reduzido para 8,5 L. Qual é a pressão final do gás em atmosferas? Suponha que o gás seja ideal.

IDEIA-CHAVE

Como o gás é ideal, a pressão, volume, temperatura e número de mols estão relacionados pela lei dos gases ideais, tanto no estado inicial i como no estado final f.

Cálculos De acordo com a Eq. 19-5, temos:

$$p_iV_i = nRT_i \quad \text{e} \quad p_fV_f = nRT_f.$$

Dividindo a segunda equação pela primeira e explicitando p_f, obtemos

$$p_f = \frac{p_iT_fV_i}{T_iV_f}. \qquad (19\text{-}17)$$

Observe que não há necessidade de converter os volumes inicial e final de litros para metros cúbicos, já que os fatores de conversão são multiplicativos e se cancelam na Eq. 19-17. O mesmo se aplica aos fatores de conversão da pressão de atmosferas para pascals. Por outro lado, a conversão de graus Celsius para kelvins envolve a soma de constantes que não se cancelam. Assim, para aplicar corretamente a Eq. 19-17, as temperaturas devem estar expressas em kelvins:

$$T_i = (273 + 20)\ \text{K} = 293\ \text{K}$$

e

$$T_f = (273 + 35)\ \text{K} = 308\ \text{K}.$$

Substituindo os valores conhecidos na Eq. 19-17, obtemos

$$p_f = \frac{(15\ \text{atm})(308\ \text{K})(12\ \text{L})}{(293\ \text{K})(8{,}5\ \text{L})} = 22\ \text{atm}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo

Trabalho realizado por um gás ideal

Um mol de oxigênio (trate-o como um gás ideal) se expande a uma temperatura constante T de 310 K de um volume inicial V_i de 12 L para um volume final V_f de 19 L. Qual é o trabalho realizado pelo gás durante a expansão?

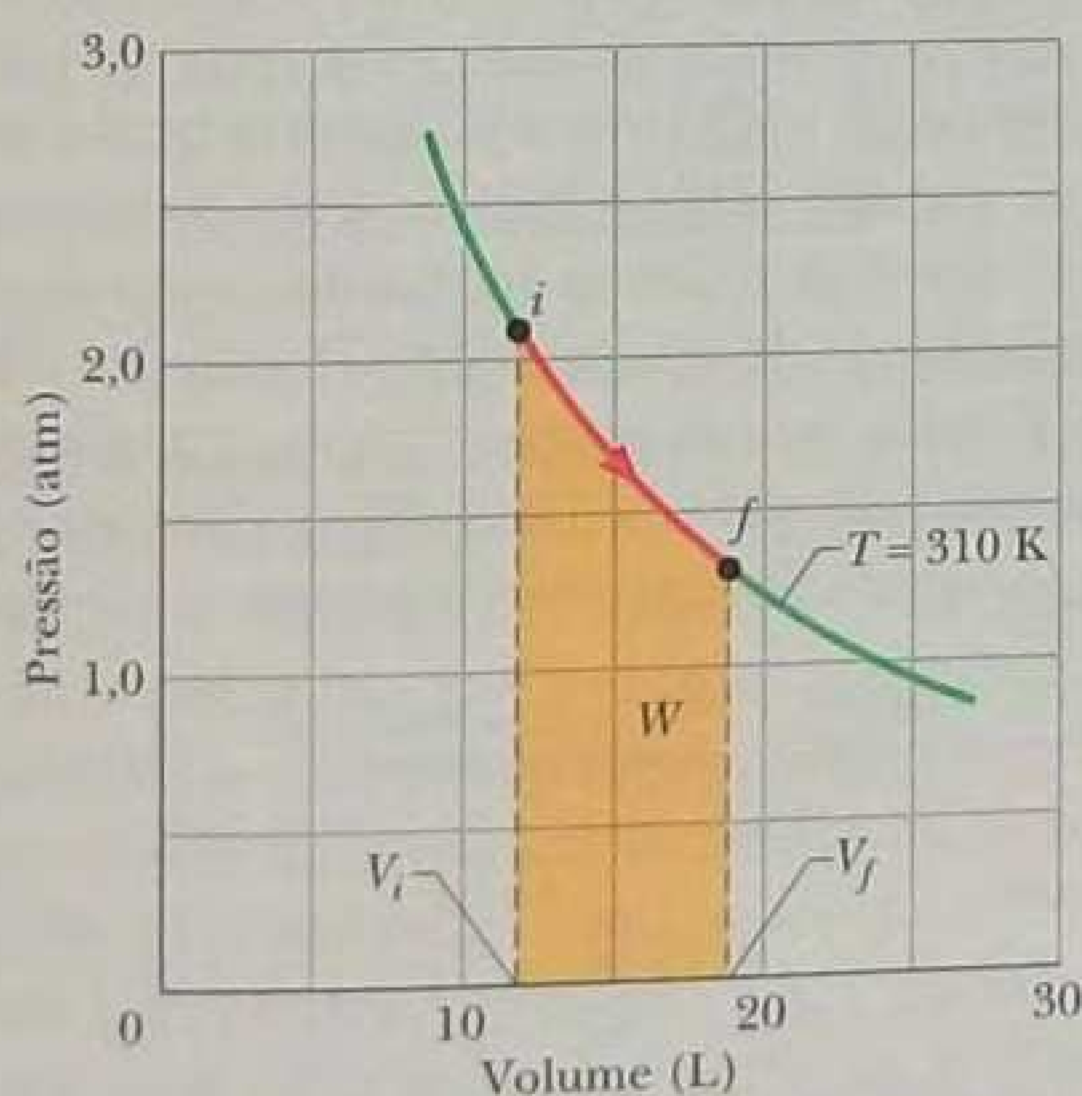


Figura 19-3 A área sombreada representa o trabalho realizado por 1 mol de oxigênio ao se expandir de V_i para V_f a uma temperatura constante de 310 K.

IDEIA-CHAVE

Em geral, calculamos o trabalho integrando a pressão do gás em relação ao volume usando a Eq. 19-11. Neste caso, porém, como o gás é ideal e a expansão é isotérmica, essa integração leva à Eq. 19-14.

Cálculo Podemos escrever:

$$W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

$$= (1\ \text{mol})(8{,}31\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(310\ \text{K}) \ln \frac{19\ \text{L}}{12\ \text{L}}$$

$$= 1180\ \text{J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

A expansão está indicada no diagrama p-V da Fig. 19-3. O trabalho realizado pelo gás durante a expansão é representado pela área sob a curva if.

É fácil mostrar que se a expansão for revertida, com o gás sofrendo uma compressão isotérmica de 19 L para 12 L, o trabalho realizado pelo gás será -1180 J. Assim, uma força externa teria que realizar um trabalho de 1180 J sobre o gás para comprimi-lo.

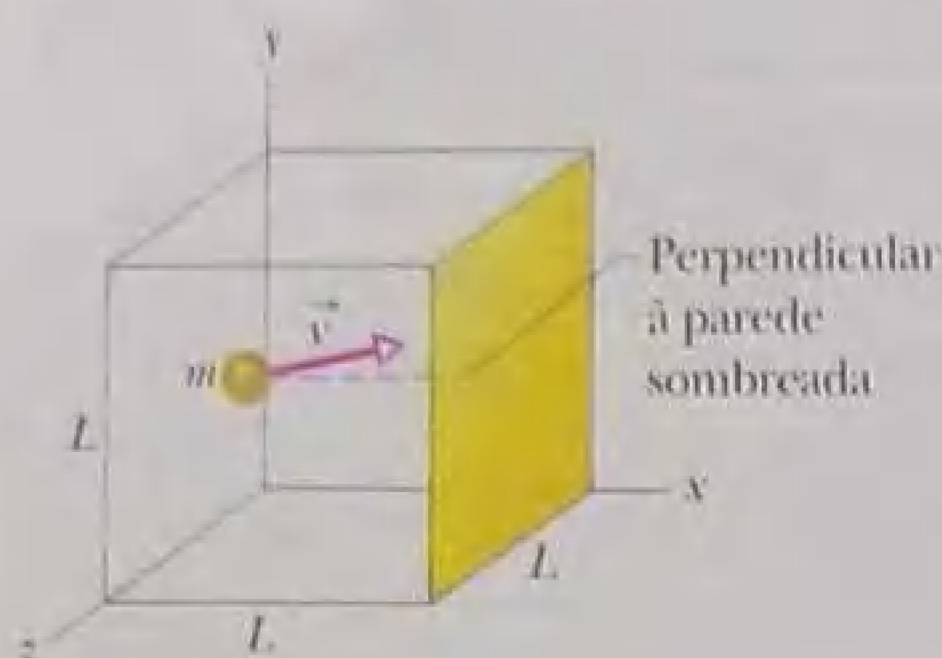


Figura 19-4 Uma caixa cúbica de aresta L contendo n mols de um gás ideal. Uma molécula de massa m e velocidade $\vec{v}$ está prestes a colidir com a parede sombreada de área L^2. É mostrada também uma reta perpendicular a essa parede.

19-4 Pressão, Temperatura e Velocidade Média Quadrática

Vamos passar agora ao nosso primeiro problema de teoria cinética dos gases. Considere n mols de um gás ideal em uma caixa cúbica de volume V, como na Fig. 19-4. As paredes da caixa são mantidas a uma temperatura T. Qual é a relação entre a pressão p exercida pelo gás sobre as paredes da caixa e a velocidade das moléculas?

As moléculas de gás no interior da caixa estão se movendo em todas as direções e com várias velocidades, colidindo umas com as outras e ricocheteando nas paredes como bolas em uma quadra de squash. Vamos ignorar (por enquanto) as colisões das moléculas umas com as outras e considerar apenas as colisões elásticas com as paredes.

A Fig. 19-4 mostra uma molécula de gás típica, de massa m e velocidade $\vec{v}$, que está prestes a colidir com a parede sombreada. Como estamos supondo que as colisões das moléculas com as paredes são elásticas, quando a molécula colide com a parede, a única componente da velocidade que muda é a componente x, que troca de sinal. Isso significa que a única componente do momento que muda é a componente x, que sofre uma variação

$$\Delta p_x = (-mv_x) - (mv_x) = -2mv_x.$$

Assim, o momento Δp_x transferido para a parede pela molécula durante a colisão é $2mv_x$. (Como neste livro o símbolo p é usado para representar tanto o momento como a pressão, precisamos tomar cuidado e observar que, neste caso, p representa o momento e é uma grandeza vetorial.)

A molécula da Fig. 19-4 se choca várias vezes com a parede sombreada. O intervalo de tempo Δt entre colisões é o tempo que a molécula leva para se deslocar até a parede oposta e voltar (percorrendo uma distância $2L$), movendo-se com uma velocidade v_x. Assim, Δt é igual a $2L/v_x$. (Note que este resultado é válido mesmo que a molécula colida com outras paredes no caminho, já que essas paredes são paralelas a x e, portanto, não podem mudar o valor de v_x.) Assim, a taxa média com a qual o momento é transmitido para a parede sombreada é dada por

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2L/v_x} = \frac{mv_x^2}{L}.$$

De acordo com a segunda lei de Newton ($\vec{F} = d\vec{p}/dt$), a taxa com a qual o momento é transferido para a parede é a força que age sobre a parede. Para determinar a força total, devemos somar as contribuições de todas as moléculas que colidem com a parede, levando em conta a possibilidade de que tenham velocidades diferentes. Dividindo o módulo da força total F_x pela área da parede ($= L^2$), temos a pressão p a que é submetida a parede, onde agora e no resto da discussão p representa pressão. Assim, usando a expressão de $\Delta p_x/\Delta t$, podemos escrever a pressão na forma

$$p = \frac{F_x}{L^2} = \frac{mv_{x1}^2/L + mv_{x2}^2/L + \cdots + mv_{xN}^2/L}{L^2}$$

$$= \left(\frac{m}{L^3}\right)(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \cdots + v_{xN}^2), \qquad (19\text{-}18)$$

onde N é o número de moléculas que existem na caixa.

Como $N = nN_A$, o segundo fator entre parênteses da Eq. 19-18 possui nN_A parcelas. Podemos substituir a soma por $nN_A(v_x^2)_{méd}$, onde $(v_x^2)_{méd}$ é o valor médio do quadrado da componente x da velocidade de todas as moléculas. Nesse caso, a Eq. 19-18 se torna

$$p = \frac{nmN_A}{L^3}(v_x^2)_{méd}.$$

Entretanto, mN_A é a massa molar M do gás (ou seja, a massa de 1 mol do gás). Como, além disso, L^3 é o volume do gás, temos:

$$p = \frac{nM(v_x^2)_{\text{méd}}}{V}. \tag{19-19}$$

Para qualquer molécula, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Como há muitas moléculas se movendo em direções aleatórias, o valor médio do quadrado das componentes da velocidade não depende da direção considerada e, portanto, $v_x^2 = v_y^2 = v_z^2 = \frac{1}{3}v^2$. Assim, a Eq.19-19 se torna

$$p = \frac{nM(v^2)_{\text{méd}}}{3V}. \tag{19-20}$$

A raiz quadrada de $(v^2)_{\text{méd}}$ é uma espécie de velocidade média, conhecida como **velocidade média quadrática** das moléculas e representada pelo símbolo v_{rms}.* Para calcular a velocidade média quadrática, elevamos a velocidade das moléculas ao quadrado, obtemos a média de todas as velocidades e extraímos a raiz quadrada do resultado. Fazendo $\sqrt{(v^2)_{\text{méd}}} = v_{\text{rms}}$, podemos escrever a Eq. 19-20 na forma

$$p = \frac{nMv_{\text{rms}}^2}{3V}. \tag{19-21}$$

A Eq. 19-21 representa bem o espírito da teoria cinética dos gases, mostrando que a pressão de um gás (uma grandeza macroscópica) depende da velocidade das moléculas que o compõem (uma grandeza microscópica).

Podemos inverter a Eq. 19-21 e usá-la para calcular v_{rms}. Combinando a Eq. 19-21 com a lei dos gases ideais ($pV = nRT$), temos:

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \tag{19-22}$$

A Tabela 19-1 mostra algumas velocidades médias quadráticas calculadas usando a Eq. 19-22. As velocidades são surpreendentemente elevadas. Para moléculas de hidrogênio à temperatura ambiente (300 K), a velocidade média quadrática é 1920 m/s ou 6900 km/h, maior que a de uma bala de fuzil! Na superfície do Sol, onde a temperatura é 2×10^6 K, a velocidade média quadrática das moléculas de hidrogênio seria 82 vezes maior que à temperatura ambiente, se não fosse pelo fato de que em velocidades tão altas as moléculas não sobrevivem a colisões com outras moléculas. Lembre-se também de que a velocidade média quadrática é apenas uma espécie de velocidade média; muitas moléculas se movem muito mais depressa e outras muito mais devagar que esse valor.

A velocidade do som em um gás está intimamente ligada à velocidade média quadrática das moléculas. Em uma onda sonora, a perturbação é passada de molécula para molécula através de colisões. A onda não pode se mover mais depressa que a velocidade "média" das moléculas. Na verdade, a velocidade do som deve ser um pouco menor que a velocidade "média" das moléculas porque nem todas as moléculas estão se movendo na mesma direção que a onda. Assim, por exemplo, à temperatura ambiente, a velocidade média quadrática das moléculas de hidrogênio e de nitrogênio é 1920 m/s e 517 m/s, respectivamente. A velocidade do som nos dois gases a essa temperatura é 1350 m/s e 350 m/s, respectivamente.

O leitor pode estar se perguntando: se as moléculas se movem tão depressa, por que levo quase um minuto para sentir o cheiro quando alguém abre um vidro de perfume do outro lado da sala? A resposta é que, como discutiremos na Seção 19-6, apesar de terem uma velocidade elevada, as moléculas de perfume se afastam lentamente do vidro por causa das colisões com outras moléculas, que as impedem de seguir uma trajetória retilínea.

* Do inglês *root mean square*, que significa valor médio quadrático. (N.T.)

Tabela 19-1

Algumas Velocidades Médias Quadráticas à Temperatura Ambiente ($T = 300$ K)[a]

Gás	Massa molar (10^{-3} kg/mol)	v_{rms} (m/s)
Hidrogênio (H_2)	2,02	1920
Hélio (He)	4,0	1370
Vapor d'água (H_2O)	18,0	645
Nitrogênio (N_2)	28,0	517
Oxigênio (O_2)	32,0	483
Dióxido de carbono (CO_2)	44,0	412
Dióxido de enxofre (SO_2)	64,1	342

[a] Por conveniência, a temperatura ambiente muitas vezes é tomada como 300 K (27°C), que é uma temperatura relativamente elevada.

Exemplo

Valor médio e valor médio quadrático

São dados cinco números: 5, 11, 32, 67 e 89.

(a) Qual é o valor médio $n_{méd}$ desses números?

Cálculo O valor médio é dado por

$$n_{méd} = \frac{5 + 11 + 32 + 67 + 89}{5} = 40{,}8. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é o valor médio quadrático n_{rms} desses números?

Cálculo O valor médio quadrático é dado por

$$n_{rms} = \sqrt{\frac{5^2 + 11^2 + 32^2 + 67^2 + 89^2}{5}}$$

$$= 52{,}1. \qquad \text{(Resposta)}$$

O valor médio quadrático é maior que o valor médio porque os números maiores, ao serem elevados ao quadrado, pesam mais no resultado final.

19-5 Energia Cinética de Translação

Vamos considerar novamente uma molécula de um gás ideal que se move no interior da caixa da Fig. 19-4, mas agora vamos supor que a velocidade da molécula varia quando ela colide com outras moléculas. A energia cinética de translação da molécula em um dado instante é $\frac{1}{2}mv^2$. A energia cinética de translação *média* em um certo intervalo de observação é

$$K_{méd} = (\tfrac{1}{2}mv^2)_{méd} = \tfrac{1}{2}m(v^2)_{méd} = \tfrac{1}{2}mv^2_{rms}, \qquad (19\text{-}23)$$

onde estamos supondo que a velocidade média da molécula durante o tempo de observação é igual à velocidade média das moléculas do gás. (Para que essa hipótese seja válida, é preciso que a energia total do gás não esteja variando e que a molécula seja observada por um tempo suficiente.) Substituindo v_{rms} pelo seu valor, dado pela Eq. 19-22, obtemos:

$$K_{méd} = (\tfrac{1}{2}m)\frac{3RT}{M}.$$

Entretanto, M/m, a massa molar dividida pela massa de uma molécula, é simplesmente o número de Avogadro. Assim,

$$K_{méd} = \frac{3RT}{2N_A}.$$

De acordo com a Eq. 19-7 ($k = R/N_A$), podemos escrever:

$$K_{méd} = \tfrac{3}{2}kT. \qquad (19\text{-}24)$$

TESTE 2

Uma mistura de gases contém moléculas dos tipos 1, 2 e 3, com massas moleculares $m_1 > m_2 > m_3$. Ordene os três tipos de acordo (a) com a energia cinética média e (b) com a velocidade média quadrática, em ordem decrescente.

A Eq. 19-24 leva a uma conclusão inesperada:

Em uma dada temperatura T, as moléculas de qualquer gás ideal, independentemente da massa que possuam, têm a mesma energia cinética de translação média, $\frac{3}{2}kT$. Assim, quando medimos a temperatura de um gás, também estamos medindo a energia cinética de translação média das moléculas do gás.

19-6 Livre Caminho Médio

Vamos continuar o estudo do movimento das moléculas de um gás ideal. A Fig. 19-5 mostra a trajetória de uma molécula típica no interior do gás, sofrendo mudanças abruptas tanto do módulo como da orientação da velocidade ao colidir elasticamente com outras moléculas. Entre duas colisões, a molécula se move em linha reta com velocidade constante. Embora a figura mostre as outras moléculas como se estivessem paradas, também estão se movendo.

Um parâmetro útil para descrever esse movimento aleatório é o **livre caminho médio** λ das moléculas. Como o nome indica, λ é a distância média percorrida por uma molécula entre duas colisões. Esperamos que λ varie inversamente com N/V, o número de moléculas por unidade de volume (ou concentração de moléculas). Quanto maior o valor de N/V, maior o número de colisões e menor o livre caminho médio. Também esperamos que λ varie inversamente com algum parâmetro associado ao tamanho das moléculas, como o diâmetro d, por exemplo. (Se as moléculas fossem pontuais, como supusemos até agora, não sofreriam colisões e o livre caminho médio seria infinito.) Assim, quanto maiores forem as moléculas, menor deve ser o livre caminho médio. Podemos até prever que λ deve variar (inversamente) com o *quadrado* do diâmetro da molécula, já que é a seção de choque de uma molécula, e não o diâmetro, que determina sua área efetiva como alvo.

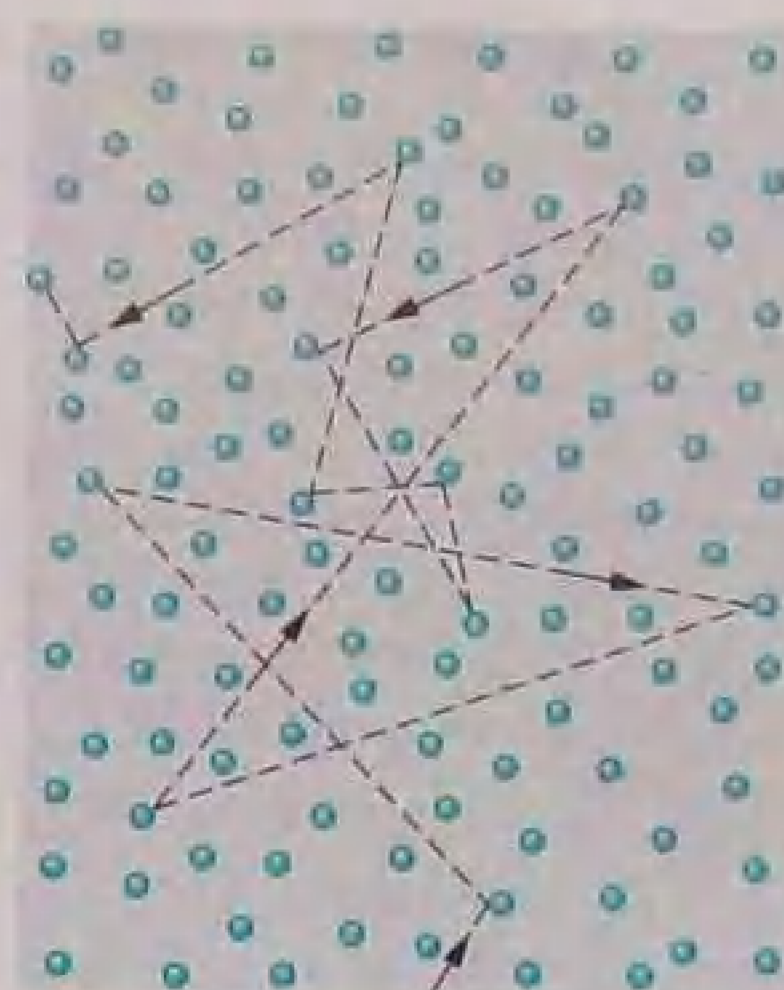


Figura 19-5 Uma molécula se movendo no interior de um gás e colidindo com outras moléculas. Embora as outras moléculas sejam mostradas como se estivessem paradas, também estão se movendo de forma semelhante.

Na verdade, o livre caminho médio é dado pela seguinte expressão:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 N/V} \quad \text{(livre caminho médio).} \qquad (19\text{-}25)$$

Para justificar a Eq. 19-25, concentramos a atenção em uma única molécula e supomos que, como na Fig. 19-5, a molécula está se movendo com velocidade constante v e todas as outras moléculas estão em repouso. Mais tarde, vamos dispensar essa última hipótese.

Supomos ainda que as moléculas são esferas de diâmetro d. Uma colisão ocorre, portanto, se os centros de duas moléculas chegam a uma distância d um do outro, como na Fig. 19-6*a*. Outra forma de descrever a situação é supor que o *raio* da nossa molécula é d e todas as outras moléculas são *pontuais*, como na Fig. 19-6*b*. Isso não muda o critério para uma colisão e facilita a análise matemática do problema.

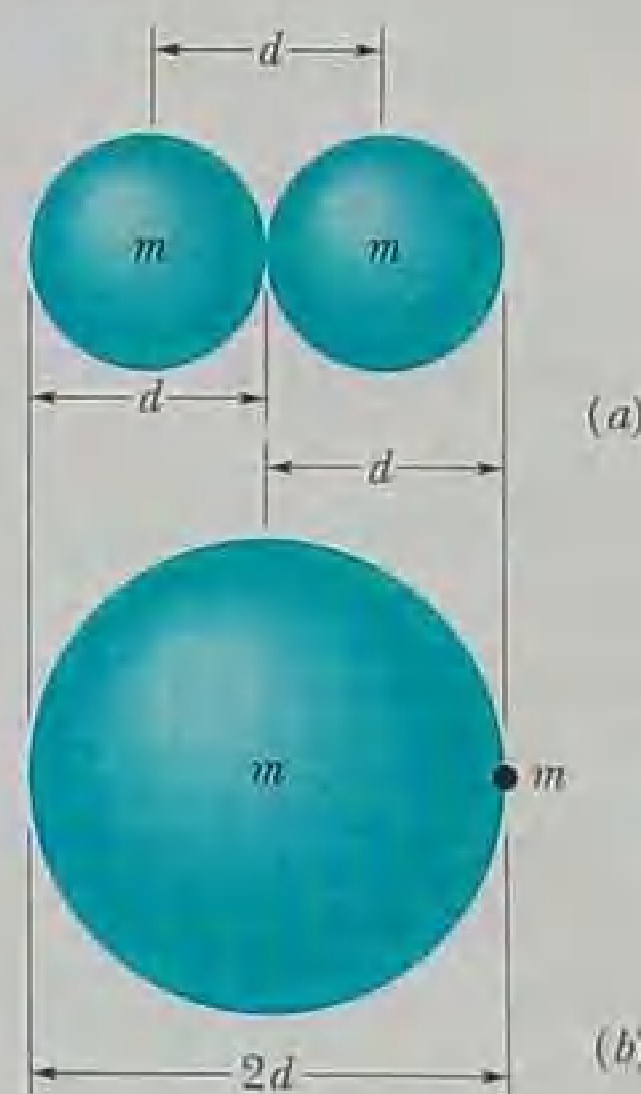


Figura 19-6 (*a*) Uma colisão acontece quando os centros de duas moléculas ficam a uma distância d, onde d é o diâmetro das moléculas. (*b*) Uma representação equivalente, porém mais conveniente, é pensar na molécula em movimento como tendo um *raio* d e em todas as outras moléculas como pontos. A condição para que aconteça uma colisão permanece a mesma.

Ao ziguezaguear pelo gás, nossa molécula varre um pequeno cilindro de seção reta πd^2 entre colisões sucessivas. Em intervalo de tempo Δt, a molécula percorre uma distância $v\Delta t$, onde v é a velocidade da molécula. Alinhando todos os pequenos cilindros varridos no intervalo Δt, formamos um cilindro composto (Figura 19-7) de comprimento $v\Delta t$ e volume $(\pi d^2)(v\Delta t)$; o número de colisões que acontecem em um intervalo de tempo Δt é igual ao número de moléculas (pontuais) no interior desse cilindro.

Como N/V é o número de moléculas por unidade de volume, o número de moléculas no interior do cilindro é N/V vezes o volume do cilindro, ou $(N/V)(\pi d^2 v\Delta t)$. Esse é também o número de colisões que acontecem no intervalo Δt. O livre caminho médio é o comprimento da trajetória (e do cilindro) dividido por esse número:

$$\lambda = \frac{\text{distância percorrida em } \Delta t}{\text{número de colisões em } \Delta t} \approx \frac{v\,\Delta t}{\pi d^2 v\,\Delta t\, N/V}$$
$$= \frac{1}{\pi d^2 N/V}. \qquad (19\text{-}26)$$

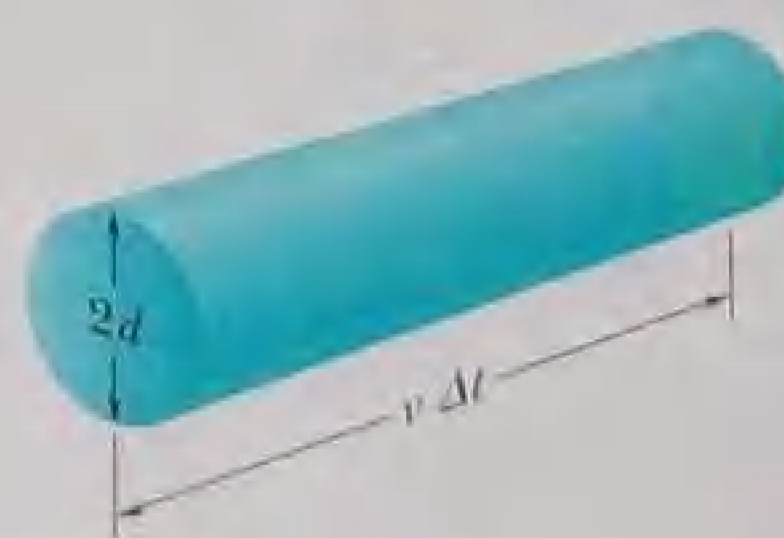


Figura 19-7 No intervalo de tempo Δt, a molécula em movimento varre um cilindro de comprimento $v\Delta t$ e raio d.

A Eq. 19-26 é apenas uma aproximação porque se baseia na hipótese de que todas as moléculas, exceto uma, estão em repouso. Na verdade, *todas* as moléculas estão em movimento; quando esse fato é levado em consideração, o resultado é a Eq. 19-25. Note que ela difere da Eq. 19-26 (aproximada) apenas por um fator de $1/\sqrt{2}$.

A diferença entre as Eqs. 19-25 e 19-26 é causada pelo fato de que, para obter a Eq. 19-26, cancelamos dois símbolos v, um no numerador e outro no denominador,

TESTE 3

Um mol de um gás A, cujas moléculas têm um diâmetro $2d_0$ e uma velocidade média v_0, é colocado em um recipiente. Um mol de um gás B, cujas moléculas têm um diâmetro d_0 e uma velocidade média $2v_0$ (as moléculas do gás B são menores e mais rápidas) é colocado em um recipiente igual. Qual dos gases tem a maior taxa média de colisões?

que, na verdade, representam grandezas diferentes. O v do numerador é $v_{méd}$, a velocidade média das moléculas *em relação ao recipiente*. O v do denominador é v_{rel}, a velocidade média de nossa molécula *em relação às outras moléculas*, que também estão se movendo. É essa segunda velocidade média que determina o número de colisões. Um cálculo detalhado, levando em conta a distribuição de velocidades das moléculas, nos dá $v_{rel} = \sqrt{2}\,v_{méd}$; essa é origem do fator $\sqrt{2}$.

O livre caminho médio das moléculas de ar ao nível do mar é cerca de 0,1 μm. A uma altitude de 100 km, o ar é tão rarefeito que livre caminho médio chega a 16 cm. A 300 km, o livre caminho médio é da ordem de 20 km. Um problema enfrentado pelos cientistas que estudam a física e a química da atmosfera superior em laboratório é a falta de recipientes suficientemente grandes para conter amostras de certos gases (freon, dióxido de carbono e ozônio) nas condições a que estão submetidos na atmosfera superior.

Exemplo

Livre caminho médio, velocidade média e frequência de colisões

(a) Qual é o livre caminho médio λ de moléculas de oxigênio a uma temperatura $T = 300$ K e a uma pressão $p = 1{,}0$ atm? Suponha que o diâmetro das moléculas seja $d = 290$ pm e que o gás seja ideal.

IDEIA-CHAVE

Cada molécula de oxigênio se move entre outras moléculas de oxigênio *em movimento*, descrevendo uma trajetória em ziguezague por causa das colisões. Assim, o livre caminho médio é dado pela Eq. 19-25.

Cálculo Para aplicar a Eq. 19-25, precisamos conhecer o número de moléculas por unidade de volume, N/V. Como estamos supondo que se trata de um gás ideal, podemos usar a lei dos gases ideais na forma da Eq. 19-9 ($pV = NkT$) para escrever $N/V = p/kT$. Substituindo esse valor na Eq. 19-25, obtemos

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2\,N/V} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$
$$= \frac{(1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})}{\sqrt{2}\pi(2{,}9 \times 10^{-10}\ \text{m})^2(1{,}01 \times 10^5\ \text{Pa})}$$
$$= 1{,}1 \times 10^{-7}\ \text{m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este valor corresponde a cerca de 380 vezes o diâmetro de uma molécula de oxigênio.

(b) Suponha que a velocidade média das moléculas de oxigênio é $v = 450$ m/s. Qual é o tempo médio t entre colisões para qualquer molécula? Qual é a frequência f das colisões?

IDEIAS-CHAVE

(1) Entre colisões, a molécula percorre, em média, o livre caminho médio λ com velocidade v. (2) A frequência das colisões é o inverso do tempo t entre colisões.

Cálculos De acordo com a primeira ideia-chave, o tempo médio entre colisões é

$$t = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade}} = \frac{\lambda}{v} = \frac{1{,}1 \times 10^{-7}\ \text{m}}{450\ \text{m/s}}$$
$$= 2{,}44 \times 10^{-10}\ \text{s} \approx 0{,}24\ \text{ns}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Isso significa que, em média, uma molécula de oxigênio passa menos de um quarto de nanossegundo sem sofrer colisões.

De acordo com a segunda ideia-chave, a frequência das colisões é

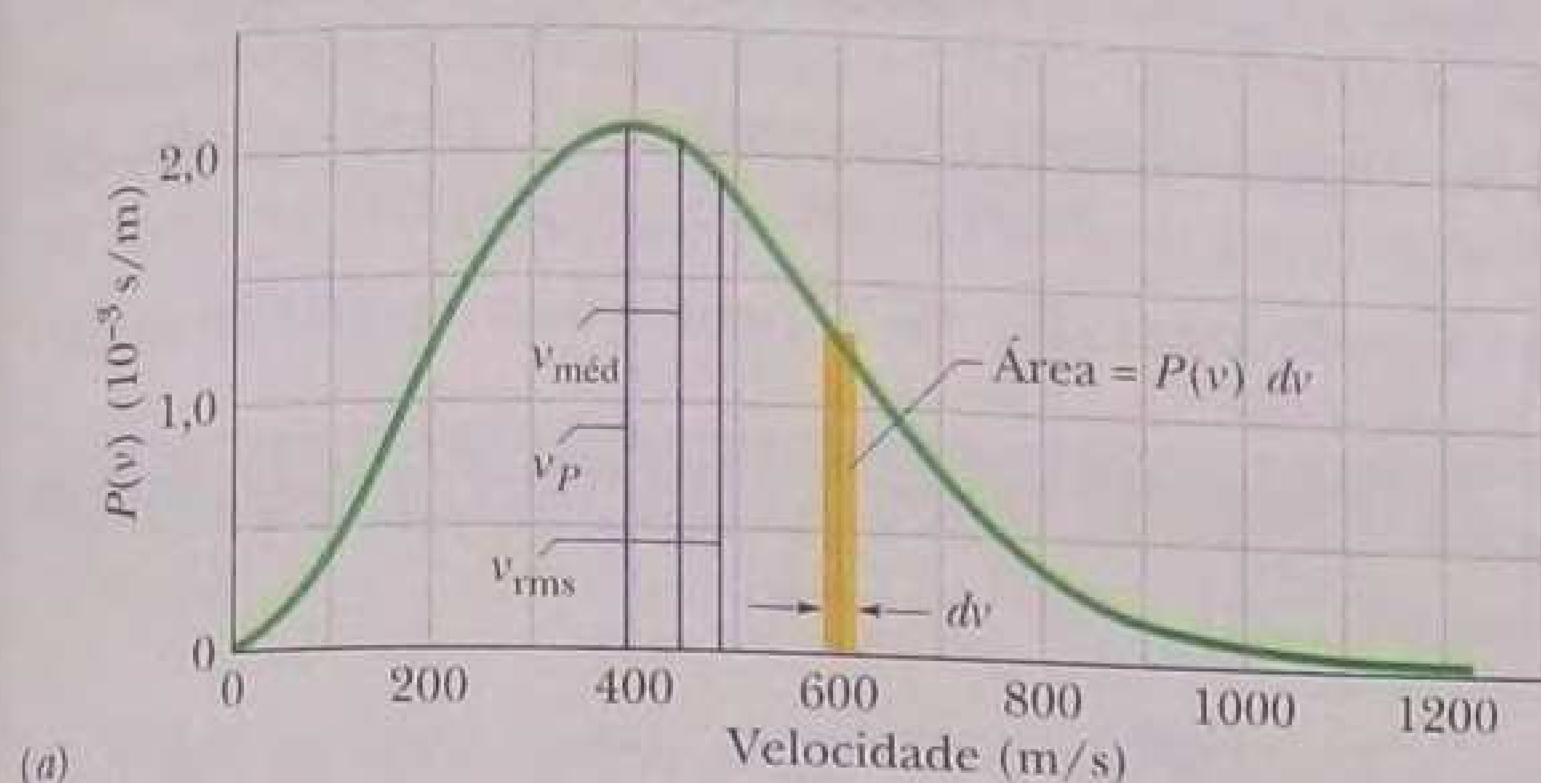
$$f = \frac{1}{t} = \frac{1}{2{,}44 \times 10^{-10}\ \text{s}} = 4{,}1 \times 10^9\ \text{s}^{-1}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Isso significa que, em média, uma molécula de oxigênio sofre cerca de 4 bilhões de colisões por segundo.

19-7 A Distribuição de Velocidades das Moléculas

A velocidade média quadrática v_{rms} nos dá uma ideia geral das velocidades das moléculas de um gás a uma dada temperatura. Em muitos casos, porém, estamos interessados em informações mais detalhadas. Por exemplo: qual é a porcentagem de moléculas com velocidade maior que v_{rms}? Qual é a porcentagem de moléculas com velocidade maior que o dobro de v_{rms}? Para responder a esse tipo de pergunta, precisamos saber de que forma os possíveis valores da velocidade estão distribuídos pelas moléculas. A Fig. 19-8*a* mostra essa distribuição para moléculas de oxigênio





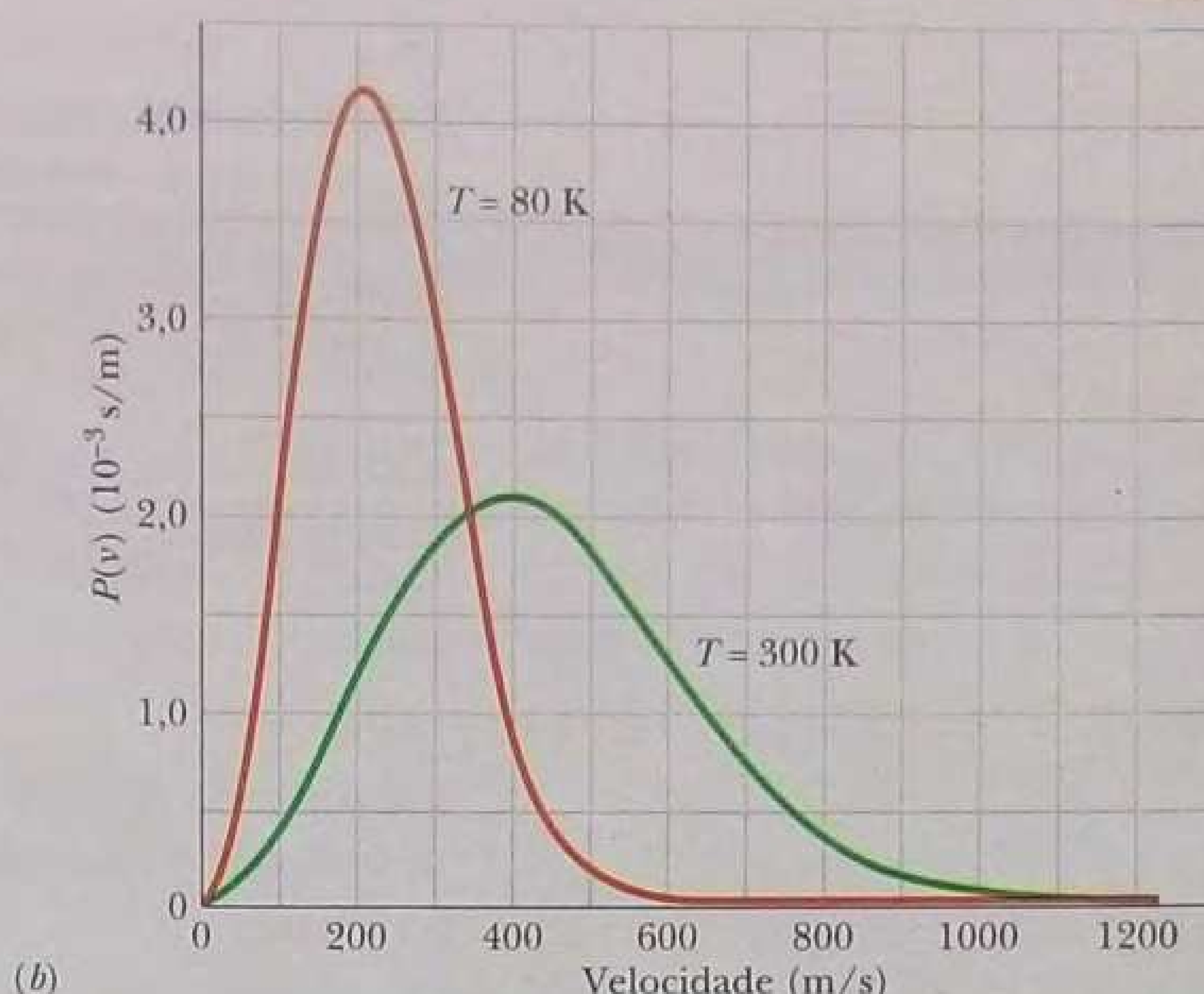


Figura 19-8 (*a*) A distribuição de velocidades de Maxwell para moléculas de oxigênio a uma temperatura $T = 300$ K. As três velocidades características estão indicadas. (*b*) A distribuição de velocidades para 300 K e 80 K. Note que as moléculas se movem mais devagar quando a temperatura é menor. Como se trata de distribuições de probabilidade, a área sob cada curva é igual à unidade.

à temperatura ambiente ($T = 300$ K); na Fig. 19-8*b*, essa distribuição é comparada com a distribuição de velocidades a uma temperatura menor, $T = 80$ K.

Em 1852, o físico escocês James Clerk Maxwell calculou a distribuição de velocidades das moléculas de um gás. O resultado que obteve, conhecido como **lei de distribuição de velocidades de Maxwell**, foi o seguinte:

$$P(v) = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/2RT}, \qquad (19\text{-}27)$$

onde M é a massa molar do gás, R é a constante dos gases ideais, T é a temperatura do gás e v é a velocidade escalar da molécula. Gráficos dessa função estão plotados nas Figs. 19-8*a* e 19-8*b*. A grandeza $P(v)$ da Eq. 19-27 e da Fig. 19-8 é uma *função distribuição de probabilidade*: para uma dada velocidade v, o produto $P(v)dv$ (uma grandeza adimensional) é a fração de moléculas cujas velocidades estão no intervalo dv no entorno de v.

Como está mostrado na Fig. 19-8*a*, essa fração é igual à área de uma faixa de altura $P(v)$ e largura dv. A área total sob a curva da distribuição corresponde à fração das moléculas cujas velocidades estão entre zero e infinito. Como todas as moléculas estão nessa categoria, o valor da área total é igual à unidade, ou seja,

$$\int_0^\infty P(v)\, dv = 1. \qquad (19\text{-}28)$$

A fração (frac) de moléculas com velocidades no intervalo de v_1 a v_2, é, portanto,

$$\text{frac} = \int_{v_1}^{v_2} P(v)\, dv. \qquad (19\text{-}29)$$

Velocidade Média, Velocidade Média Quadrática e Velocidade Mais Provável

Em princípio, podemos determinar a **velocidade média** $v_{méd}$ das moléculas de um gás da seguinte forma: em primeiro lugar, *ponderamos* cada valor de v na distribuição, ou seja, multiplicamos v pela fração $P(v)dv$ de moléculas cujas velocidades estão

em um intervalo infinitesimal dv no entorno de v; em seguida, somamos todos esses valores de $vP(v)dv$. O resultado é $v_{méd}$. Na prática, isso equivale a calcular

$$v_{méd} = \int_0^\infty v\, P(v)\, dv. \tag{19-30}$$

Substituindo $P(v)$ pelo seu valor, dado pela Eq. 19-27, e usando a integral 20 da lista de integrais do Apêndice E, obtemos

$$v_{méd} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad \text{(velocidade média).} \tag{19-31}$$

Analogamente, a média dos quadrados das velocidades, $(v^2)_{méd}$ pode ser calculada usando a equação

$$(v^2)_{méd} = \int_0^\infty v^2\, P(v)\, dv. \tag{19-32}$$

Substituindo $P(v)$ por seu valor, dado pela Eq. 19-27, e usando a integral 16 da lista de integrais do Apêndice E, obtemos

$$(v^2)_{méd} = \frac{3RT}{M}. \tag{19-33}$$

A raiz quadrada de $(v^2)_{méd}$ é a velocidade média quadrática v_{rms}. Assim,

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad \text{(velocidade média quadrática),} \tag{19-34}$$

o que está de acordo com a Eq. 19-22.

A **velocidade mais provável** v_P é a velocidade para a qual $P(v)$ é máxima (veja a Fig. 19-8*a*). Para calcular v_P, fazemos $dP/dv = 0$ (a inclinação da curva na Fig. 19-8*a* é zero no ponto em que a curva passa pelo máximo) e explicitamos v. Fazendo isso, obtemos

$$v_P = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad \text{(velocidade mais provável).} \tag{19-35}$$

É mais provável que uma molécula tenha uma velocidade v_P do que qualquer outra velocidade, mas algumas moléculas têm velocidades muito maiores que v_P. Essas moléculas estão na *cauda de altas velocidades* de uma curva de distribuição como a da Fig. 19-8*a*. Devemos ser gratos por essas poucas moléculas de alta velocidade, já que são elas que tornam possível a chuva e a luz solar (sem as quais não existiríamos). Vejamos por quê.

Chuva A distribuição das moléculas de água em um lago no verão pode ser representada por uma curva como a da Fig. 19-8*a*. A maioria das moléculas não possui energia cinética suficiente para escapar da superfície. Entretanto, algumas moléculas muito rápidas, com velocidades na cauda de altas velocidades da curva de distribuição, podem escapar. São essas moléculas de água que evaporam, tornando possível a existência das nuvens e da chuva.

Quando as moléculas de água muito rápidas deixam a superfície de um lago, levando energia com elas, a temperatura do lago não muda porque este recebe calor das vizinhanças. Outras moléculas velozes, produzidas através de colisões, ocupam rapidamente o lugar das moléculas que partiram e a distribuição de velocidades permanece a mesma.

Luz solar Suponha agora que a curva de distribuição da Fig. 19-8*a* se refira a prótons no centro do Sol. A energia do Sol se deve a um processo de fusão nuclear que

começa com a união de dois prótons. Entretanto, os prótons se repelem porque possuem cargas elétricas de mesmo sinal e prótons com a velocidade média não possuem energia cinética suficiente para vencer a repulsão e se aproximar o suficiente para que a fusão ocorra. Entretanto, prótons muito rápidos, na cauda de altas velocidades da curva de distribuição, podem se fundir, e é por isso que o Sol brilha.

Exemplo

Distribuição de velocidades em um gás

Um cilindro de oxigênio é mantido à temperatura ambiente (300 K). Qual é a fração das moléculas cuja velocidade está no intervalo de 599 a 601 m/s? A massa molar M do oxigênio é 0,0320 kg/mol.

IDEIAS-CHAVE

1. As velocidades das moléculas estão distribuídas em uma larga faixa de valores, com a distribuição $P(v)$ da Eq. 19-27.
2. A fração de moléculas cuja velocidade está em um intervalo infinitesimal dv é $P(v)dv$.
3. No caso de um intervalo finito, a fração poderia ser determinada integrando $P(v)$ ao longo do intervalo, mas o intervalo proposto no enunciado, $\Delta v = 2$ m/s, é muito pequeno em comparação com a velocidade $v = 600$ m/s no centro do intervalo.

Cálculos Como Δv é pequeno, podemos evitar a integração usando para a fração o valor aproximado

$$\text{frac} = P(v)\,\Delta v = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/2RT}\,\Delta v.$$

O gráfico da função $P(v)$ aparece na Fig. 19-8a. A área total entre a curva e o eixo horizontal representa a fração total de moléculas (igual à unidade). A área da faixa amarela sombreada representa a fração que queremos calcular.

Para determinar o valor de frac, escrevemos

$$\text{frac} = (4\pi)(A)(v^2)(e^B)(\Delta v), \qquad (19\text{-}36)$$

onde

$$A = \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} = \left(\frac{0{,}0320 \text{ kg/mol}}{(2\pi)(8{,}31 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(300 \text{ K})}\right)^{3/2} = 2{,}92 \times 10^{-9} \text{ s}^3/\text{m}^3$$

$$\text{e} \quad B = -\frac{Mv^2}{2RT} = -\frac{(0{,}0320 \text{ kg/mol})(600 \text{ m/s})^2}{(2)(8{,}31 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(300 \text{ K})} = -2{,}31.$$

Substituindo A e B na Eq. 19-36, obtemos

$$\text{frac} = (4\pi)(A)(v^2)(e^B)(\Delta v) = (4\pi)(2{,}92 \times 10^{-9} \text{ s}^3/\text{m}^3)(600 \text{ m/s})^2(e^{-2{,}31})(2 \text{ m/s}) = 2{,}62 \times 10^{-3}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Assim, à temperatura ambiente, 0,262% das moléculas de oxigênio têm velocidades no pequeno intervalo de 599 a 601 m/s. Se a faixa amarela da Fig. 19-8a fosse desenhada na escala deste problema, a largura seria difícil de ver a olho nu.

Exemplo

Velocidade média, velocidade média quadrática e velocidade mais provável

A massa molar M do oxigênio é 0,0320 kg/mol.

(a) Qual é a velocidade média $v_{\text{méd}}$ das moléculas de oxigênio à temperatura ambiente (300 K)?

IDEIA-CHAVE

Para calcular a velocidade média, devemos ponderar a velocidade v com a função de distribuição $P(v)$ da Eq. 19-27 e integrar a expressão resultante para todas as velocidades possíveis (ou seja, de 0 a ∞).

Cálculo Isso nos leva à Eq. 19-31, segundo a qual

$$v_{\text{méd}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8(8{,}31 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(300 \text{ K})}{\pi(0{,}0320 \text{ kg/mol})}} = 445 \text{ m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este resultado está indicado na Fig. 19-8a.

(b) Qual é a velocidade média quadrática v_{rms} a 300 K?

IDEIA-CHAVE

Para determinar v_{rms}, precisamos primeiro calcular $(v^2)_{\text{méd}}$ ponderando v^2 com a função de distribuição $P(v)$ da Eq. 19-27 e integrando a expressão para todas as velocidades possíveis. Em seguida, calculamos a raiz quadrada do resultado.

Cálculo Isso nos leva à Eq. 19-34, segundo a qual

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3(8{,}31 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(300 \text{ K})}{0{,}0320 \text{ kg/mol}}} = 483 \text{ m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este resultado, indicado na Fig. 19-8*a*, é maior que $v_{méd}$ porque as velocidades mais altas influenciam mais o resultado quando integramos os valores de v^2 do que quando integramos os valores de v.

(c) Qual é a velocidade mais provável v_P a 300 K?

IDEIA-CHAVE

A velocidade v_P corresponde ao máximo da função de distribuição $P(v)$, que obtemos fazendo $dP/dv = 0$ e explicitando v.

Cálculo Isso nos leva à Eq. 19-35, segundo a qual

$$v_P = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(8{,}31\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K})}{0{,}0320\ \text{kg/mol}}}$$

$$= 395\ \text{m/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este resultado está indicado na Fig. 19-8*a*.

19-8 Os Calores Específicos Molares de um Gás Ideal

Nesta seção, vamos obter, a partir de considerações a respeito do movimento das moléculas, uma expressão para a energia interna E_{int} de um gás ideal. Em outras palavras, vamos obter uma expressão para a energia associada aos movimentos aleatórios dos átomos ou moléculas de um gás. Em seguida, usaremos essa expressão para calcular os calores específicos molares de um gás ideal.

Energia Interna E_{int}

Vamos, inicialmente, supor que nosso gás ideal é um *gás monoatômico* (formado por átomos isolados e não por moléculas), como o hélio, o neônio e o argônio. Vamos supor também que a energia interna E_{int} de nosso gás ideal é simplesmente a soma das energias cinéticas de translação dos átomos. (De acordo com a teoria quântica, átomos isolados não possuem energia cinética de rotação.)

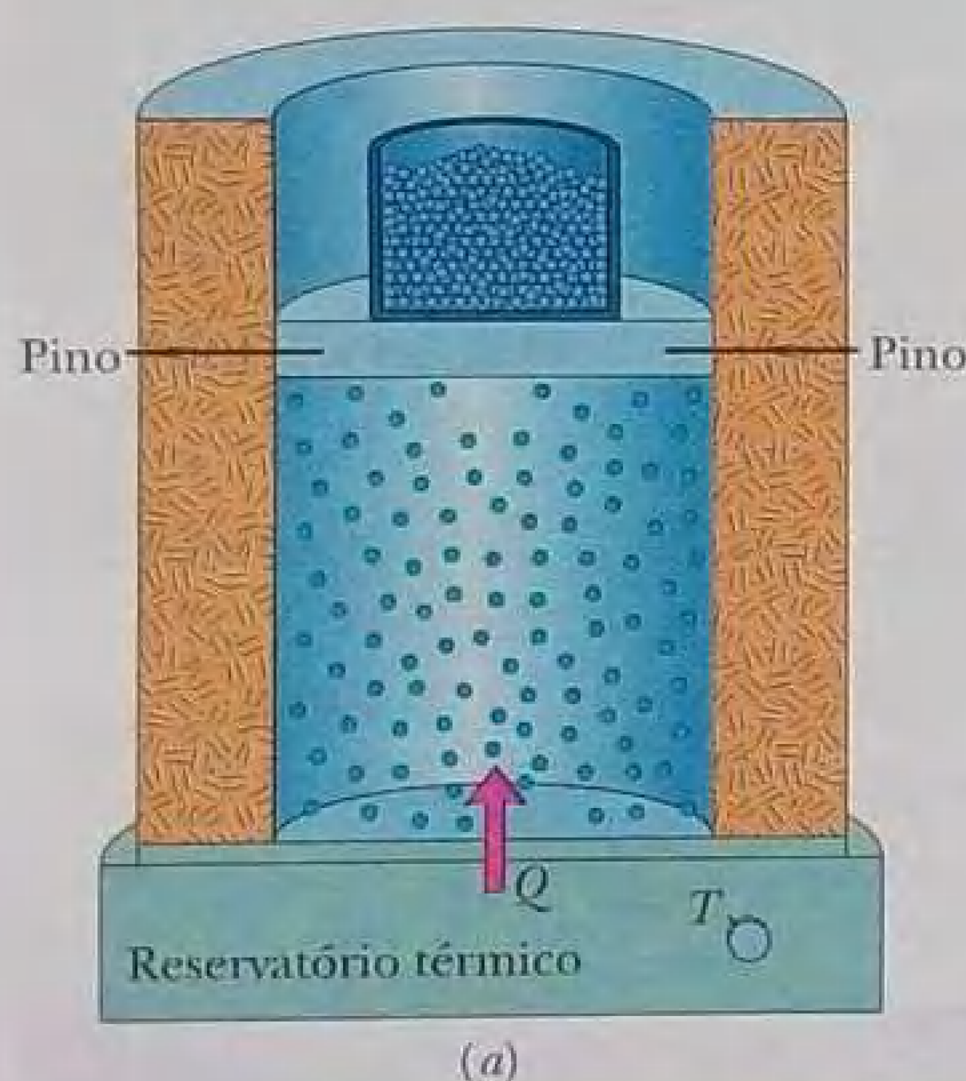
A energia cinética de translação média de um átomo depende apenas da temperatura do gás e é dada pela Eq. 19-24 ($K_{méd} = \frac{3}{2}kT$). Uma amostra de n mols de um gás monoatômico contém nN_A átomos. A energia interna E_{int} da amostra é, portanto,

$$E_{int} = (nN_A)K_{méd} = (nN_A)(\tfrac{3}{2}kT). \qquad (19\text{-}37)$$

De acordo com a Eq. 19-7 ($k = R/N_A$), a Eq. 19-37 pode ser escrita na forma

$$E_{int} = \tfrac{3}{2}nRT \qquad \text{(gás ideal monoatômico)}. \qquad (19\text{-}38)$$

A energia interna E_{int} de um gás ideal é função *apenas* da temperatura do gás; não depende de outras variáveis.





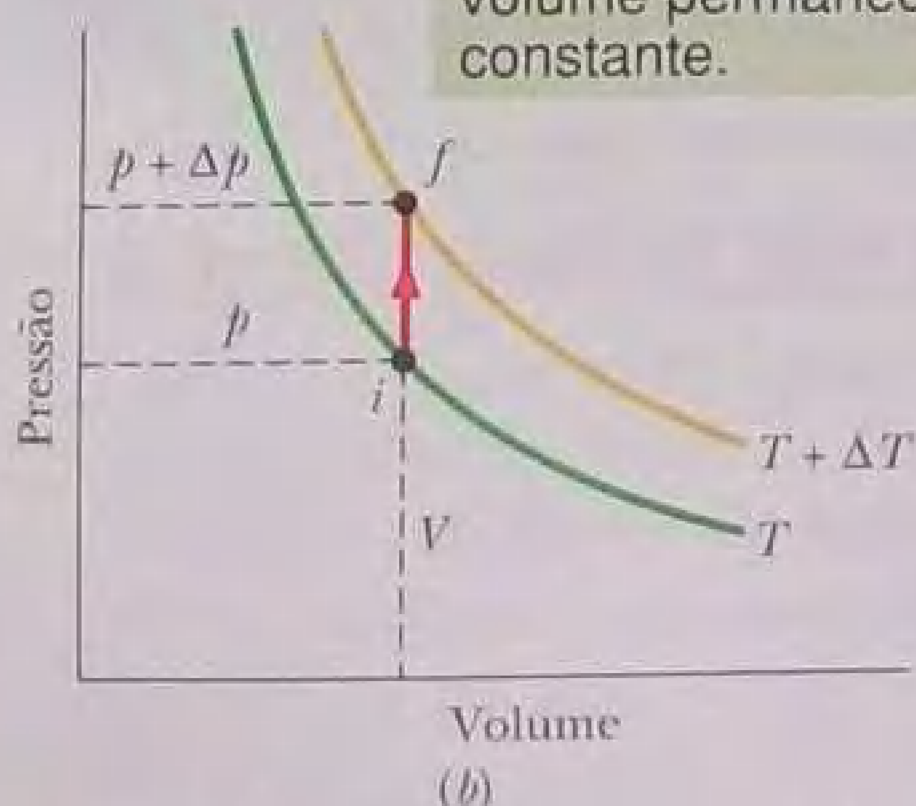


Figura 19-9 (*a*) A temperatura de um gás ideal é aumentada de T para $T + \Delta T$ em um processo a volume constante. É adicionado calor, mas nenhum trabalho é realizado. (*b*) O processo em um diagrama *p-V*.

A partir da Eq. 19-38, podemos calcular o calor específico molar de um gás ideal. Na verdade, vamos deduzir duas expressões, uma para o caso em que o volume do gás permanece constante e outra para o caso em que a pressão permanece constante. Os símbolos usados para esses dois calores específicos molares são C_V e C_P, respectivamente. (Por tradição, a letra C maiúscula é usada em ambos os casos, embora C_V e C_P sejam tipos de calor específico e não de capacidade térmica.)

Calor Específico Molar a Volume Constante

A Fig. 19-9*a* mostra n mols de um gás ideal a uma pressão p e a uma temperatura T, confinados em um cilindro de volume V fixo. Este *estado inicial i* do gás está assinalado no diagrama *p-V* da Fig. 19-9*b*. Suponha que adicionamos uma pequena quantidade de energia Q ao gás na forma de calor, aumentando lentamente a temperatura do recipiente. A temperatura do gás aumenta para $T + \Delta T$ e a pressão aumenta para

$p + \Delta p$, levando o gás ao *estado final f*. Nesse tipo de experimento, observamos que o calor Q está relacionado à variação de temperatura ΔT através da equação

$$Q = nC_V \Delta T \quad \text{(volume constante)}, \tag{19-39}$$

onde C_V é uma constante chamada de **calor específico molar a volume constante**. Substituindo essa expressão de Q na primeira lei da termodinâmica, dada pela Eq. 18-26 ($\Delta E_{int} = Q - W$), obtemos

$$\Delta E_{int} = nC_V \Delta T - W. \tag{19-40}$$

Como o volume do recipiente é constante, o gás não pode se expandir e, portanto, não pode realizar trabalho. Assim, $W = 0$ e a Eq. 19-40 nos fornece

$$C_V = \frac{\Delta E_{int}}{n \Delta T}. \tag{19-41}$$

De acordo com a Eq. 19-38, a variação da energia interna é

$$\Delta E_{int} = \tfrac{3}{2} nR \Delta T. \tag{19-42}$$

Substituindo esse resultado na Eq. 19-41, obtemos

$$C_V = \tfrac{3}{2}R = 12{,}5 \text{ J/mol}\cdot\text{K} \quad \text{(gás monoatômico)}. \tag{19-43}$$

Como se pode ver na Tabela 19-2, esta previsão da teoria cinética (para gases ideais) concorda muito bem com os resultados experimentais para gases monoatômicos reais, o caso que estamos considerando. Os valores (teóricos e experimentais) de C_V para *gases diatômicos* (com moléculas de dois átomos) e *gases poliatômicos* (com moléculas de mais de dois átomos) são maiores que para gases monoatômicos, por motivos que serão mencionados na Seção 19-9.

Podemos agora generalizar a Eq. 19-38 para a energia interna de qualquer gás ideal substituindo $3R/2$ por C_V para obter

$$E_{int} = nC_V T \quad \text{(qualquer gás ideal)}. \tag{19-44}$$

A Eq. 19-44 se aplica não só a um gás ideal monoatômico, mas também a gases diatômicos e poliatômicos, desde que seja usado o valor correto de C_V. Como na Eq. 19-38, a energia interna do gás depende da temperatura, mas não da pressão ou da densidade.

De acordo com a Eq. 19-41 ou a Eq. 19-44, quando um gás ideal confinado em um recipiente sofre uma variação de temperatura ΔT, a variação resultante da energia interna é dada por

$$\Delta E_{int} = nC_V \Delta T \quad \text{(gás ideal, qualquer processo)}. \tag{19-45}$$

De acordo com a Eq. 19-45,

> A variação da energia interna E_{int} de um gás ideal confinado depende apenas da variação de temperatura; *não depende* do tipo de processo responsável pela variação de temperatura.

Considere, por exemplo, as três trajetórias entre as duas isotermas no diagrama p-V da Fig. 19-10. A trajetória 1 representa um processo a volume constante. A trajetória 2 representa um processo a pressão constante (que será discutido em seguida). A trajetória 3 representa um processo no qual nenhum calor é trocado com o ambiente (este caso será discutido na Seção 19-11). Embora os valores do calor Q e do trabalho W associados a essas três trajetórias sejam diferentes, o que também acontece com p_f e V_f, os valores de ΔE_{int} associados às três trajetórias são iguais e são dados pela Eq. 19-45, uma vez que envolvem a mesma variação de temperatura ΔT.

Tabela 19-2

Calores Específicos Molares a Volume Constante

Molécula	Exemplo		C_V (J/mol·K)
Monoatômica	Ideal		$\frac{3}{2}R = 12{,}5$
	Real	He	12,5
		Ar	12,6
Diatômica	Ideal		$\frac{5}{2}R = 20{,}8$
	Real	N_2	20,7
		O_2	20,8
Poliatômica	Ideal		$3R = 24{,}9$
	Real	NH_4	29,0
		CO_2	29,7

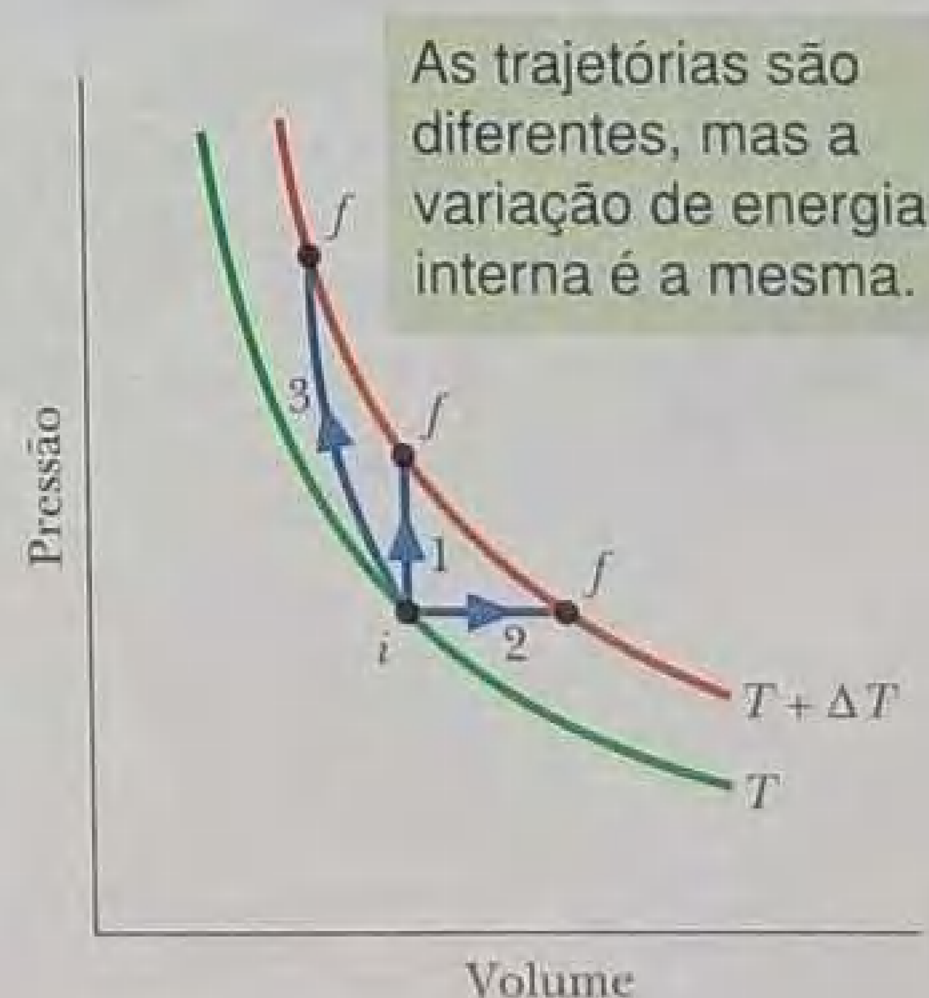


Figura 19-10 Três trajetórias representando três processos diferentes que levam um gás ideal de um estado inicial i, à temperatura T, a um estado final f, à temperatura $T + \Delta T$. A variação ΔE_{int} da energia interna do gás é a mesma para os três processos e para quaisquer outros que resultem na mesma variação de temperatura.

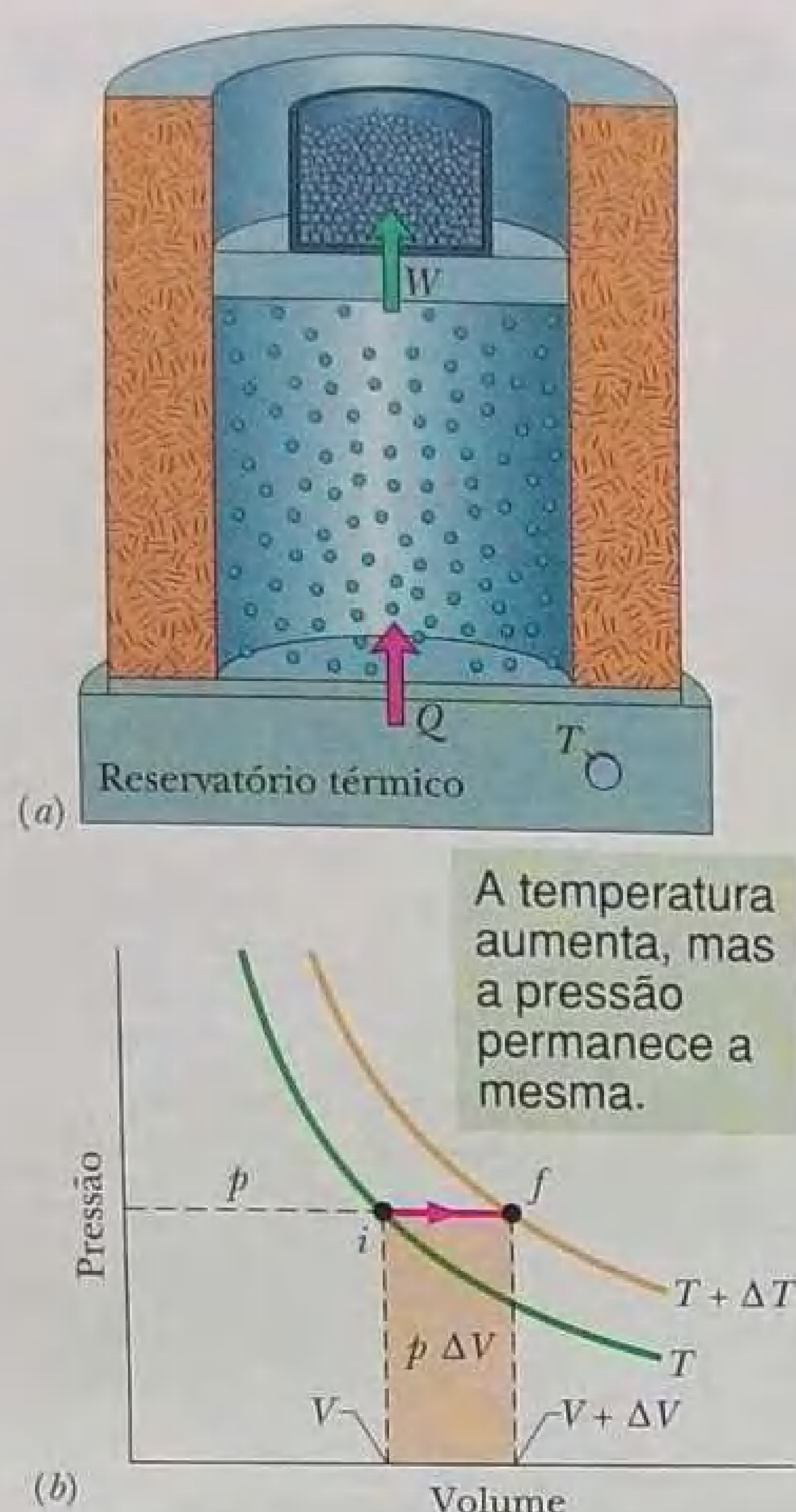


Figura 19-11 (*a*) A temperatura de um gás ideal é aumentada de T para $T + \Delta T$ em um processo à pressão constante. É adicionado calor e é realizado trabalho para levantar o êmbolo. (*b*) O processo em um diagrama *p-V*. O trabalho $p\Delta V$ é dado pela área sombreada.

Assim, independentemente da trajetória seguida entre T e $T + \Delta T$, podemos sempre usar a trajetória 1 e a Eq. 19-45 para calcular ΔE_{int} com mais facilidade.

Calor Específico Molar à Pressão Constante

Vamos supor agora que a temperatura de nosso gás ideal aumenta do mesmo valor ΔT, mas agora a energia necessária (o calor Q) é fornecida mantendo o gás a uma pressão constante. Uma forma de fazer isso na prática é mostrada na Fig. 19-11*a*; o diagrama *p-V* do processo aparece na Fig. 19-11*b*. A partir de experimentos como esse, constatamos que o calor Q está relacionado à variação de temperatura ΔT através da equação

$$Q = nC_p\,\Delta T \quad \text{(pressão constante)}, \tag{19-46}$$

em que C_p é uma constante chamada de **calor específico molar à pressão constante**. O valor de C_p é sempre *maior* que o do calor específico molar a volume constante C_V, já que, nesse caso, a energia é usada não só para aumentar a temperatura do gás, mas também para realizar trabalho (levantar o êmbolo da Fig. 19-11*a*).

Para obter uma relação entre os calores específicos molares C_p e C_V, começamos com a primeira lei da termodinâmica (Eq. 18-26):

$$\Delta E_{int} = Q - W. \tag{19-47}$$

Em seguida, substituímos os termos da Eq. 19-47 por seus valores. O valor de E_{int} é dado pela Eq. 19-45. O valor de Q é dado pela Eq. 19-46. Para obter o valor de W, observamos que, como a pressão permanece constante, a Eq. 19-16 nos diz que $W = p\Delta V$. Assim, usando a equação dos gases ideais ($pV = nRT$), podemos escrever

$$W = p\,\Delta V = nR\,\Delta T. \tag{19-48}$$

Fazendo essas substituições na Eq. 19-47 e dividindo ambos os membros por $n\Delta T$, obtemos

$$C_V = C_p - R$$

e, portanto,

$$C_p = C_V + R. \tag{19-49}$$

Essa previsão da teoria cinética dos gases está de acordo com os resultados experimentais, não só para gases monoatômicos, mas para gases em geral, desde que estejam suficientemente rarefeitos para poderem ser tratados como ideais.

O lado esquerdo da Fig. 19-12 mostra os valores relativos de Q para um gás monoatômico submetido a um aquecimento a volume constante ($Q = \frac{3}{2}nR\Delta T$) e

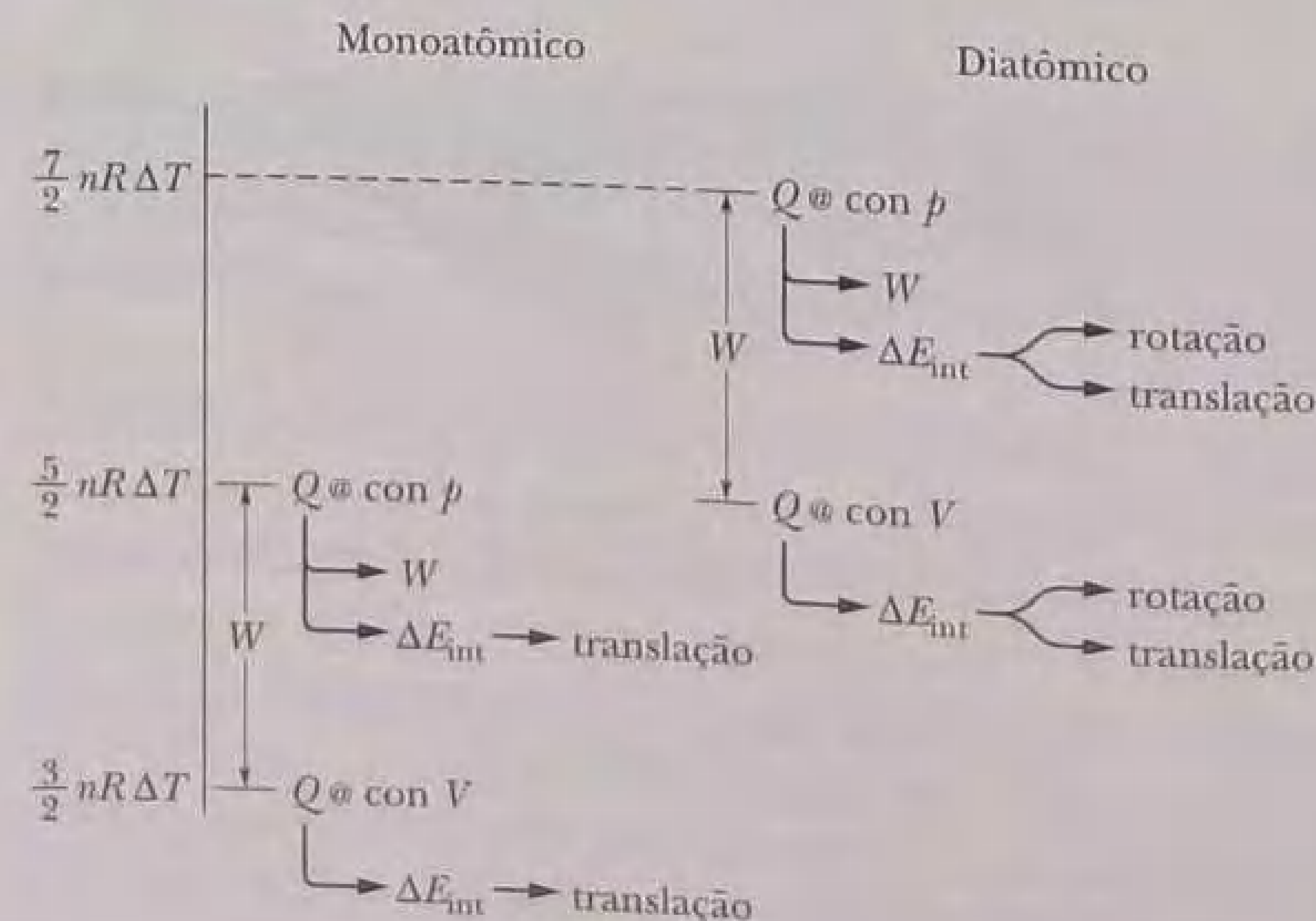
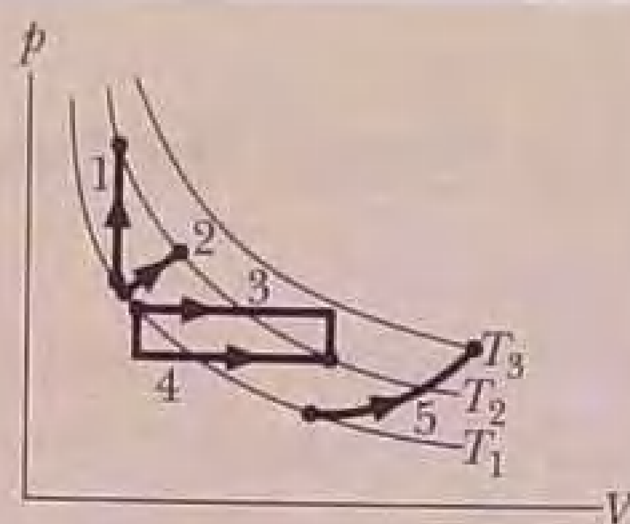


Figura 19-12 Valores relativos de Q para um gás monoatômico (lado esquerdo) e para um gás diatômico (lado direito) submetidos a processos à pressão constante ("con p") e a volume constante ("con V"). A transferência de energia para trabalho W e energia interna ΔE_{int} está indicada esquematicamente.

a pressão constante ($Q = \frac{5}{2}nR\Delta T$). Observe que, no segundo caso, o valor de Q é maior por causa de W, o trabalho realizado pelo gás durante a expansão. Observe também que no aquecimento a volume constante, a energia fornecida na forma de calor é usada apenas para aumentar a energia interna, enquanto no aquecimento à pressão constante, a energia fornecida na forma de calor é repartida entre a energia interna e o trabalho.

TESTE 4

A figura mostra cinco trajetórias de um gás em um diagrama p-V. Ordene as trajetórias de acordo com a variação da energia interna do gás, em ordem decrescente.



Exemplo

Calor, energia interna e trabalho para um gás monoatômico

Uma bolha de 5,00 mols de hélio está submersa em água a uma certa profundidade quando a água (e, portanto, o hélio) sofre um aumento de temperatura ΔT de 20,0C° à pressão constante. Em consequência, a bolha se expande. O hélio é monoatômico e se comporta como um gás ideal.

(a) Qual é a energia recebida pelo hélio na forma de calor durante esse aumento de temperatura acompanhado por expansão?

IDEIA-CHAVE

A quantidade de calor Q está relacionada à variação de temperatura ΔT através do calor específico molar do gás.

Cálculos Como a pressão p é mantida constante durante o processo de aquecimento, devemos usar o calor específico molar à pressão constante C_P e a Eq. 19-46,

$$Q = nC_p\,\Delta T, \quad (19\text{-}50)$$

para calcular Q. Para calcular C_P, usamos a Eq. 19-49, segundo a qual, para qualquer gás ideal, $C_P = C_V + R$. Além disso, de acordo com a Eq. 19-43, para qualquer gás *monoatômico* (como o hélio, neste caso), $C_V = \frac{3}{2}R$. Assim, a Eq. 19-50 nos dá

$$\begin{aligned} Q &= n(C_V + R)\,\Delta T = n(\tfrac{3}{2}R + R)\,\Delta T = n(\tfrac{5}{2}R)\,\Delta T \\ &= (5{,}00\text{ mol})(2{,}5)(8{,}31\text{ J/mol}\cdot\text{K})(20{,}0\text{ C}°) \\ &= 2077{,}5\text{ J} \approx 2080\text{ J}. \quad \text{(Resposta)} \end{aligned}$$

(b) Qual é a variação ΔE_{int} da energia interna do hélio durante o aumento de temperatura?

IDEIA-CHAVE

Como a bolha se expande, este não é um processo a volume constante. Entretanto, o hélio está confinado (à bolha). Assim, a variação ΔE_{int} é a mesma que *ocorreria* em um processo a volume constante com a mesma variação de temperatura ΔT.

Cálculo Podemos encontrar facilmente a variação ΔE_{int} a volume constante usando a Eq. 19-45:

$$\begin{aligned} \Delta E_{int} &= nC_V\,\Delta T = n(\tfrac{3}{2}R)\,\Delta T \\ &= (5{,}00\text{ mol})(1{,}5)(8{,}31\text{ J/mol}\cdot\text{K})(20{,}0\text{ C}°) \\ &= 1246{,}5\text{ J} \approx 1250\text{ J}. \quad \text{(Resposta)} \end{aligned}$$

(c) Qual é o trabalho W realizado pelo hélio ao se expandir contra a pressão da água que está em volta da bolha durante o aumento de temperatura?

IDEIAS-CHAVE

O trabalho realizado por *qualquer* gás que se expande contra a pressão do ambiente é dado pela Eq. 19-11, segundo a qual devemos integrar o produto pdV. Quando a pressão é constante (como neste caso), a equação pode ser simplificada para $W = p\Delta V$. Quando o gás é *ideal* (como neste caso), podemos usar a lei dos gases ideais (Eq. 19-5) para escrever $p\Delta V = nR\Delta T$.

Cálculo O resultado é

$$\begin{aligned} W &= nR\,\Delta T \\ &= (5{,}00\text{ mol})(8{,}31\text{ J/mol}\cdot\text{K})(20{,}0\text{ C}°) \\ &= 831\text{ J}. \quad \text{(Resposta)} \end{aligned}$$

Outra solução Como já conhecemos Q e ΔE_{int}, podemos resolver o problema de outra forma. A ideia é aplicar a primeira lei da termodinâmica à variação de energia do gás, escrevendo

$$\begin{aligned} W &= Q - \Delta E_{int} = 2077{,}5\text{ J} - 1246{,}5\text{ J} \\ &= 831\text{ J}. \quad \text{(Resposta)} \end{aligned}$$

As transferências de energia Vamos acompanhar as transferências de energia. Dos 2077,5 J transferidos ao hélio como calor Q, 831 J são usados para realizar o trabalho W envolvido na expansão e 1246,5 J para aumentar a energia interna E_{int}, que, para um gás monoatômico, envolve apenas a energia cinética dos átomos em seus movimentos de translação. Esses vários resultados estão indicados no lado esquerdo da Fig. 19-12.

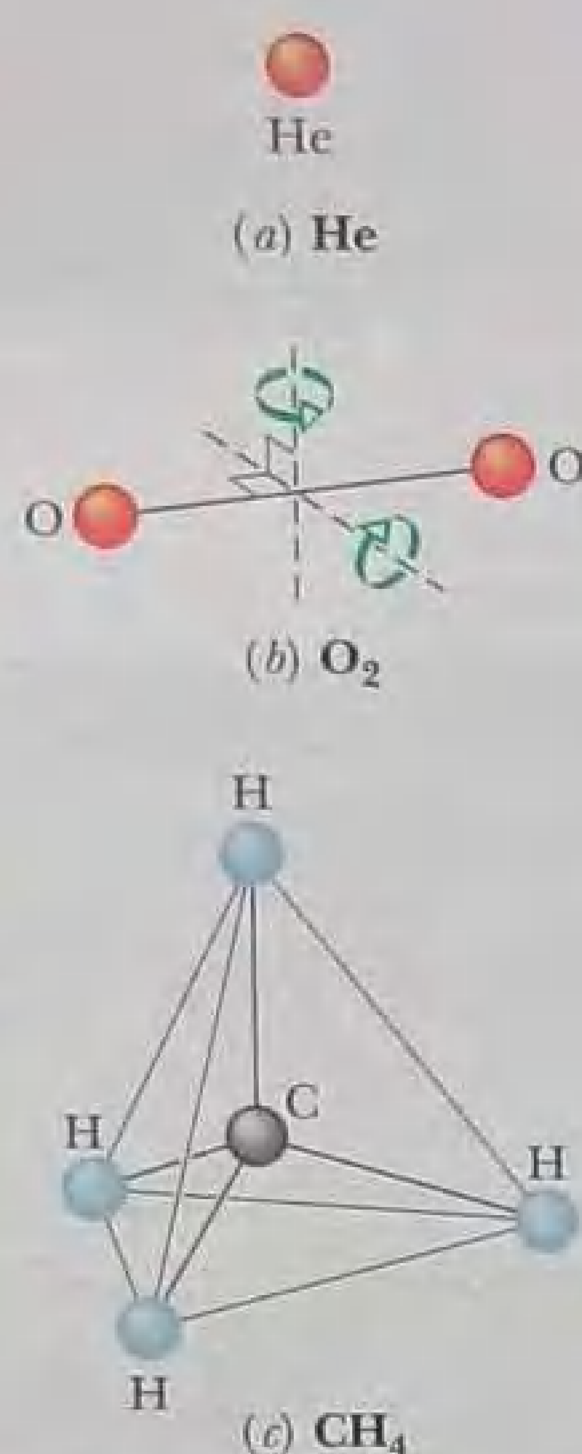


Figura 19-13 Modelos de moléculas usados na teoria cinética dos gases: (*a*) hélio, uma molécula monoatômica típica; (*b*) oxigênio, uma molécula diatômica típica; (*c*) metano, uma molécula poliatômica típica. As esferas representam átomos e os segmentos de reta representam ligações químicas. Dois eixos de rotação são mostrados para a molécula de oxigênio.

19-9 Graus de Liberdade e Calores Específicos Molares

Como mostra a Tabela 19-2, a previsão de que $C_V = \frac{3}{2}R$ é confirmada pelos resultados experimentais no caso dos gases monoatômicos, mas não no caso dos gases diatômicos e poliatômicos. Vamos tentar explicar a diferença considerando a possibilidade de que a energia interna das moléculas com mais de um átomo exista em outras formas além da energia cinética de translação.

A Fig. 19-13 mostra as configurações do hélio (uma molécula *monoatômica*, com um único átomo), do oxigênio (uma molécula *diatômica*, com dois átomos) e do metano (uma molécula *poliatômica*). De acordo com esses modelos, os três tipos de molécula podem ter movimentos de translação (movendo-se, por exemplo, para a esquerda e para a direita e para cima e para baixo) e movimentos de rotação (girando em torno de um eixo, como um pião). Além disso, as moléculas diatômicas e poliatômicas podem ter movimentos oscilatórios, com os átomos se aproximando e se afastando, como se estivessem presos a molas.

Para levar em conta todas as formas pelas quais a energia pode ser armazenada em um gás, James Clerk Maxwell propôs o **teorema da equipartição da energia**:

> Toda molécula tem um certo número f de *graus de liberdade*, que são formas independentes pelas quais a molécula pode armazenar energia. A cada grau de liberdade está associada (em média) uma energia de $\frac{1}{2}kT$ por molécula (ou $\frac{1}{2}RT$ por mol).

Vamos aplicar o teorema aos movimentos de translação e rotação das moléculas da Fig. 19-13. (Os movimentos oscilatórios serão discutidos na próxima seção.) Para os movimentos de translação, referimos as posições das moléculas do gás a um sistema de coordenadas *xyz*. Em geral, as moléculas possuem componentes da velocidade em relação aos três eixos. Isso significa que as moléculas de gases de todos os tipos têm três graus de liberdade de translação (três formas independentes de se deslocarem como um todo) e, em média, uma energia correspondente de $3(\frac{1}{2}kT)$ por molécula.

Para analisar o movimento de rotação, imagine que a origem do sistema de coordenadas *xyz* está no centro de cada molécula da Fig. 19-13. Em um gás, cada molécula deveria poder girar com uma componente da velocidade angular em relação a cada um dos três eixos, de modo que cada gás deveria possuir três graus de liberdade de rotação e, em média, uma energia adicional de $3(\frac{1}{2}kT)$ por molécula. *Entretanto*, os experimentos mostram que isso é verdade apenas para moléculas poliatômicas. De acordo com a *teoria quântica*, a física que lida com os movimentos e energias permitidos de átomos e moléculas, uma molécula de um gás monoatômico não gira e, portanto, não possui energia de rotação (um átomo isolado não pode girar como um pião). Uma molécula diatômica pode girar como um pião em torno de eixos perpendiculares à reta que liga os dois átomos (esses eixos são mostrados na Fig. 19-13*b*), mas não em torno da reta que liga os dois átomos. Assim, uma molécula diatômica tem apenas dois graus de liberdade de rotação e uma energia rotacional de apenas $2(\frac{1}{2}kT)$ por molécula.

Para estender nossa análise de calores específicos molares (C_p e C_V, na Seção 19-8) a gases ideais diatômicos e poliatômicos, é necessário substituir a Eq. 19-38

Tabela 19-3

Graus de Liberdade de Várias Moléculas

Molécula	Exemplo	Graus de Liberdade			Calor Específico Molar	
		De translação	De rotação	Total (f)	C_V(Eq. 19-51)	$C_p = C_V + R$
Monoatômica	He	3	0	3	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$
Diatômica	O_2	3	2	5	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$
Poliatômica	CH_4	3	3	6	$3R$	$4R$

($E_{int} = \frac{3}{2}nRT$) por $E_{int} = \frac{f}{2}nRT$, onde f é o número de graus de liberdade indicado na Tabela 19-3. Fazendo isso, obtemos a equação

$$C_V = \left(\frac{f}{2}\right)R = 4{,}16f \text{ J/mol}\cdot\text{K}, \tag{19-51}$$

que se reduz (como seria de se esperar) à Eq. 19-43 no caso de gases monoatômicos ($f = 3$). Como mostra a Tabela 19-2, os valores obtidos usando essa equação também estão de acordo com os resultados experimentais no caso de gases diatômicos ($f = 5$), mas são menores que os valores experimentais no caso de gases poliatômicos ($f = 6$ para moléculas como CH_4).

Exemplo

Calor, temperatura e energia interna para um gás diatômico

Transferimos 1000 J na forma de calor Q para um gás diatômico, permitindo que se expanda com a pressão mantida constante. As moléculas do gás podem girar, mas não oscilam. Que parte dos 1000 J é convertida em energia interna do gás? Dessa parte, que parcela corresponde a ΔK_{tran} (energia cinética associada ao movimento de translação das moléculas) e que parcela corresponde a ΔK_{rot} (energia cinética associada ao movimento de rotação)?

IDEIAS-CHAVE

1. A transferência de energia na forma de calor a um gás a pressão constante está relacionada ao aumento de temperatura resultante através da Eq. 19-46 ($Q = nC_p\Delta T$).
2. De acordo com a Fig. 19-12 e a Tabela 19-3, como o gás é diatômico e as moléculas não oscilam, $C_p = \frac{7}{2}R$.
3. O aumento ΔE_{int} da energia interna é o mesmo que ocorreria em um processo a volume constante que resultasse no mesmo aumento de temperatura ΔT. Assim, de acordo com a Eq. 19-45, $\Delta E_{int} = nC_V\Delta T$. De acordo com a Fig. 19-12 e a Tabela 19-3, $C_V = \frac{5}{2}R$.
4. Para os mesmos valores de n e ΔT, ΔE_{int} é maior para um gás diatômico que para um gás monoatômico porque é necessária uma energia adicional para fazer os átomos girarem.

Aumento da energia interna Vamos primeiro calcular a variação de temperatura ΔT devido à transferência de energia na forma de calor. De acordo com a Eq. 19-46, com $C_P = \frac{7}{2}R$, temos:

$$\Delta T = \frac{Q}{\frac{7}{2}nR}. \tag{19-52}$$

Em seguida, calculamos ΔE_{int} a partir da Eq. 19-45, usando o calor específico molar a volume constante C_V ($= \frac{5}{2}R$) e o mesmo valor de ΔT. Como se trata de um gás diatômico, vamos chamar esta variação de $\Delta E_{int,dia}$. De acordo com a Eq. 19-45, temos:

$$\Delta E_{int,dia} = nC_V\,\Delta T = n\tfrac{5}{2}R\left(\frac{Q}{\frac{7}{2}nR}\right) = \tfrac{5}{7}Q$$

$$= 0{,}71428Q = 714{,}3 \text{ J.} \quad \text{(Resposta)}$$

Assim, cerca de 71% da energia transferida para o gás é convertida em energia interna. O resto é convertido no trabalho necessário para aumentar o volume do gás.

Aumento da energia cinética Se aumentássemos a temperatura de um *gás monoatômico* (com o mesmo valor de n) do valor dado pela Eq. 19-52, a energia interna aumentaria de um valor menor, que vamos chamar de $\Delta E_{int,mon}$, porque não haveria rotações envolvidas. Para calcular esse valor menor, ainda podemos usar a Eq. 19-45, mas agora devemos usar o valor de C_V para um gás monoatômico ($C_V = \frac{3}{2}R$). Assim,

$$\Delta E_{int,mon} = n\tfrac{3}{2}R\,\Delta T.$$

Substituindo o valor de ΔT dado pela Eq. 19-52, obtemos

$$\Delta E_{\text{int,mon}} = n\tfrac{3}{2}R\left(\frac{Q}{n\tfrac{7}{2}R}\right) = \tfrac{3}{7}Q$$
$$= 0{,}42857Q = 428{,}6 \text{ J}.$$

No caso de um gás monoatômico, toda essa energia está associada à energia cinética de translação dos átomos, que é a única energia cinética presente. O importante a notar é que, no caso de um gás diatômico com os mesmos valores de n e ΔT, a mesma quantidade de energia é transferida para o movimento de translação das moléculas. O resto de $\Delta E_{\text{int,dia}}$ (ou seja, os 285,7 J restantes) vai para o movimento de rotação das moléculas. Assim, no caso do gás diatômico,

$$\Delta K_{\text{trans}} = 428{,}6 \text{ J} \quad \text{e} \quad \Delta K_{\text{rot}} = 285{,}7 \text{ J}. \qquad \text{(Resposta)}$$

19-10 Efeitos Quânticos

Podemos melhorar a concordância da teoria cinética dos gases com os resultados experimentais incluindo as oscilações dos átomos nos gases de moléculas diatômicas ou poliatômicas. Assim, por exemplo, os dois átomos da molécula de O_2 da Fig. 19-13*b* podem oscilar se aproximando e se afastando um do outro, como se estivessem unidos por uma mola. Os experimentos mostram, porém, que essas oscilações ocorrem apenas em temperaturas elevadas, ou seja, o movimento oscilatório é "ligado" apenas quando a energia das moléculas do gás atinge valores relativamente altos. Os movimentos de rotação apresentam um comportamento semelhante, só que em temperaturas mais baixas.

A Fig. 19-14 ajuda a visualizar esse comportamento dos movimentos de rotação e oscilação. A razão C_V/R do hidrogênio (H_2), um gás diatômico, está plotada em função da temperatura, com a temperatura em uma escala logarítmica para cobrir várias ordens de grandeza. Abaixo de 80 K, $C_V/R = 1{,}5$. Esse resultado sugere que apenas os três graus de liberdade de translação do hidrogênio estão envolvidos no calor específico.

Quando a temperatura aumenta, o valor de C_V/R aumenta gradualmente para 2,5, o que sugere que dois graus de liberdade adicionais estão envolvidos. A teoria quântica mostra que esses dois graus de liberdade estão associados ao movimento de rotação das moléculas do hidrogênio e que o movimento requer uma certa quantidade mínima de energia. Em temperaturas muito baixas (abaixo de 80 K), as moléculas não têm energia suficiente para girar. Quando a temperatura passa de 80 K, primeiro umas poucas moléculas e depois mais e mais moléculas ganham energia suficiente para girar e C_V/R aumenta até que todas estejam girando e $C_V/R = 2{,}5$.

Analogamente, a teoria quântica mostra que o movimento oscilatório das moléculas requer uma quantidade mínima de energia (maior que no caso das rotações). Essa quantidade mínima não é atingida até que as moléculas cheguem a uma temperatura por volta de 1000 K, como mostra a Fig. 19-14. Quando a temperatura passa de 1000 K, mais e mais moléculas têm energia suficiente para oscilar e C_V/R aumenta

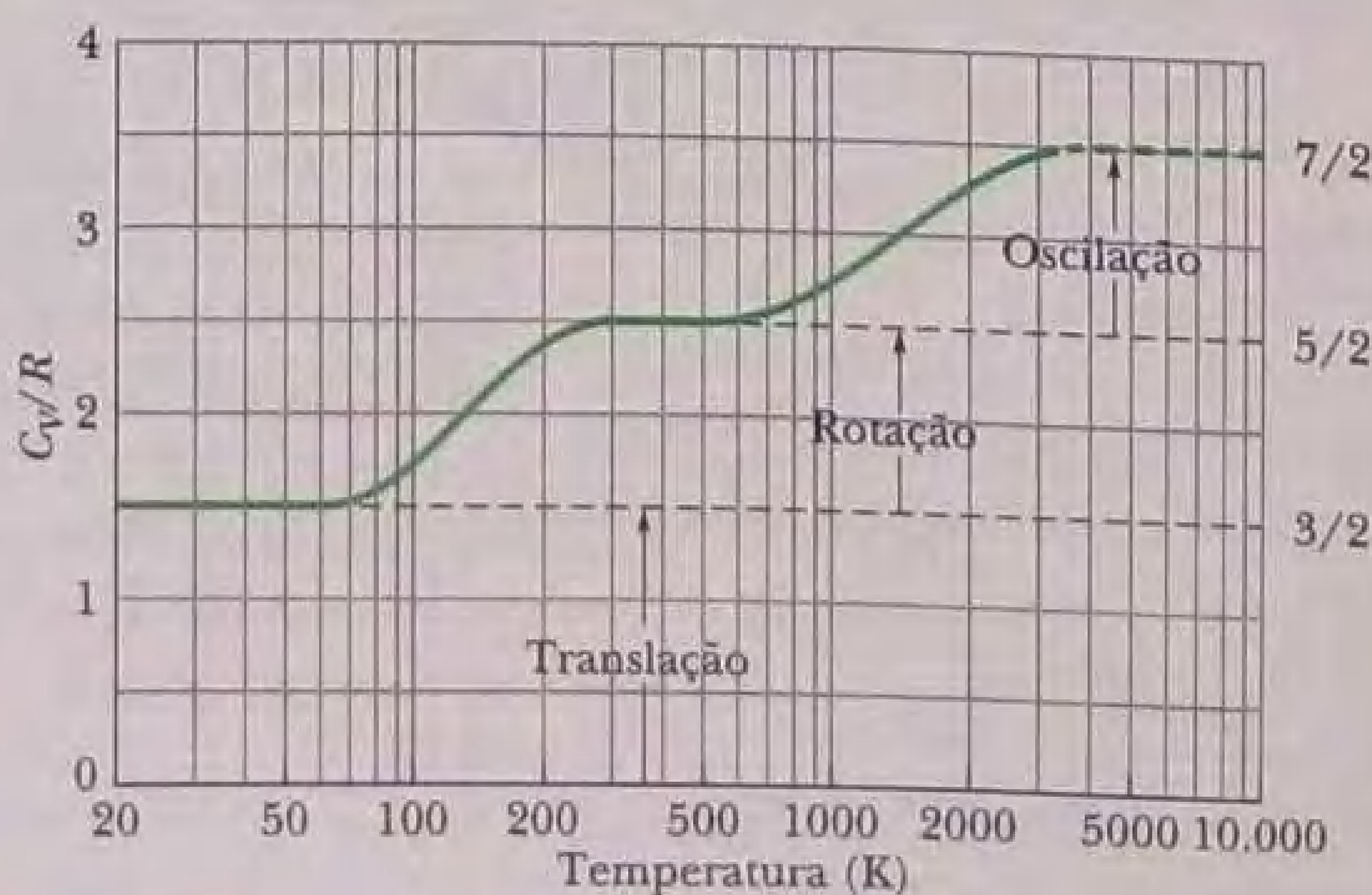


Figura 19-14 Curva de C_V/R em função da temperatura para o hidrogênio (um gás diatômico). Como existe uma energia mínima para as rotações e oscilações, apenas as translações são possíveis em temperaturas muito baixas. Quando a temperatura aumenta, começam as rotações. As oscilações começam em temperaturas ainda maiores.

até que todas estejam oscilando e $C_V/R = 3{,}5$. (Na Fig. 19-14, a curva do gráfico é interrompida em 3200 K porque a essa temperatura os átomos de uma molécula de hidrogênio oscilam tanto que a ligação entre os átomos se rompe e a molécula se *dissocia*, dando origem a dois átomos independentes.)

19-11 A Expansão Adiabática de um Gás Ideal

Vimos na Seção 17-4 que as ondas sonoras se propagam no ar e em outros gases como uma série de compressões e expansões; essas variações do meio de transmissão ocorrem tão depressa que não há tempo para que a energia seja transferida de um ponto do meio a outro na forma de calor. Como vimos na Seção 18-11, um processo para o qual $Q = 0$ é um *processo adiabático*. Podemos assegurar que $Q = 0$ executando o processo rapidamente (como no caso das ondas sonoras) ou executando-o (rapidamente ou não) em um recipiente bem isolado termicamente.

A Fig. 19-15*a* mostra nosso cilindro isolado de sempre, agora contendo um gás ideal e repousando em uma base isolante. Removendo parte da massa que está sobre o êmbolo, podemos permitir que o gás se expanda adiabaticamente. Quando o volume aumenta, tanto a pressão como a temperatura diminuem. Provaremos a seguir que a relação entre a pressão e a temperatura durante um processo adiabático é dada por

$$pV^{\gamma} = \text{constante} \qquad \text{(processo adiabático)}, \qquad (19\text{-}53)$$

onde $\gamma = C_p/C_V$, a razão entre os calores específicos molares do gás. Em um diagrama *p-V* como o da Fig. 19-15*b*, o processo ocorre ao longo de uma curva (chamada de *adiabática*) cuja equação é $p = (\text{constante})/V^{\gamma}$. Como o gás passa de um estado inicial *i* para um estado final *f*, podemos escrever a Eq. 19-53 como

$$p_i V_i^{\gamma} = p_f V_f^{\gamma} \qquad \text{(processo adiabático)}. \qquad (19\text{-}54)$$

Para escrever a equação de um processo adiabático em termos de *T* e *V*, usamos a equação dos gases ideais ($pV = nRT$) para eliminar *p* da Eq. 19-53, obtendo

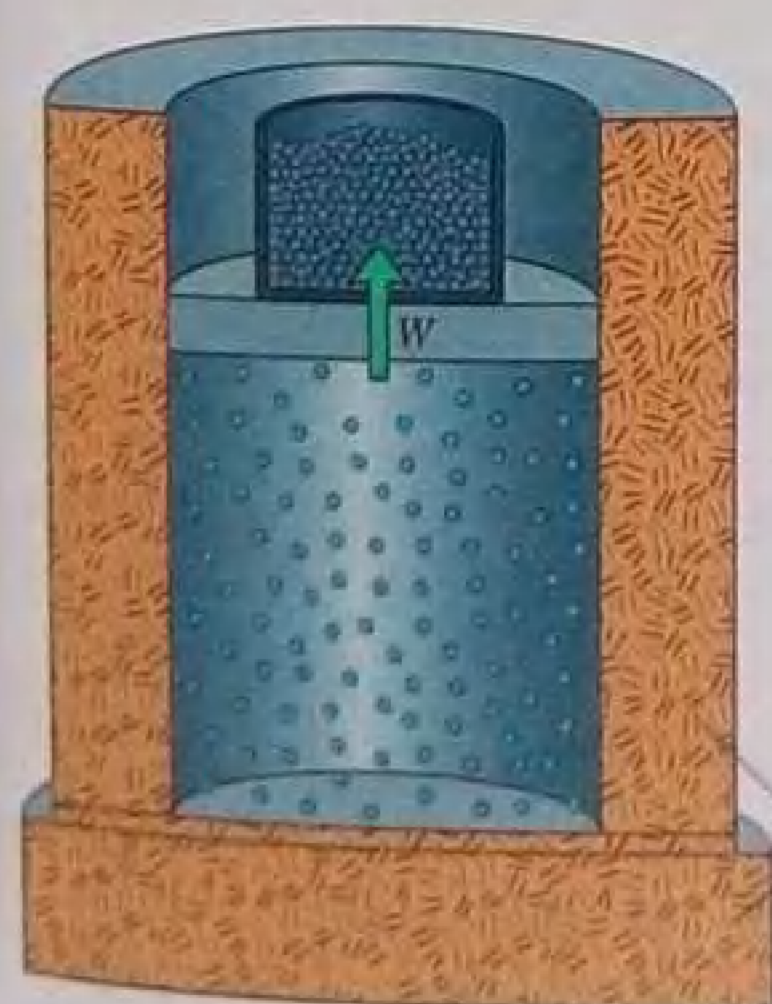
$$\left(\frac{nRT}{V}\right)V^{\gamma} = \text{constante}.$$

Como *n* e *R* são constantes, podemos escrever essa equação na forma

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante} \qquad \text{(processo adiabático)}, \qquad (19\text{-}55)$$

em que a constante é diferente da que aparece na Eq. 19-53. Quando o gás passa de um estado inicial *i* para um estado final *f*, podemos escrever a Eq. 19-55 na forma

$$T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1} \qquad \text{(processo adiabático)}. \qquad (19\text{-}56)$$



Removemos lentamente as esferas de chumbo, permitindo uma expansão sem transferência de calor.

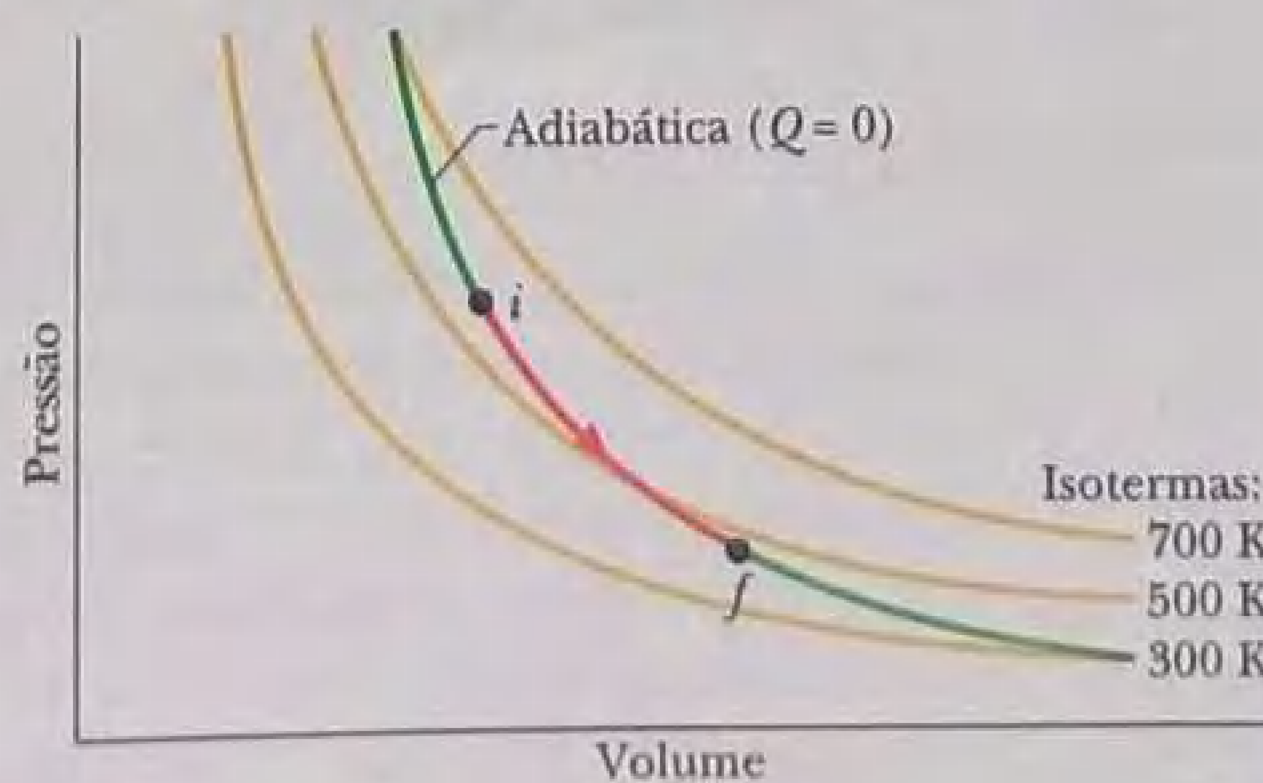


Figura 19-15 (*a*) O volume de um gás ideal é aumentado reduzindo o peso aplicado ao êmbolo. O processo é adiabático ($Q = 0$). (*b*) O processo se desenvolve de *i* para *f* ao longo de uma adiabática no diagrama *p-V*.

O estudo dos processos adiabáticos permite explicar a formação de uma névoa quando uma garrafa de champanha ou outra bebida com gás é aberta. Na parte superior do recipiente de qualquer bebida gasosa existe uma mistura de dióxido de carbono e vapor d'água. Como a pressão do gás é maior que a pressão atmosférica, o gás se expande para fora do recipiente quando este é aberto. Assim, o volume do gás aumenta, mas isso significa que o gás deve realizar trabalho contra a atmosfera. Como a expansão é rápida, é adiabática e a única fonte de energia para o trabalho é a energia interna do gás. Como a energia interna diminui, a temperatura do gás também decresce, o que faz o vapor d'água presente no gás se condensar em gotículas.

Demonstração da Equação 19-53

Suponha que você remova algumas esferas do êmbolo da Fig. 19-15*a*, permitindo que o gás ideal empurre para cima o êmbolo e as esferas restantes e assim aumente seu volume de um valor infinitesimal dV. Como a variação de volume é pequena, podemos supor que a pressão p do gás sobre o êmbolo permanece constante durante a variação. Essa suposição permite dizer que o trabalho dW realizado pelo gás durante o aumento de volume é igual a pdV. De acordo com a Eq. 18-27, a primeira lei da termodinâmica pode ser escrita na forma

$$dE_{\text{int}} = Q - p\,dV. \tag{19-57}$$

Como o gás está termicamente isolado (e, portanto, a expansão é adiabática), podemos fazer $Q = 0$. De acordo com a Eq. 19-45, podemos também substituir dE_{int} por $nC_V dT$. Com essas substituições e após algumas manipulações algébricas, obtemos

$$n\,dT = -\left(\frac{p}{C_V}\right) dV. \tag{19-58}$$

De acordo com a lei dos gases ideais ($pV = nRT$), temos:

$$p\,dV + V\,dp = nR\,dT. \tag{19-59}$$

Substituindo R por $C_p - C_V$ na Eq. 19-59, obtemos

$$n\,dT = \frac{p\,dV + V\,dp}{C_p - C_V}. \tag{19-60}$$

Igualando as Eqs. 19-58 e 19-60 e reagrupando os termos, temos:

$$\frac{dp}{p} + \left(\frac{C_p}{C_V}\right)\frac{dV}{V} = 0.$$

Substituindo a razão entre os calores específicos molares por γ e integrando (veja a integral 5 do Apêndice E), obtemos

$$\ln p + \gamma \ln V = \text{constante}.$$

Escrevendo o lado esquerdo como $\ln pV^{\gamma}$ e tomando o antilogaritmo de ambos os membros, obtemos

$$pV^{\gamma} = \text{constante}. \tag{19-61}$$

Expansões Livres

Como vimos na Seção 18-11, uma expansão livre de um gás é um processo adiabático que não envolve trabalho realizado pelo gás ou sobre o gás nem variação da energia interna do gás. Uma expansão livre é, portanto, muito diferente do tipo de processo adiabático descrito pelas Eqs. 19-53 a 19-61, em que trabalho é realizado e a energia interna varia. Essas equações, portanto, *não se aplicam* a uma expansão livre, embora essa expansão seja adiabática.

Lembre-se também de que, em uma expansão livre, o gás está em equilíbrio apenas nos pontos inicial e final; assim, podemos plotar apenas esses pontos, mas

não a expansão propriamente dita, em um diagrama p-V. Além disso, como $\Delta E_{int} = 0$, a temperatura do estado final deve ser a mesma do estado inicial. Assim, os pontos inicial e final em um diagrama p-V devem estar sobre a mesma isoterma, e em vez da Eq. 19-56, temos

$$T_i = T_f \quad \text{(expansão livre).} \tag{19-62}$$

Se supusermos também que o gás é ideal (de modo que $pV = nRT$), como não há variação de temperatura, o produto pV não irá variar. Assim, em vez da Eq. 19-53, uma expansão livre envolve a relação

$$p_iV_i = p_fV_f \quad \text{(expansão livre).} \tag{19-63}$$

Exemplo

Expansão adiabática, expansão livre

Inicialmente, 1 mol de oxigênio (considerado um gás ideal) está a uma temperatura de 310 K com um volume de 12 L. Permitimos que o gás se expanda para um volume final de 19 L.

(a) Qual será a temperatura final se o gás se expandir adiabaticamente? O oxigênio (O_2) é um gás diatômico e neste caso possui rotação, mas não oscilação.

IDEIAS-CHAVE

1. Ao se expandir contra a pressão do ambiente, um gás realiza trabalho.
2. Quando o processo é adiabático (não existe troca de calor com o ambiente), a energia necessária para o trabalho provém da energia interna do gás.
3. Como a energia interna diminui, a temperatura T também diminui.

Cálculos Podemos relacionar as temperaturas e volumes iniciais e finais usando a Eq. 19-56:

$$T_iV_i^{\gamma-1} = T_fV_f^{\gamma-1}. \tag{19-64}$$

Como as moléculas são diatômicas e possuem rotação, mas não oscilação, podemos usar os calores específicos molares da Tabela 19-3. Assim,

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = 1{,}40.$$

Explicitando T_f na Eq. 19-64 e substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$T_f = \frac{T_iV_i^{\gamma-1}}{V_f^{\gamma-1}} = \frac{(310\ \text{K})(12\ \text{L})^{1,40-1}}{(19\ \text{L})^{1,40-1}}$$

$$= (310\ \text{K})(\tfrac{12}{19})^{0,40} = 258\ \text{K}. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Quais serão a temperatura final e a pressão final se o gás se expandir livremente para o novo volume a partir de uma pressão de 2,0 Pa?

IDEIA-CHAVE

A temperatura não varia em uma expansão livre porque não há nada para mudar a energia cinética das moléculas.

Cálculo Como a temperatura não varia,

$$T_f = T_i = 310\ \text{K}. \quad \text{(Resposta)}$$

Podemos calcular a nova pressão usando a Eq. 19-63, que nos dá

$$p_f = p_i\frac{V_i}{V_f} = (2{,}0\ \text{Pa})\frac{12\ \text{L}}{19\ \text{L}} = 1{,}3\ \text{Pa}. \quad \text{(Resposta)}$$

Táticas para a Solução de Problemas

Um Resumo Gráfico de Quatro Processos em Gases

Neste capítulo, discutimos quatro processos especiais aos quais um gás ideal pode ser submetido. Um exemplo de cada um desses processos (para um gás monoatômico ideal) é mostrado na Fig. 19-16 e algumas características associadas aparecem na Tabela 19-4, incluindo dois nomes de processos (isobárico e isocórico) que não são usados neste livro, mas que o leitor talvez encontre em outros textos.

TESTE 5

Ordene as trajetórias 1, 2 e 3 da Fig. 19-16 de acordo com a quantidade de energia transferida para o gás na forma de calor, em ordem decrescente.

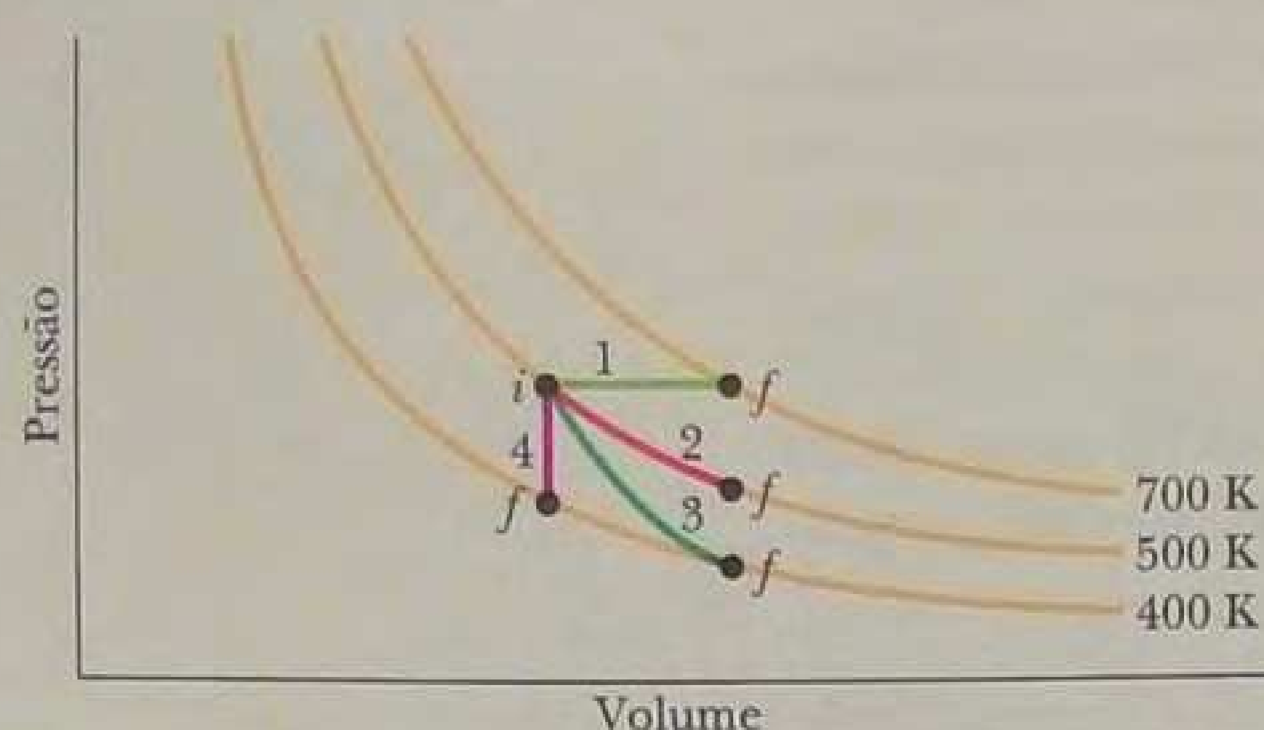


Figura 19-16 Diagrama p-V representando quatro processos especiais para um gás monoatômico ideal.

Tabela 19-4

Quatro Processos Especiais

Trajetória na Fig. 19-16	Grandeza Constante	Nome do Processo	Alguns Resultados Especiais ($\Delta E_{int} = Q - W$ e $\Delta E_{int} = nC_V \Delta T$ para todas as trajetórias)
1	p	Isobárico	$Q = nC_p \Delta T; W = p\,\Delta V$
2	T	Isotérmico	$Q = W = nRT \ln(V_f/V_i)$; $\Delta E_{int} = 0$
3	pV^γ, $TV^{\gamma-1}$	Adiabático	$Q = 0$; $W = -\Delta E_{int}$
4	V	Isocórico	$Q = \Delta E_{int} = nC_V \Delta T$; $W = 0$

REVISÃO E RESUMO

Teoria Cinética dos Gases A *teoria cinética dos gases* relaciona as propriedades *macroscópicas* dos gases (como, por exemplo, pressão e temperatura) às propriedades *microscópicas* das moléculas do gás (como, por exemplo, velocidade e energia cinética).

Número de Avogadro Um mol de uma substância contém N_A (*número de Avogadro*) unidades elementares (átomos ou moléculas, em geral), onde N_A é uma constante física cujo valor experimental é

$$N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1} \quad \text{(número de Avogadro).} \tag{19-1}$$

A massa molar M de uma substância é a massa de um mol da substância e está relacionada à m de uma molécula da substância através da equação

$$M = mN_A. \tag{19-4}$$

O número de mols n em uma amostra de massa M_{am}, que contém N moléculas, é dado por

$$n = \frac{N}{N_A} = \frac{M_{am}}{M} = \frac{M_{am}}{mN_A}. \quad (19\text{-}2, 19\text{-}3)$$

Gás Ideal Um *gás ideal* é um gás para o qual a pressão p, o volume V e a temperatura T estão relacionados através da equação

$$pV = nRT \quad \text{(lei dos gases ideais),} \tag{19-5}$$

onde n é o número de mols do gás e R é uma constante (8,31 J/mol · K) chamada de **constante dos gases ideais**. A lei dos gases ideais também pode ser escrita na forma

$$pV = NkT, \tag{19-9}$$

onde k é a **constante de Boltzmann**, dada por

$$k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J/K}. \tag{19-7}$$

Trabalho em uma Variação de Volume Isotérmica O trabalho realizado por um gás ideal durante uma variação **isotérmica** (a temperatura constante) de um volume V_i para um volume V_f é dado por

$$W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \quad \text{(gás ideal, processo isotérmico),} \tag{19-14}$$

Pressão, Temperatura e Velocidade Molecular A pressão exercida por n mols de um gás ideal, em termos da velocidade das moléculas do gás, é dada por

$$p = \frac{nMv_{rms}^2}{3V}, \tag{19-21}$$

onde $v_{rms} = \sqrt{(v^2)_{méd}}$ é a **velocidade média quadrática** das moléculas do gás. De acordo com a Eq. 19-5,

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \tag{19-22}$$

Temperatura e Energia Cinética A energia cinética de translação média $K_{méd}$ por molécula em um gás ideal é dada por

$$K_{méd} = \tfrac{3}{2}kT. \tag{19-24}$$

Livre Caminho Médio O *livre caminho médio* λ de uma molécula em um gás é a distância média percorrida pela molécula entre duas colisões sucessivas e é dado por

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2\, N/V}, \tag{19-25}$$

onde N/V é o número de moléculas por unidade de volume e d é o diâmetro da molécula.

Distribuição de Velocidades de Maxwell *A distribuição de velocidades de Maxwell* $P(v)$ é uma função tal que $P(v)\,dv$ é a fração de moléculas com velocidades em um intervalo dv no entorno da velocidade v:

$$P(v) = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 e^{-Mv^2/2RT}. \qquad (19\text{-}27)$$

Três medidas da distribuição de velocidades das moléculas de um gás são

$$v_{\text{méd}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad \text{(velocidade média)}, \qquad (19\text{-}31)$$

$$v_P = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \quad \text{(velocidade mais provável)}, \qquad (19\text{-}35)$$

e a velocidade média quadrática definida pela Eq. 19-22.

Calores Específicos Molares O calor específico molar C_V de um gás a volume constante é definido como

$$C_V = \frac{Q}{n\,\Delta T} = \frac{\Delta E_{\text{int}}}{n\,\Delta T}, \qquad (19\text{-}39, 19\text{-}41)$$

onde Q é o calor cedido ou absorvido por uma amostra de n mols de um gás, ΔT é a variação de temperatura resultante e ΔE_{int} é a variação de energia interna. Para um gás ideal monoatômico,

$$C_V = \tfrac{3}{2}R = 12{,}5 \text{ J/mol}\cdot\text{K}. \qquad (19\text{-}43)$$

O calor específico molar C_p de um gás a pressão constante é definido como

$$C_p = \frac{Q}{n\,\Delta T}, \qquad (19\text{-}46)$$

onde Q, n e ΔT têm as mesmas definições que para C_V. C_p também é dado por

$$C_p = C_V + R. \qquad (19\text{-}49)$$

Para n mols de um gás ideal,

$$E_{\text{int}} = nC_VT \quad \text{(gás ideal)}. \qquad (19\text{-}44)$$

Se n mols de um gás ideal confinado sofrem uma variação de temperatura ΔT devido a qualquer processo, a variação da energia interna do gás é dada por

$$\Delta E_{\text{int}} = nC_V\,\Delta T \quad \text{(gás ideal, qualquer processo)}. \qquad (19\text{-}45)$$

Graus de Liberdade e C_V Podemos determinar C_V usando o *teorema de equipartição da energia*, segundo o qual a cada *grau de liberdade* de uma molécula (ou seja, cada forma independente de armazenar energia) está associada (em média) uma energia de $\frac{1}{2}kT$ por molécula ($= \frac{1}{2}RT$ por mol). Se f é o número de graus de liberdade, $E_{\text{int}} = \frac{f}{2}nRT$ e

$$C_V = \left(\frac{f}{2}\right)R = 4{,}16f \text{ J/mol}\cdot\text{K}. \qquad (19\text{-}51)$$

Para gases monoatômicos, $f = 3$ (três graus de liberdade de translação); para gases diatômicos, $f = 5$ (três graus de translação e dois de rotação).

Processo Adiabático Quando um gás ideal sofre uma lenta variação adiabática de volume (uma variação de volume na $Q = 0$), a pressão e volume estão relacionados através da equação

$$pV^{\gamma} = \text{constante} \quad \text{(processo adiabático)}, \qquad (19\text{-}53)$$

onde $\gamma\,(= C_p/C_V)$ é a razão entre os calores específicos molares do gás. Para uma expansão livre, porém, pV = constante.

PERGUNTAS

1 A tabela mostra, para quatro situações, a energia Q absorvida ou cedida por um gás ideal na forma de calor e o trabalho W_p realizado pelo gás ou o trabalho W_s realizado sobre o gás, todos em joules. Ordene as quatro situações em termos da variação de temperatura do gás, em ordem decrescente.

	a	b	c	d
Q	−50	+35	−15	+20
W_p	−50	+35		
W_s			−40	+40

2 No diagrama p-V da Fig. 19-17, o gás realiza 5 J de trabalho quando percorre a isoterma ab e 4 J quando percorre a adiabática bc. Qual é a variação da energia interna do gás quando percorre a trajetória retilínea ac?

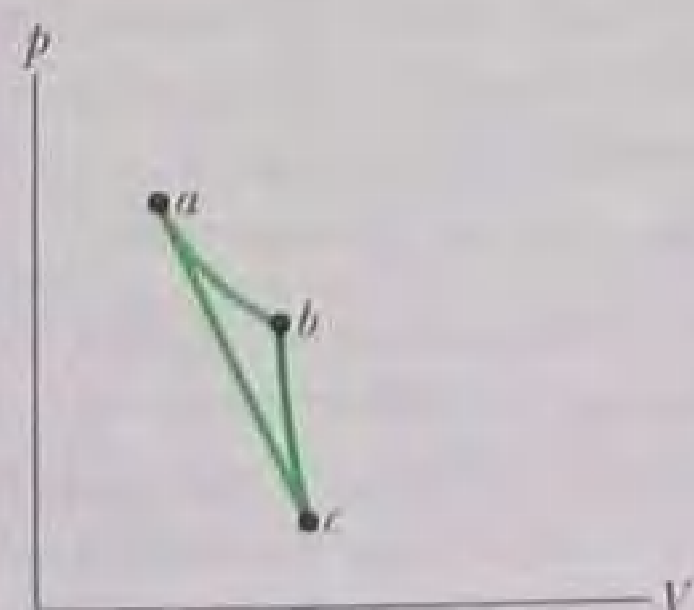


Figura 19-17 Pergunta 2.

3 Para que haja um aumento de temperatura ΔT_1, uma certa quantidade de um gás ideal requer 30 J quando o gás é aquecido a volume constante e 50 J quando o gás é aquecido à pressão constante. Qual é o trabalho realizado pelo gás na segunda situação?

4 O ponto na Fig. 19-18a representa o estado inicial de um gás e a reta vertical que passa pelo ponto divide o diagrama p-V nas regiões 1 e 2. Determine se o trabalho W realizado pelo gás nos seguintes processos é positivo, negativo ou nulo: (a) o estado final do gás está na reta vertical, acima do estado inicial; (b) o estado final do gás está na reta vertical, abaixo do estado inicial; (c) o estado final do gás está em um ponto qualquer da região 1; (d) o estado final do gás está em um ponto qualquer da região 2.

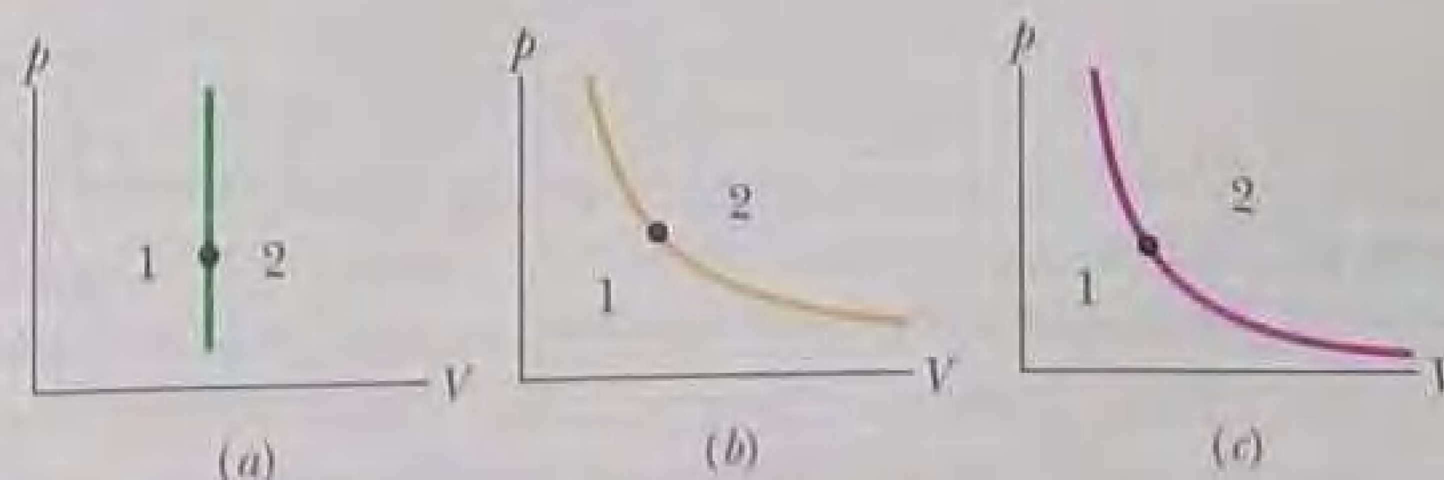


Figura 19-18 Perguntas 4, 6 e 8.

5 Uma certa quantidade de calor deve ser transferida para 1 mol de um gás ideal monoatômico (a) à pressão constante e (b) a volume constante e para 1 mol de um gás diatômico (c) à pressão constante e (d) a volume constante. A Fig. 19-19 mostra quatro trajetórias de um ponto inicial para um ponto final em um diagrama p-V. Que trajetória corresponde a que processo? (e) As moléculas do gás diatômico estão girando?

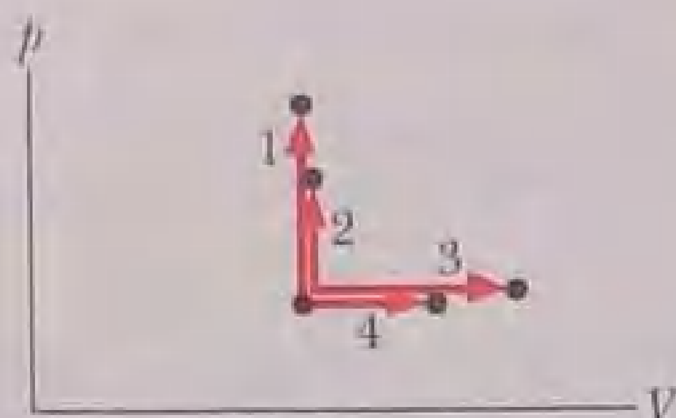


Figura 19-19 Pergunta 5.

6 O ponto da Fig. 19-18b representa o estado inicial de um gás e a isoterma que passa pelo ponto divide o diagrama p-V em duas regiões, 1 e 2. Para os processos a seguir, determine se a variação ΔE_{int} da energia interna do gás é positiva, negativa ou nula: (a) o estado final do gás está na mesma isoterma, acima do estado inicial; (b) o estado final do gás está na mesma isoterma, abaixo do estado inicial; (c) o estado final do gás está em um ponto qualquer da região 1; (d) o estado final do gás está em um ponto qualquer da região 2.

7 (a) Ordene as quatro trajetórias da Fig. 19-16 de acordo com o trabalho realizado pelo gás, em ordem decrescente. (b) Ordene as trajetórias 1, 2 e 3 de acordo com a variação da energia interna do gás, da mais positiva para a mais negativa.

8 O ponto da Fig. 19-18c representa o estado inicial de um gás e a adiabática que passa pelo ponto divide o diagrama p-V nas regiões 1 e 2. Para os processos a seguir, determine se o calor Q correspondente é positivo, negativo ou nulo: (a) o estado final do gás está na mesma adiabática, acima do estado inicial; (b) o estado final do gás está na mesma adiabática, abaixo do estado inicial; (c) o estado final do gás está em um ponto qualquer da região 1; (d) o estado final do gás está em um ponto qualquer da região 2.

9 Um gás ideal diatômico, cujas moléculas estão girando, mas não oscilam, perde uma quantidade Q de calor. A diminuição de energia interna do gás é maior se a perda acontece em um processo a volume constante ou em um processo à pressão constante?

10 A temperatura de um gás ideal aumenta, diminui ou permanece a mesma durante (a) uma expansão isotérmica, (b) uma expansão à pressão constante, (c) uma expansão adiabática e (d) um aumento de pressão a volume constante?

PROBLEMAS

• – ••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

 Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Seção 19-2 O Número de Avogadro

•**1** Determine a massa em quilogramas de $7{,}50 \times 10^{24}$ átomos de arsênio, que tem uma massa molar de 74,9 g/mol.

•**2** O ouro tem uma massa molar de 197 g/mol. (a) Quantos mols de ouro existem em uma amostra de 2,50 g de ouro puro? (b) Quantos átomos existem na amostra?

Seção 19-3 Gases Ideais

•**3** Uma amostra de oxigênio com um volume de 1000 cm³ a 40,0°C e $1{,}01 \times 10^5$ Pa se expande até um volume de 1500 cm³ a uma pressão de $1{,}06 \times 10^5$ Pa. Determine (a) o número de mols de oxigênio presentes na amostra e (b) a temperatura final da amostra.

•**4** Uma amostra de um gás ideal a 10,0°C e 100 kPa ocupa um volume de 2,50 m³. (a) Quantos mols do gás a amostra contém? (b) Se a pressão é aumentada para 300 kPa e a temperatura é aumentada para 30,0°C, que volume o gás passa a ocupar? Suponha que não há vazamentos.

•**5** O melhor vácuo produzido em laboratório tem uma pressão de aproximadamente $1{,}00 \times 10^{-18}$ atm, ou $1{,}01 \times 10^{-13}$ Pa. Quantas moléculas do gás existem por centímetro cúbico nesse vácuo a 293 K?

•**6** *Garrafa de água em um carro quente.* Nos dias de calor, a temperatura em um carro fechado estacionado no sol pode ser suficiente para provocar queimaduras. Suponha que uma garrafa de água removida de uma geladeira à temperatura de 5,00°C seja aberta, fechada novamente e deixada em um carro fechado com uma temperatura interna de 75,0°C. Desprezando a dilatação térmica da água e da garrafa, determine a pressão ao ar contido no interior da garrafa. (A pressão pode ser suficiente para arrancar uma tampa rosqueada.)

•**7** Suponha que 1,80 mol de um gás ideal sejam comprimidos isotermicamente a 30°C de um volume inicial de 3,00 m³ para um volume final de 1,50 m³. (a) Qual é a quantidade de calor, em joules, transferida durante a compressão e (b) o calor é absorvido ou cedido pelo gás?

•**8** Calcule (a) o número de mols e (b) o número de moléculas em 1,00 cm³ de um gás ideal a uma pressão de 100 Pa e a uma temperatura de 220 K.

•**9** Um pneu de automóvel tem um volume de $1{,}64 \times 10^{-2}$ m³ e contém ar à pressão manométrica (pressão acima da pressão atmosférica) de 165 kPa quando a temperatura é 0,00°C. Qual é a pressão manométrica do ar no pneu quando a temperatura aumenta para 27,0°C e o volume aumenta para $1{,}67 \times 10^{-2}$ m³? Suponha que a pressão atmosférica seja $1{,}01 \times 10^5$ Pa.

•**10** Um recipiente contém 2 mols de um gás ideal que tem uma massa molar M_1 e 0,5 mol de um segundo gás ideal que tem uma massa molar $M_2 = 3M_1$. Que fração da pressão total sobre a parede do recipiente se deve ao segundo gás? (A explicação da teoria cinética dos gases para a pressão leva à lei das pressões parciais para uma mistura de gases que não reagem quimicamente, descoberta experimentalmente: *a pressão total exercida por uma mistura de gases é igual à soma das pressões que os gases exerceriam se cada um ocupasse sozinho o volume do recipiente.*)

••**11** O ar que inicialmente ocupa 0,140 m³ à pressão manométrica de 103,0 kPa se expande isotermicamente até atingir a pressão de 101,3 kPa e, em seguida, é resfriado à pressão constante até voltar ao volume inicial. Calcule o trabalho realizado pelo ar. (Pressão manométrica é a diferença entre a pressão real e a pressão atmosférica.)

••12 *Salvamento no fundo do mar.* Quando o submarino norte-americano *Squalus* enguiçou a 80 m de profundidade, uma câmara cilíndrica foi usada para resgatar a tripulação. A câmara tinha um raio de 1,00 m e uma altura de 4,00 m, era aberta do fundo e levava dois operadores. Foi baixada ao longo de um cabo-guia que um mergulhador havia fixado ao submarino. Depois que a câmara completou a descida e foi presa a uma escotilha do submarino, a tripulação pôde passar para a câmara. Durante a descida, os operadores injetaram ar na câmara, a partir de tanques, para que a câmara não fosse inundada. Suponha que a pressão do ar no interior da câmara era igual à pressão da água à profundidade h, dada por $p_0 + \rho gh$, onde $p_0 = 1{,}000$ atm na superfície e $\rho = 1024$ kg/m³ é a massa específica da água do mar. Suponha uma temperatura constante de 20,0°C na superfície e uma temperatura da água de 3,0°C na profundidade em que se encontrava o submarino. (a) Qual era o volume de ar na câmara na superfície? (b) Se não tivesse sido injetado ar na câmara, qual seria o volume do ar na câmara à profundidade $h = 80{,}0$ m? (c) Quantos mols adicionais de ar foram necessários para manter o volume inicial de ar na câmara?

••13 Uma amostra de um gás ideal é submetida ao processo cíclico *abca* mostrado na Fig. 19-20. A escala do eixo vertical é definida por $p_b = 7{,}5$ kPa e $p_{ac} = 2{,}5$ kPa. No ponto a, $T = 200$ K. (a) Quantos mols do gás estão presentes na amostra? Qual é (b) a temperatura do gás no ponto b, (c) a temperatura do gás no ponto c e (d) a energia adicionada ao gás na forma de calor ao ser completado o ciclo?

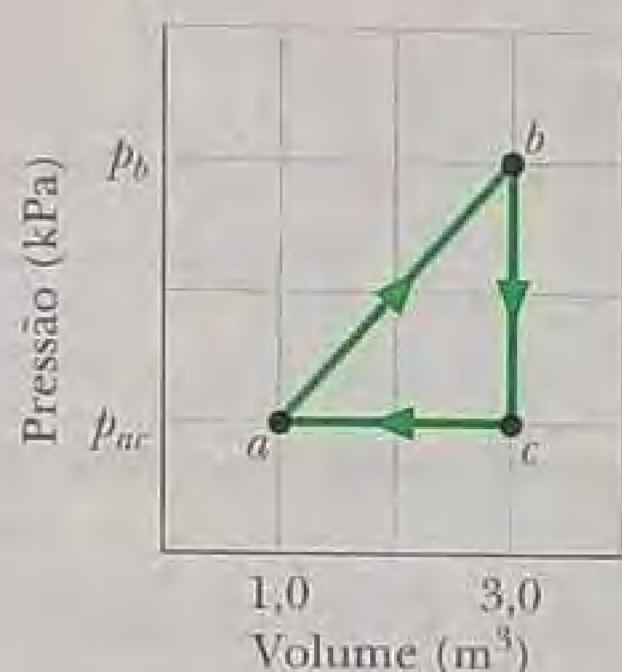


Figura 19-20 Problema 13.

••14 No intervalo de temperaturas de 310 K a 330 K, a pressão p de um certo gás não ideal está relacionada ao volume V e à temperatura T através da equação

$$p = (24{,}9\ \text{J/K})\frac{T}{V} - (0{,}00662\ \text{J/K}^2)\frac{T^2}{V}.$$

Qual é o trabalho realizado pelo gás se a temperatura aumenta de 315 K para 325 K enquanto a pressão permanece constante?

••15 Suponha que 0,825 mol de um gás ideal sofra uma expansão isotérmica quando uma energia Q é acrescentada ao gás na forma de calor. Se a Fig. 19-21 mostra o volume final V_f em função de Q, qual é a temperatura do gás? A escala do eixo vertical é definida por $V_{fs} = 0{,}30$ m³ e a escala do eixo horizontal é definida por $Q_s = 1200$ J.

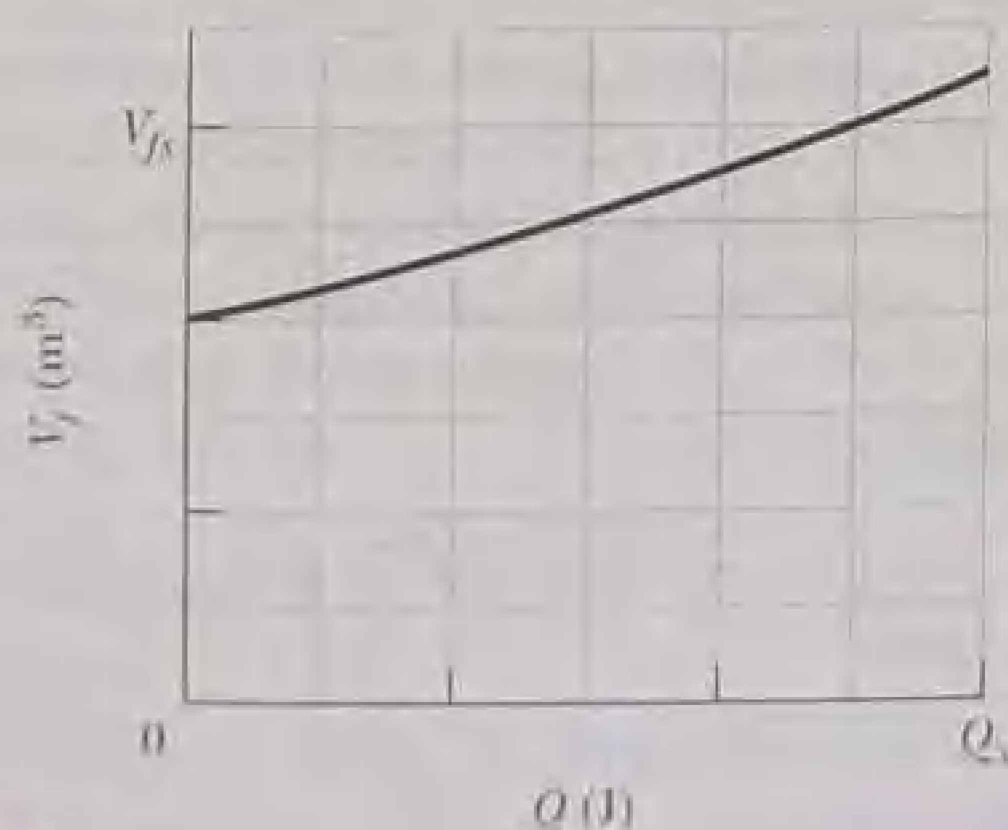


Figura 19-21 Problema 15.

•••16 Uma bolha de ar com 20 cm³ de volume está no fundo de um lago com 40 m de profundidade, onde a temperatura é 4,0°C. A bolha sobe até a superfície, que está à temperatura de 20°C. Considere a temperatura da bolha como sendo a mesma que a da água em volta. Qual é o volume da bolha no momento em que chega à superfície?

•••17 O recipiente A da Fig. 19-22, que contém um gás ideal à pressão de $5{,}0 \times 10^5$ Pa e à temperatura de 300 K, está ligado por um tubo fino (e uma válvula fechada) a um recipiente B cujo volume é quatro vezes maior que o de A. O recipiente B contém o mesmo gás ideal à pressão de $1{,}0 \times 10^5$ Pa e à temperatura de 400 K. A válvula é aberta para que as pressões se igualem, mas a temperatura de cada recipiente é mantida. Qual é a nova pressão nos dois recipientes?

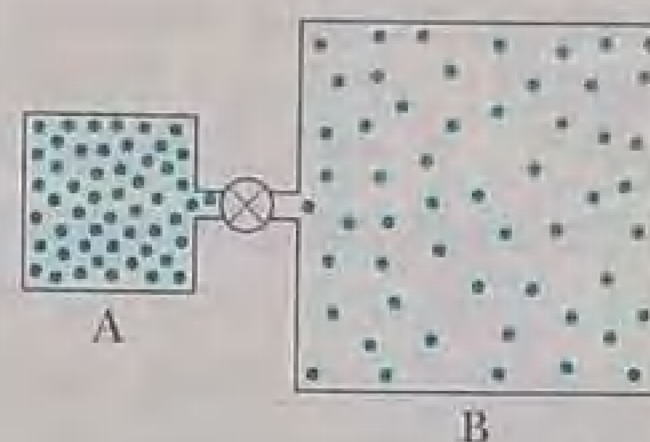


Figura 19-22 Problema 17.

Seção 19-4 Pressão, Temperatura e Velocidade Média Quadrática

•18 A temperatura e pressão da atmosfera solar são $2{,}00 \times 10^6$ K e 0,0300 Pa. Calcule a velocidade média quadrática dos elétrons livres (de massa igual a $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg) na superfície do Sol, supondo que se comportam como um gás ideal.

•19 (a) Calcule a velocidade média quadrática de uma molécula de nitrogênio a 20,0°C. A massa molar da molécula de nitrogênio (N_2) é dada na Tabela 19-1. A que temperatura a velocidade média quadrática é (b) metade desse valor e (c) o dobro desse valor?

•20 Calcule a velocidade média quadrática de átomos de hélio a 1000 K. A massa molar do átomo de hélio é dada no Apêndice F.

•21 A menor temperatura possível no espaço sideral é 2,7 K. Qual é a velocidade média quadrática de moléculas de hidrogênio a essa temperatura? A massa molar da molécula de hidrogênio (H_2) é dada na Tabela 19-1.

•22 Determine a velocidade média quadrática de átomos de argônio a 313 K. A massa molar do argônio é dada no Apêndice F.

••23 Um feixe de moléculas de hidrogênio (H_2) está direcionado para uma parede, fazendo um ângulo de 55° com a normal à parede. As moléculas do feixe têm uma velocidade de 1,0 km/s e uma massa de $3{,}3 \times 10^{-24}$ g. O feixe atinge a parede em uma área de 2,0 cm², a uma taxa de 10^{23} moléculas por segundo. Qual é a pressão do feixe sobre a parede?

••24 A 273 K e $1{,}00 \times 10^{-2}$ atm, a massa específica de um gás é $1{,}24 \times 10^{-5}$ g/cm³. (a) Determine v_{rms} para as moléculas do gás. (b) Determine a massa molar do gás e (c) identifique o gás. (*Sugestão:* o gás aparece na Tabela 19-1.)

Seção 19-5 Energia Cinética de Translação

•25 Determine o valor médio da energia cinética de translação das moléculas de um gás ideal a (a) 0,00°C e (b) 100°C. Qual é a energia cinética de translação média por mol de um gás ideal a (c) 0,00°C e (d) 100°C?

•26 Qual é a energia cinética de translação média das moléculas de nitrogênio a 1600 K?

••27 A água a céu aberto a 32°C evapora por causa do escape de algumas moléculas da superfície. O calor de vaporização

(539 cal/g) é aproximadamente igual a εn, onde ε é a energia média das moléculas que escapam e n é o número de moléculas por grama. (a) Determine ε. (b) Qual é a razão entre ε e a energia cinética média das moléculas de H_2O, supondo que esta última está relacionada à temperatura da mesma forma que nos gases?

Seção 19-6 Livre Caminho Médio

•28 Para que frequência o comprimento de onda do som no ar é igual ao livre caminho médio das moléculas de oxigênio a uma pressão de 1,0 atm e 0,00°C? Tome o diâmetro de uma molécula de oxigênio como $3{,}0 \times 10^{-8}$ cm.

•29 A concentração de moléculas na atmosfera a uma altitude de 2500 km está em torno de 1 molécula/cm³. (a) Supondo que o diâmetro das moléculas é $2{,}0 \times 10^{28}$ cm, determine o livre caminho médio previsto pela Eq. 19-25. (b) Explique se o valor calculado tem significado físico.

•30 O livre caminho médio das moléculas de nitrogênio a 0,0°C e 1,0 atm é $0{,}80 \times 10^{-5}$ cm. Nessas condições de temperatura e pressão, existem $2{,}7 \times 10^{19}$ moléculas/cm³. Qual é o diâmetro das moléculas?

••31 Em um certo acelerador de partículas, prótons se movem em uma trajetória circular de 23,0 m de diâmetro em uma câmara evacuada cujo gás residual está a 295 K e a uma pressão de $1{,}00 \times 10^{-6}$ torr. (a) Calcule o número de moléculas do gás residual por centímetro cúbico. (b) Qual é o livre caminho médio das moléculas do gás residual se o diâmetro das moléculas é $2{,}00 \times 10^{-8}$ cm?

••32 A 20°C e a uma pressão de 750 torr, o livre caminho médio do argônio (Ar) é $\lambda_{Ar} = 9{,}9 \times 10^{-6}$ cm e o livre caminho médio da molécula de nitrogênio (N_2) é $\lambda_{N_2} = 27{,}5 \times 10^{-6}$ cm. (a) Determine a razão entre o diâmetro de um átomo de Ar e o diâmetro de uma molécula de N_2. Qual é o livre caminho médio do argônio (b) a 20°C e 150 torr e (c) a −40°C e 750 torr?

Seção 19-7 A Distribuição de Velocidades das Moléculas

•33 As velocidades de 10 moléculas são: 2,0; 3,0; 4,0;...; 11 km/s. Determine (a) a velocidade média e (b) a velocidade média quadrática das moléculas.

•34 As velocidades de 22 partículas são mostradas a seguir (N_i é o número de partículas que possuem velocidade v_i):

N_i	2	4	6	8	2
v_i (cm/s)	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0

Determine (a) $v_{méd}$, (b) v_{rms} e (c) v_P.

•35 Dez partículas estão se movendo com as seguintes velocidades: quatro a 200 m/s, duas a 500 m/s e quatro a 600 m/s. Calcule a velocidade (a) média e (b) média quadrática das partículas. (c) v_{rms} é maior que $v_{méd}$?

••36 A velocidade mais provável das moléculas de um gás quando está a uma temperatura T_2 é igual à velocidade média quadrática das moléculas do gás quando está a uma temperatura T_1. Calcule a razão T_2/T_1.

••37 A Fig. 19-23 mostra a distribuição de velocidades hipotética das N partículas de um gás [note que $P(v) = 0$ para qualquer velocidade $v > 2v_0$]. Qual é o valor de (a) av_0, (b) $v_{méd}/v_0$ e (c) v_{rms}/v_0? (d) Qual é a fração de partículas com velocidades entre $1{,}5v_0$ e $2{,}0v_0$?

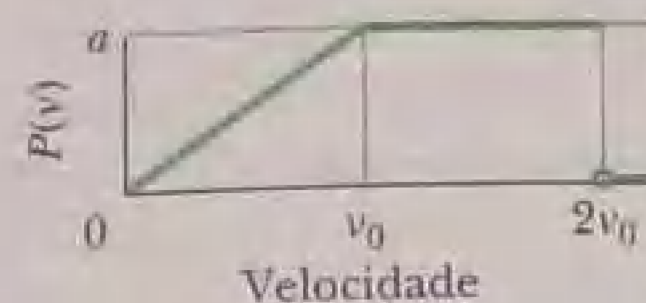


Figura 19-23 Problema 37.

••38 A Fig. 19-24 mostra a distribuição de probabilidade da velocidade das moléculas de uma amostra de nitrogênio. A escala do eixo horizontal é definida por $v_s = 1200$ m/s. Determine (a) a temperatura do gás e (b) a velocidade média quadrática das moléculas.

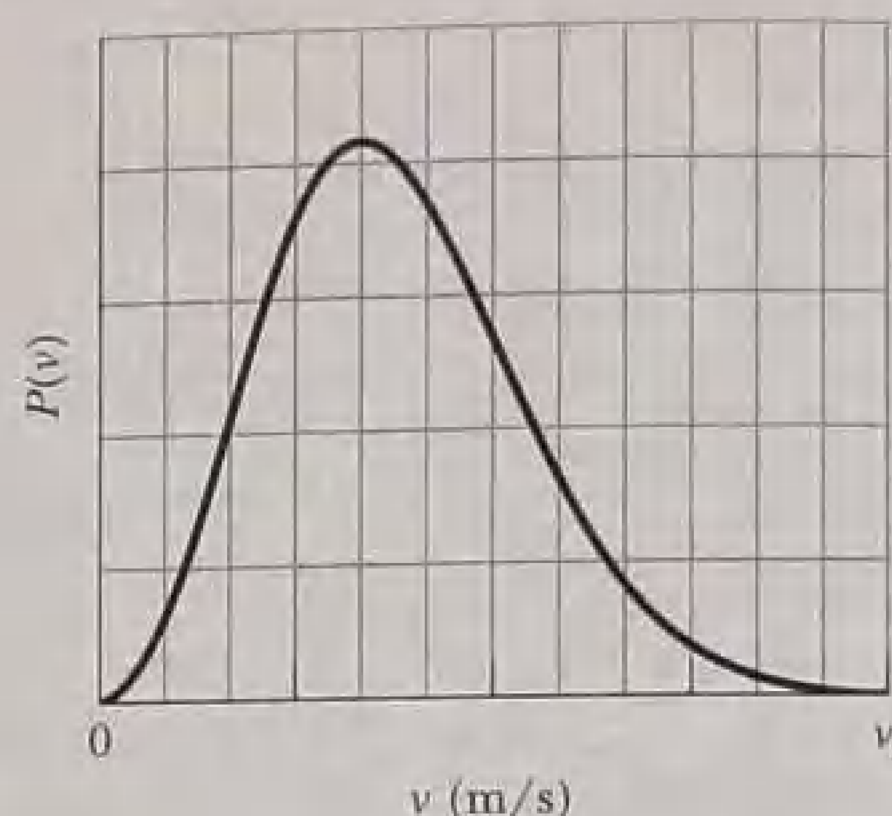


Figura 19-24 Problema 38.

••39 A que temperatura a velocidade média quadrática (a) do H_2 (hidrogênio molecular) e (b) do O_2 (oxigênio molecular) é igual à velocidade de escape da Terra (Tabela 13-2)? A que temperatura a velocidade média quadrática (c) do H_2 e (d) do O_2 é igual à velocidade de escape da Lua (onde a aceleração da gravidade na superfície tem um módulo de 0,16g)? Considerando as respostas dos itens (a) e (b), deve existir muito (e) hidrogênio e (f) oxigênio na atmosfera superior da Terra, onde a temperatura é cerca de 1000 K?

••40 Dois recipientes estão à mesma temperatura. O primeiro contém gás à pressão p_1, de massa molecular m_1 e velocidade média quadrática v_{rms1}. O segundo contém gás à pressão $2{,}0p_1$, de massa molecular m_2 e velocidade média $v_{méd2} = 2{,}0_{vrms1}$. Determine a razão m_1/m_2.

••41 Uma molécula de hidrogênio (cujo diâmetro é $1{,}0 \times 10^{-8}$ cm), movendo-se à velocidade média quadrática, escapa de um forno a 4000 K para uma câmara que contém átomos *frios* de argônio (cujo diâmetro é $3{,}0 \times 10^{-8}$ cm) em uma concentração de $4{,}0 \times 10^{19}$ átomos/cm³. (a) Qual é a velocidade da molécula de hidrogênio? (b) Qual é a distância mínima entre os centros para que a molécula de hidrogênio colida com um átomo de argônio, supondo que ambos são esféricos? (c) Qual é o número inicial de colisões por segundo experimentado pela molécula de hidrogênio? (*Sugestão:* suponha que os átomos de argônio estão parados. Nesse caso, o livre caminho médio da molécula de hidrogênio é dado pela Eq. 19-26 e não pela Eq. 19-25.)

Seção 19-8 Os Calores Específicos Molares de um Gás Ideal

•42 Qual é a energia interna de 1,0 mol de um gás ideal monoatômico a 273 K?

••43 A temperatura de 3,00 mols de um gás diatômico ideal é aumentada de 40,0°C sem mudar a pressão do gás. As moléculas do gás giram, mas não oscilam. (a) Qual é a energia transferida para o gás na forma de calor? (b) Qual é a variação da energia interna do

gás? (c) Qual é o trabalho realizado pelo gás? (d) Qual é o aumento da energia cinética de rotação do gás?

••44 Um mol de um gás ideal diatômico vai de a a c ao longo da trajetória diagonal na Fig. 19-25. A escala do eixo vertical é definida por $p_{ab} = 5,0$ kPa e $p_c = 2,0$ kPa; a escala do eixo horizontal é definida por $V_{bc} = 4,0$ m³ e $V_a = 2,0$ m³. Durante a transição, (a) qual é a variação da energia interna do gás e (b) qual é a energia adicionada ao gás na forma de calor? (c) Que calor é necessário para que o gás vá de a a c ao longo da trajetória indireta abc?

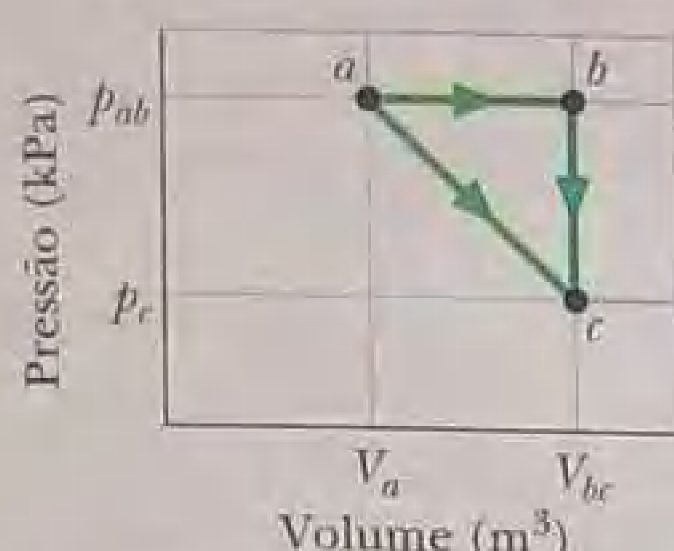


Figura 19-25 Problema 44.

••45 A massa da molécula de um gás pode ser calculada a partir do calor específico a volume constante c_V. (Note que não se trata de C_V.) Tome $c_V = 0,075$ cal/g · C° para o argônio e calcule (a) a massa de um átomo de argônio e (b) a massa molar do argônio.

••46 A temperatura de 2,00 mols de um gás ideal monoatômico é aumentada de 15,0 K à pressão constante. Determine (a) o trabalho W realizado pelo gás, (b) a quantidade Q de calor transferida para o gás, (c) a variação ΔE_{int} da energia interna do gás e (d) a variação ΔK da energia cinética média por átomo.

••47 A temperatura de 2,00 mols de um gás ideal monoatômico é aumentada de 15,0 K a volume constante. Determine (a) o trabalho W realizado pelo gás, (b) a quantidade Q de calor transferida para o gás, (c) a variação ΔE_{int} da energia interna do gás e (d) a variação ΔK da energia cinética média por átomo.

••48 Quando 20,9 J foram adicionados na forma de calor a um certo gás ideal, o volume do gás variou de 50,0 cm³ para 100 cm³ enquanto a pressão permaneceu em 1,00 atm. (a) De quanto variou a energia interna do gás? Se a quantidade de gás presente era $2,00 \times 10^{-3}$ mol, determine (b) C_p e (c) C_V.

••49 Um recipiente contém uma mistura de três gases não reagentes: 2,40 mols do gás 1 com $C_{V1} = 12,0$ J/mol · K, 1,50 mols do gás 2 com $C_{V2} = 12,8$ J/mol · K e 3,20 mols do gás 3 com $C_{V3} = 20,0$ J/mol · K. Qual é o C_V da mistura?

Seção 19-9 Graus de Liberdade e Calores Específicos Molares

•50 Fornecemos 70 J de calor a um gás diatômico, que se expande a pressão constante. As moléculas do gás giram, mas não oscilam. De quanto a energia interna do gás aumenta?

•51 Quando 1,0 mol de gás oxigênio (O_2) é aquecido a pressão constante a partir de 0°C, que quantidade de calor deve ser adicionada ao gás para que o volume dobre de valor? (As moléculas giram, mas não oscilam.)

••52 Suponha que 12,0 g de gás oxigênio (O_2) são aquecidos de 25,0°C a 125°C à pressão atmosférica. (a) Quantos mols de oxigênio estão presentes? (A massa molar do oxigênio está na Tabela 19-1.) (b) Qual é a quantidade de calor transferida para o oxigênio? (As moléculas giram, mas não oscilam.) (c) Que fração do calor é usada para aumentar a energia interna do oxigênio?

••53 Suponha que 4,00 mols de um gás ideal diatômico, com rotação molecular, mas sem oscilação, sofrem um aumento de temperatura de 60,0 K em condições de pressão constante. Qual é (a) a energia Q transferida na forma de calor, (b) a variação ΔE_{int} da energia interna do gás, (c) o trabalho W realizado pelo gás e (d) a variação ΔK da energia cinética de translação do gás?

Seção 19-11 A Expansão Adiabática de um Gás Ideal

•54 Sabemos que pV^γ = constante nos processos adiabáticos. Calcule a "constante" para um processo adiabático envolvendo exatamente 2,0 mols de um gás ideal que passa por um estado no qual a pressão é exatamente $p = 1,0$ atm e a temperatura é exatamente $T = 300$ K. Suponha que o gás é diatômico e que as moléculas giram, mas não oscilam.

•55 Um certo gás ocupa um volume de 4,3 L a uma pressão de 1,2 atm e uma temperatura de 310 K. O gás é comprimido adiabaticamente para um volume de 0,76 L. Determine (a) a pressão final e (b) a temperatura final, supondo que o gás é ideal e que $\gamma = 1,4$.

•56 Suponha que 1,00 L de um gás com $\gamma = 1,30$, inicialmente a 273 K e 1,00 atm, é comprimido adiabaticamente, de forma brusca, para metade do volume inicial. Determine (a) a pressão final e (b) a temperatura final. (c) Se, em seguida, o gás é resfriado para 273 K à pressão constante, qual é o volume final?

••57 O volume de uma amostra de um gás ideal é reduzido adiabaticamente de 200 L para 74,3 L. A pressão e temperatura iniciais são 1,00 atm e 300 K. A pressão final é 4,00 atm. (a) O gás é monoatômico, diatômico ou poliatômico? (b) Qual é a temperatura final? (c) Quantos mols do gás existem na amostra?

••58 *Abrindo uma garrafa de champanha.* Em uma garrafa de champanha, o bolsão de gás (dióxido de carbono, principalmente) que fica entre o líquido e a rolha está a uma pressão $p_i = 5,00$ atm. Quando a rolha é removida da garrafa, o gás sofre uma expansão adiabática até que sua pressão se torne igual à pressão ambiente, 1,00 atm. Suponha que a razão entre os calores específicos molares é $\gamma = 4/3$. Se a temperatura inicial do gás é $T_i = 5,00$°C, qual é a temperatura do gás no fim da expansão adiabática?

••59 A Fig. 19-26 mostra duas trajetórias que podem ser seguidas por um gás de um ponto inicial i até um ponto final f. A trajetória 1 consiste em uma expansão isotérmica (o módulo do trabalho é 50 J), uma expansão adiabática (o módulo de trabalho é 40 J), uma compressão isotérmica (o módulo do trabalho é 30 J) e uma compressão adiabática (o módulo do trabalho é 25 J). Qual é a variação da energia interna do gás quando vai do ponto i ao ponto f seguindo a trajetória 2?

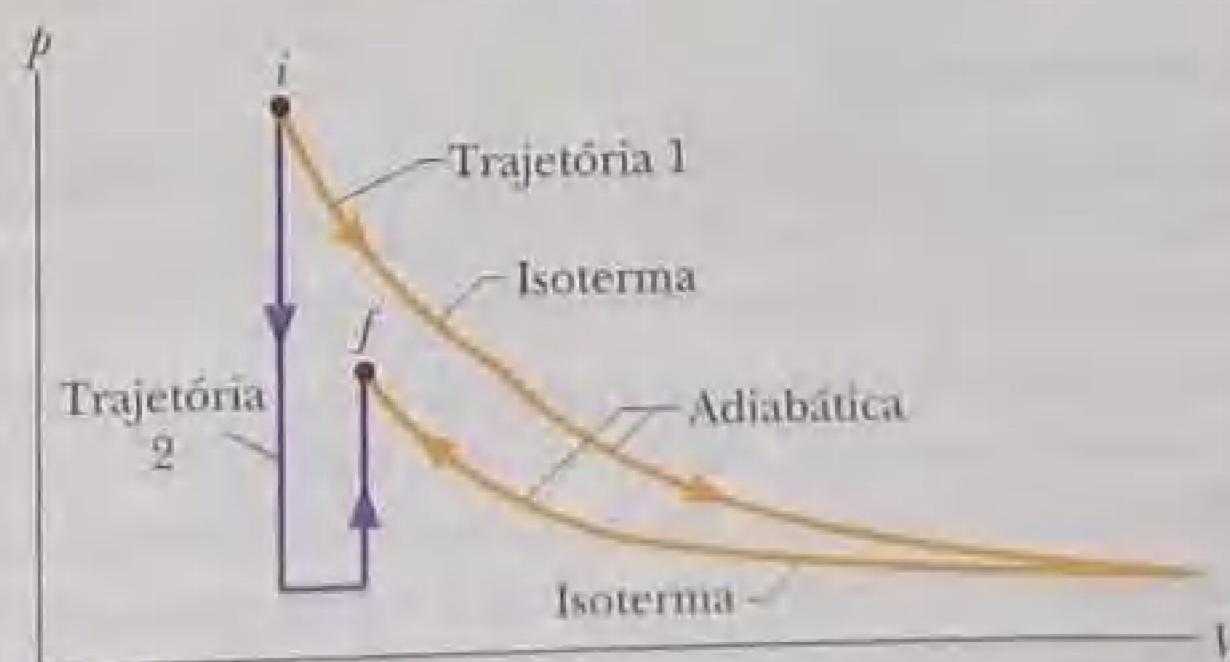


Figura 19-26 Problema 59.

••60 *Vento adiabático.* Normalmente, o vento nas Montanhas Rochosas é de oeste para leste. Ao subir a encosta ocidental

das montanhas, o ar esfria e perde boa parte da umidade. Ao descer a encosta oriental, o aumento da pressão com a diminuição da altitude faz a temperatura do ar aumentar. Esse fenômeno, conhecido como vento *chinook*, pode aumentar rapidamente a temperatura do ar na base das montanhas. Suponha que a pressão p do ar varia com a altitude y de acordo com a equação $p = p_0e^{-ay}$, onde $p_0 = 1,00$ atm e $a = 1,16 \times 10^{-4}$ m^{-1}. Suponha também que a razão entre os calores específicos molares é $\gamma = 4/3$. Uma certa massa de ar, a uma temperatura inicial de –5,00°C, desce adiabaticamente de $y_1 = 4267$ m para $y = 1567$ m. Qual é a temperatura do ar após a descida?

••61 Um gás pode ser expandido de um estado inicial i para um estado final f ao longo da trajetória 1 ou da trajetória 2 de um diagrama p-V. A trajetória 1 é composta de três etapas: uma expansão isotérmica (o módulo do trabalho é 40 J), uma expansão adiabática (o módulo do trabalho é 20 J) e outra expansão isotérmica (o módulo do trabalho é 30 J). A trajetória 2 é composta de duas etapas: uma redução da pressão a volume constante e uma expansão à pressão constante. Qual é a variação da energia interna do gás ao longo da trajetória 2?

•••62 Um gás ideal diatômico, com rotação, mas sem oscilações, sofre uma compressão adiabática. A pressão e volume iniciais são 1,20 atm e 0,200 m³. A pressão final é 2,40 atm. Qual é o trabalho realizado pelo gás?

•••63 A Fig. 19-27 mostra o ciclo a que é submetido 1,00 mol de um gás ideal monoatômico. As temperaturas são $T_1 = 300$ K, $T_2 = 600$ K e $T_3 = 455$ K. Determine (a) o calor trocado Q, (b) a variação de energia interna ΔE_{int} e (c) o trabalho realizado W para a trajetória 1 → 2. Determine (d) Q, (e) ΔE_{int} e (f) W para a trajetória 2 → 3. Determine (g) Q, (h) ΔE_{int} e (i) W para a trajetória 3 → 1. Determine (j) Q, (k) ΔE_{int} e (l) W para o ciclo completo. A pressão inicial no ponto 1 é 1,00 atm (= 1,013 × 10⁵ Pa). Determine (m) o volume e (n) a pressão no ponto 2 e (o) o volume e (p) a pressão no ponto 3.

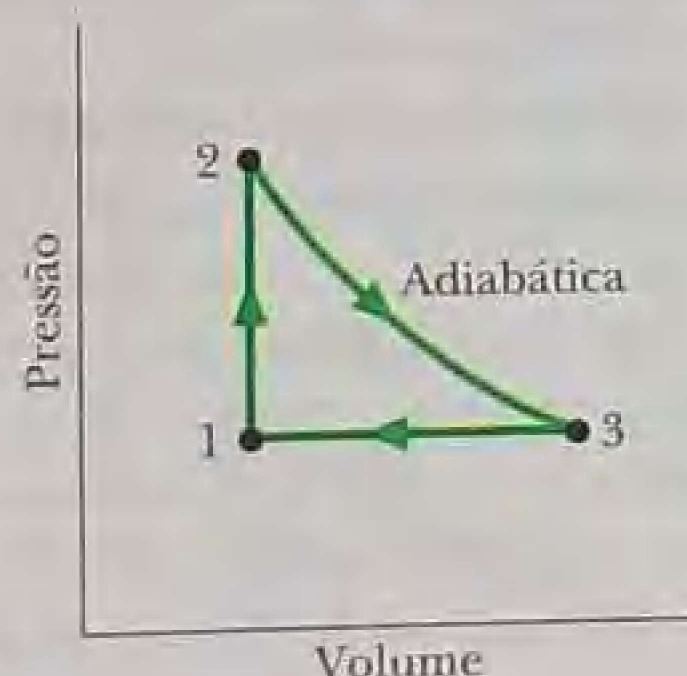


Figura 19-27 Problema 63.

Problemas Adicionais

64 Calcule o trabalho realizado por um agente externo durante uma compressão isotérmica de 1,00 mol de oxigênio de um volume de 22,4 L a 0°C e 1,00 atm para um volume de 16,8 L.

65 Um gás ideal sofre uma compressão adiabática de $p = 1,0$ atm, $V = 1,0 \times 10^6$ L, $T = 0,0$°C para $p = 1,0 \times 10^5$ atm, $V = 1,0 \times 10^3$ L. (a) O gás é monoatômico, diatômico ou poliatômico? (b) Qual é a temperatura final? (c) Quantos mols do gás estão presentes? Qual é a energia cinética de translação por mol (d) antes e (e) depois da compressão? (f) Qual é a razão entre os quadrados das velocidades médias quadráticas antes e após a compressão?

66 Uma amostra de um gás ideal contém 1,50 mol de moléculas diatômicas que giram, mas não oscilam. O diâmetro das moléculas é 250 pm. O gás sofre uma expansão a uma pressão constante de 1,50 × 10⁵ Pa, com uma transferência de 200 J na forma de calor. Qual é a variação do livre caminho médio das moléculas?

67 Um gás ideal monoatômico tem inicialmente uma temperatura de 330 K e uma pressão de 6,00 atm. O gás se expande de um volume de 500 cm³ para um volume de 1500 cm³. Determine (a) a pressão final e (b) o trabalho realizado pelo gás se a expansão é isotérmica. Determine (c) a pressão final e (d) o trabalho realizado pelo gás se a expansão é adiabática.

68 Em uma nuvem de gás interestelar a 50,0 K, a pressão é 1,00 × 10⁻⁸ Pa. Supondo que os diâmetros das moléculas presentes na nuvem são todos iguais a 20,0 nm, qual é o livre caminho médio das moléculas?

69 O invólucro e a cesta de um balão de ar quente têm um peso total de 2,45 kN e o invólucro tem uma capacidade (volume) de 2,18 × 10³ m³. Qual deve ser a temperatura do ar no interior do invólucro, quando este está totalmente inflado, para que o balão tenha uma *capacidade de levantamento* (força) de 2,67 kN (além do peso do balão)? Suponha que o ar ambiente, a 20,0°C, tem um peso específico de 11,9 N/m³, uma massa molecular de 0,028 kg/mol e está a uma pressão de 1,0 atm.

70 Um gás ideal, a uma temperatura inicial T_1 e com um volume inicial de 2,0 m³, sofre uma expansão adiabática para um volume de 4,0 m³, depois uma expansão isotérmica para um volume de 10 m³ e, finalmente, uma compressão adiabática de volta para T_1. Qual é o volume final?

71 A temperatura de 2,00 mol de um gás ideal monoatômico sofre um aumento de 15,0 K em um processo adiabático. Qual é (a) o trabalho W realizado pelo gás, (b) o calor Q transferido, (c) a variação ΔE_{int} da energia interna do gás e (d) a variação ΔK da energia cinética média por átomo?

72 Em que temperatura os átomos de hélio têm a mesma velocidade média quadrática que as moléculas de hidrogênio a 20,0°C? (As massas molares são dadas na Tabela 19-1.)

73 Com que frequência as moléculas de oxigênio (O_2) colidem à temperatura de 400 K e a uma pressão de 2,00 atm? Suponha que as moléculas têm 290 pm de diâmetro e que o oxigênio se comporta como um gás ideal.

74 (a) Qual é o número de moléculas por metro cúbico no ar a 20°C e a uma pressão de 1,0 atm (= 1,01 × 10⁵ Pa)? (b) Qual é a massa de 1,0 m³ desse ar? Suponha que 75% das moléculas são de nitrogênio (N_2) e 25% são de oxigênio (O_2).

75 A temperatura de 3,00 mols de um gás com $C_V = 6,00$ cal/mol · K é aumentada de 50,0 K. Se o processo é conduzido a *volume constante*, qual é (a) o calor Q transferido, (b) o trabalho W realizado pelo gás, (c) a variação ΔE_{int} da energia interna do gás e (d) a variação ΔK da energia cinética de translação? Se o processo é conduzido à *pressão constante*, qual é (e) Q, (f) W, (g) ΔE_{int} e (h) ΔK? Se o processo é *adiabático*, qual é (i) Q, (j) W, (k) ΔE_{int} e (l) ΔK?

76 Durante uma compressão a pressão constante de 250 Pa, o volume de um gás ideal diminui de 0,80 m³ para 0,20 m³. A temperatura inicial é 360 K e o gás perde 210 J na forma de calor. Qual é (a) a variação da energia interna do gás e (b) a temperatura final do gás?

77 A Fig. 19-28 mostra a distribuição hipotética de velocidades das partículas de um certo gás: $P(v) = Cv^2$ para $0 < v \le v_0$ e $P(v) = 0$ para $v > v_0$. Determine (a) uma expressão para C em ter-

mos de v_0, (b) a velocidade média das partículas e (c) a velocidade média quadrática das partículas.

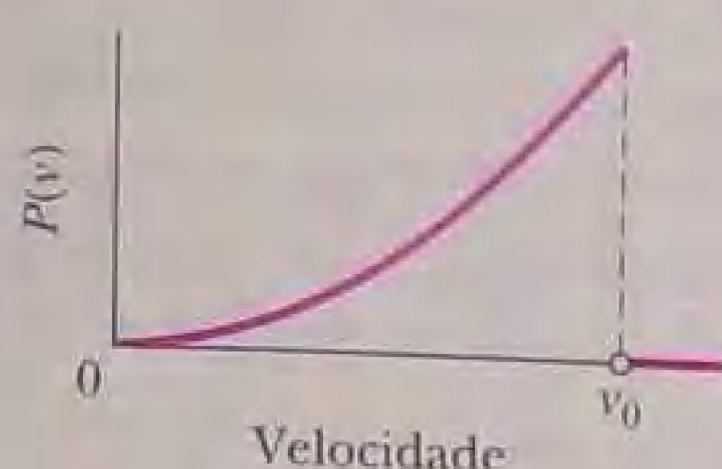


Figura 19-28 Problema 77.

78 (a) Um gás ideal, inicialmente à pressão p_0, sofre uma expansão livre até que o volume seja 3,00 vezes maior que o volume inicial. Qual é a razão entre a nova pressão e p_0? (b) Em seguida, o gás sofre uma lenta compressão adiabática até o volume inicial. A pressão após a compressão é $(3{,}00)^{1/3}p_0$. O gás é monoatômico, diatômico ou poliatômico? (c) qual é a razão entre a energia cinética média por molécula no estado final e no estado inicial?

79 Um gás ideal sofre uma compressão isotérmica de um volume inicial de 4,00 m³ para um volume final de 3,00 m³. Existem 3,50 mols do gás e a temperatura do gás é 10,0°C. (a) Qual é o trabalho realizado pelo gás? (b) Qual é a energia trocada na forma de calor entre o gás e o ambiente?

80 Uma amostra de oxigênio (O_2) a 273 K e 1,0 atm está confinada em um recipiente cúbico com 10 cm de aresta. Calcule $\Delta U_g/K_{méd}$, onde ΔU_g é a variação da energia potencial gravitacional de uma molécula de oxigênio que cai de uma altura igual à altura da caixa e $K_{méd}$ é a energia cinética de translação média da molécula.

81 Um gás ideal é submetido a um ciclo completo em três etapas: expansão adiabática com um trabalho de 125 J, contração isotérmica a 325 K e aumento de pressão a volume constante. (a) Plote as três etapas em um diagrama p-V. (b) Qual é a quantidade de calor transferido na etapa 3? (c) O calor é absorvido ou cedido pelo gás?

82 (a) Qual é o volume ocupado por 1,00 mol de um gás ideal nas condições normais de temperatura e pressão (CNTP), ou seja, 1,00 atm ($= 1{,}01 \times 10^5$ Pa) e 273 K? (b) Mostre que o número de moléculas por metro cúbico nas CNTP é $2{,}69 \times 10^{25}$. (Esse número é chamado de *número de Loschmidt*.)

83 Uma amostra de um gás ideal sofre uma expansão de uma pressão e volume iniciais de 32 atm e 1,0 L para um volume final de 4,0 L. A temperatura inicial é 300 K. Se o gás é monoatômico e a expansão é isotérmica, qual é (a) a pressão final p_f, (b) a temperatura final T_f e (c) o trabalho W realizado pelo gás? Se o gás é monoatômico e a expansão é adiabática, qual é (d) p_f, (e) T_f e (f) W? Se o gás é diatômico e a expansão é adiabática, qual é (g) p_f, (h) T_f e (i) W?

84 Uma amostra com 3,00 mols de um gás ideal está inicialmente no estado 1 à pressão $p_1 = 20{,}0$ atm e volume $V_1 = 1500$ cm³. Primeiro, o gás é levado ao estado 2 com pressão $p_2 = 1{,}50p_1$ e volume $V_2 = 2{,}00V_1$. Em seguida, é levado ao estado 3 com pressão $p_3 = 2{,}00p_1$ e volume $V_3 = 0{,}500V_1$. Qual é a temperatura do gás (a) no estado 1 e (b) no estado 2? (c) Qual é a variação da energia interna do gás do estado 1 para o estado 3?

85 Um tanque de aço contém 300 g de amônia (NH_3) a uma pressão de $1{,}35 \times 10^6$ Pa e uma temperatura de 77°C. (a) Qual é o volume do tanque em litros? (b) Mais tarde, a temperatura é 22°C e a pressão é $8{,}7 \times 10^5$ Pa. Quantos gramas do gás vazaram do tanque?

86 Em um processo industrial, o volume de 25,0 mols de um gás ideal monoatômico é reduzido, a uma taxa uniforme, de 0,616 m³ para 0,308 m³ em 2,00 h, enquanto a temperatura é aumentada, a uma taxa uniforme, de 27,0°C para 450°C. Durante o processo, o gás passa por estados de equilíbrio termodinâmico. Qual é (a) o trabalho cumulativo realizado sobre o gás, (b) a energia cumulativa absorvida pelo gás como calor e (c) o calor específico molar para o processo? (*Sugestão:* para resolver a integral envolvida no cálculo do trabalho, use a relação

$$\int \frac{a + bx}{A + Bx}\,dx = \frac{bx}{B} + \frac{aB - bA}{B^2}\ln(A + Bx),$$

uma integral indefinida.) Suponha que o processo seja substituído por um processo de duas etapas que leva ao mesmo estado final. Na etapa 1, o volume do gás é reduzido à temperatura constante; na etapa 2, a temperatura é aumentada a volume constante. Para esse processo, qual é (d) o trabalho cumulativo realizado sobre o gás, (e) a energia cumulativa absorvida pelo gás como calor e (f) o calor específico molar para o processo?

87 A Fig. 19-29 mostra um ciclo composto de cinco trajetórias: AB é isotérmica a 300 K, BC é adiabática com um trabalho de 5,0 J, CD é a uma pressão constante de 5 atm, DE é isotérmica e EA é adiabática com uma variação da energia interna de 8,0 J. Qual é a variação da energia interna do gás ao longo da trajetória CD?

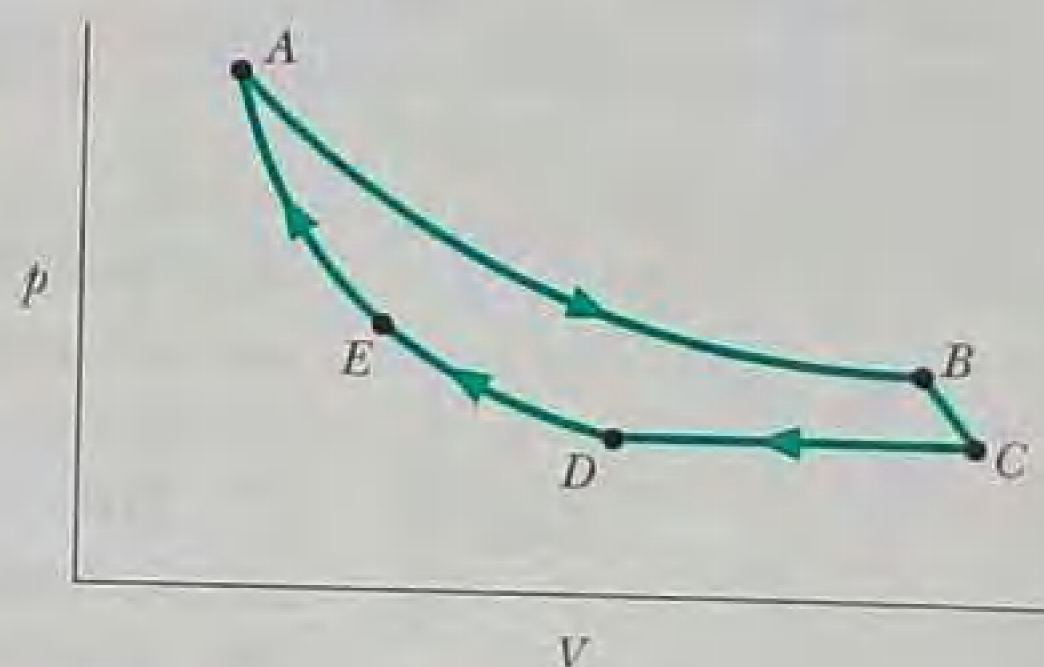


Figura 19-29 Problema 87.

88 Um gás ideal inicialmente a 300 K é comprimido a uma pressão constante de 25 N/m² de um volume de 3,0 m³ para um volume de 1,8 m³. No processo, 75 J são perdidos pelo gás na forma de calor. Qual é (a) a variação da energia interna do gás e (b) a temperatura final do gás?

CAPÍTULO

20 ENTROPIA E A SEGUNDA LEI DA TERMODINÂMICA

20-1 O QUE É FÍSICA?

O tempo possui um sentido, o sentido no qual envelhecemos. Estamos acostumados com processos unidirecionais, ou seja, processos que ocorrem apenas em uma certa ordem (a ordem correta) e nunca na ordem inversa (a ordem errada). Um ovo cai no chão e se quebra, uma pizza é assada, um carro bate em um poste, as ondas transformam pedras em areia ... todos esses processos unidirecionais são **irreversíveis**, ou seja, não podem ser desfeitos através de pequenas mudanças no ambiente.

Um dos objetivos da física é compreender por que o tempo possui um sentido e por que os processos unidirecionais são irreversíveis. Embora essa física possa parecer distante das situações do nosso dia a dia, tem na verdade uma relação direta com o funcionamento de qualquer motor, como o motor de um automóvel, porque é ela que determina qual é a eficiência máxima com a qual um motor pode funcionar.

O segredo para compreender a razão pela qual os processos unidirecionais não podem ser invertidos envolve uma grandeza conhecida como *entropia*.

20-2 Processos Irreversíveis e Entropia

A associação entre o caráter unidirecional dos processos e a irreversibilidade é tão universal que a aceitamos como perfeitamente natural. Se um desses processos ocorresse *espontaneamente* no sentido inverso, ficaríamos perplexos. Entretanto, *nenhum* desses processos "no sentido errado" violaria a lei da conservação da energia.

Por exemplo: você ficaria muito surpreso se colocasse as mãos em torno de uma xícara de café quente e suas mãos ficassem mais frias e a xícara mais quente. Este é obviamente o sentido errado para a transferência de energia, mas a energia total do sistema fechado (*mãos + xícara de café*) seria a mesma se o processo acontecesse no sentido correto. Para dar outro exemplo, se você estourasse um balão de hélio, levaria um susto se, algum tempo depois, as moléculas de hélio se reunissem para assumir a forma original do balão. Este é obviamente o sentido errado para as moléculas se moverem, mas a energia total do sistema fechado (*moléculas + aposento*) seria a mesma para uma transformação no sentido errado e no sentido correto.

Assim, não são as mudanças de energia em um sistema fechado que determinam o sentido dos processos irreversíveis; o sentido é determinado por outra propriedade, que será discutida neste capítulo: a *variação de entropia* ΔS do sistema. A variação de entropia de um sistema será definida na próxima seção, mas podemos enunciar desde já a propriedade mais importante da entropia, frequentemente chamada de *postulado da entropia*:

> Todos os processos irreversíveis em um sistema *fechado* são acompanhados por *aumento* da entropia.

A entropia é diferente da energia no sentido de que a entropia *não obedece* a uma lei de conservação. A *energia* de um sistema fechado é conservada; permanece constante. Nos processos irreversíveis, a *entropia* de um sistema fechado aumenta. Graças a essa propriedade, a variação de entropia é às vezes chamada de "seta do tempo". Assim, por exemplo, associamos a explosão de um milho de pipoca ao sentido positivo do tempo e ao aumento da entropia. O sentido negativo do tempo (um filme passado ao contrário) corresponde a uma pipoca se transformando em milho. Como esse processo resultaria em uma diminuição de entropia, ele jamais acontece.

Existem duas formas equivalentes de definir a variação da entropia de um sistema: (1) em termos da temperatura do sistema e da energia que o sistema ganha ou perde na forma de calor e (2) contando as diferentes formas de distribuir os átomos ou moléculas que compõem o sistema. A primeira abordagem é usada na próxima seção e a segunda na Seção 20-8.

20-3 Variação de Entropia

Vamos definir o que significa uma *variação de entropia* analisando novamente um processo que foi descrito nas Seções 18-11 e 19-11: a expansão livre de um gás ideal. A Fig. 20-1*a* mostra o gás no estado de equilíbrio inicial *i*, confinado por uma válvula fechada ao lado esquerdo de um recipiente termicamente isolado. Quando abrimos a válvula, o gás se expande para ocupar todo o recipiente, atingindo, depois de um certo tempo, o estado de equilíbrio final *f* mostrado na Fig. 20-1*b*. Trata-se de um processo irreversível; as moléculas do gás jamais voltam a ocupar apenas o lado esquerdo do recipiente.

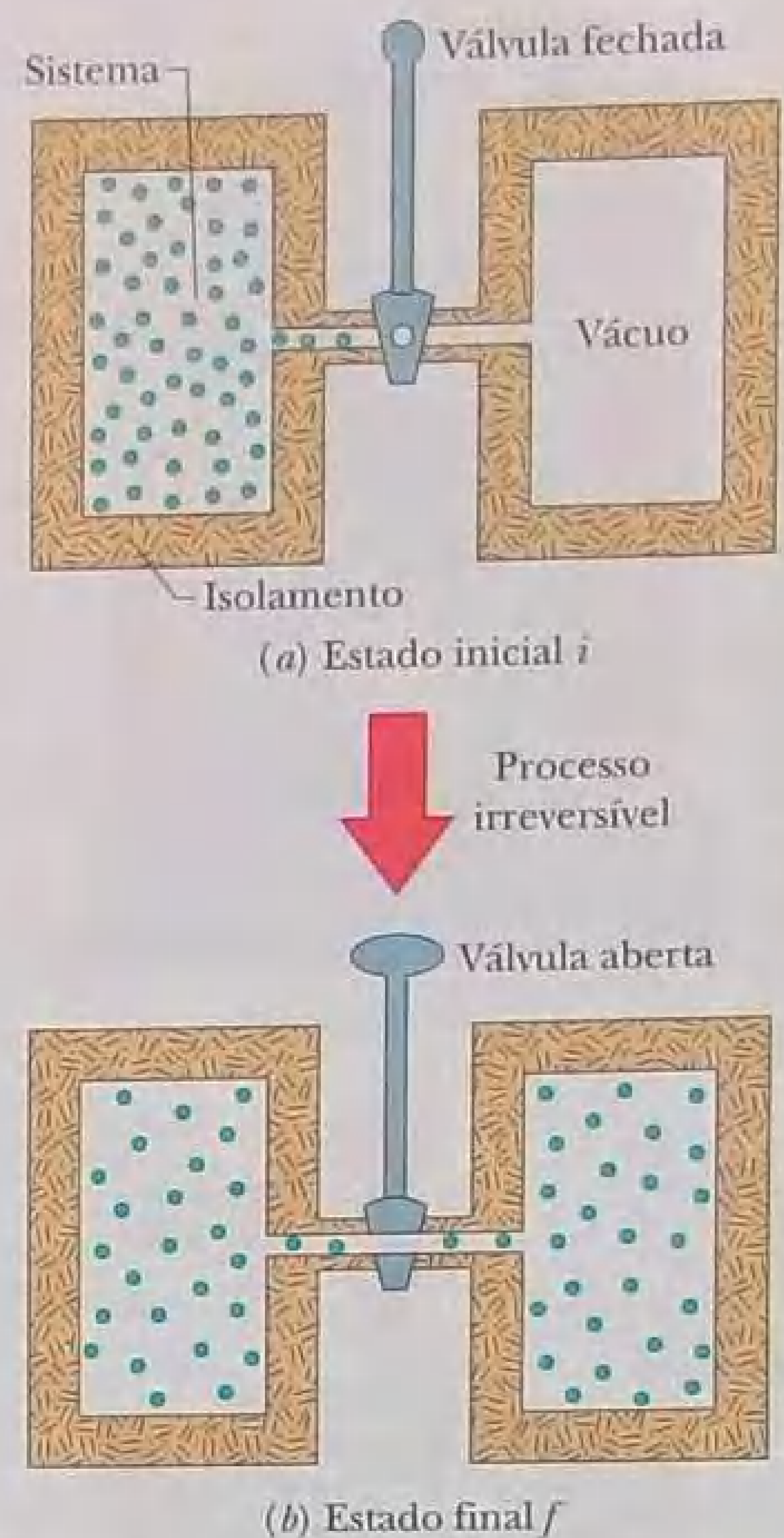


Figura 20-1 A expansão livre de um gás ideal. (*a*) O gás está confinado no lado esquerdo de um recipiente isolado por uma válvula fechada. (*b*) Quando a válvula é aberta, o gás ocupa todo o recipiente. O processo é irreversível, ou seja, não ocorre no sentido inverso, com o gás espontaneamente voltando a se concentrar do lado esquerdo do recipiente.

O diagrama *p-V* do processo, na Fig. 20-2, mostra a pressão e o volume do gás no estado inicial *i* e no estado final *f*. A pressão e o volume são *propriedades de estado*, ou seja, propriedades que dependem apenas do estado do gás e não da forma como chegou a esse estado. Outras propriedades de estado são a temperatura e a energia. Vamos agora supor que o gás possui mais uma propriedade de estado: a entropia. Além disso, vamos definir a **variação de entropia** $S_f - S_i$ do sistema durante um processo que leva o sistema de um estado inicial *i* para um estado final *f* através da equação

$$\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T} \quad \text{(definição de variação de entropia)}, \qquad (20\text{-}1)$$

em que Q é a energia absorvida ou cedida como calor pelo sistema durante o processo e T é a temperatura do sistema em kelvins. Assim, a variação de entropia depende não só da energia transferida na forma de calor, mas também da temperatura na qual a transferência ocorre. Como T é sempre positiva, o sinal de ΔS é igual ao sinal de Q. De acordo com a Eq. 20-1, a unidade de entropia e de variação de entropia no SI é o joule por kelvin.

Existe, porém, um problema para aplicar a Eq. 20-1 à expansão livre da Fig. 20-1. Enquanto o gás se expande para ocupar todo o recipiente, a pressão, a temperatura e o volume do gás flutuam de forma imprevisível. Em outras palavras, as três variáveis não passam por uma série de valores de equilíbrio bem definidos nos estágios intermediários da mudança do sistema do estado de equilíbrio inicial *i* para o estado de equilíbrio final *f*. Assim, não podemos plotar uma trajetória pressão–volume da expansão livre no diagrama *p-V* da Fig. 20-2 e, mais importante, não podemos escrever uma relação entre Q e T que nos permita realizar a integração da Eq. 20-1.

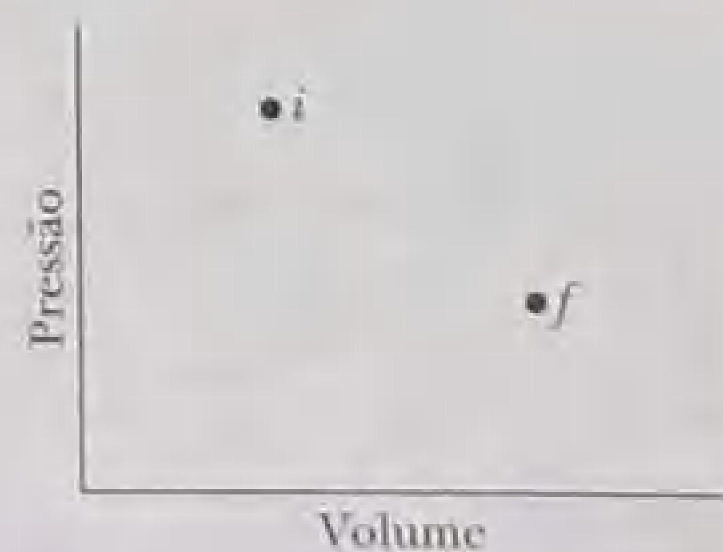


Figura 20-2 Diagrama *p-V* mostrando o estado inicial *i* e o estado final *f* da expansão livre da Fig. 20-1. Os estados intermediários do gás não podem ser mostrados porque não são estados de equilíbrio.

Entretanto, se a entropia é realmente uma propriedade de estado, a diferença de entropia entre os estados *i* e *f depende apenas desses estados* e não da forma como o sistema passa de um estado para o outro. Suponha que a expansão livre irreversível da Fig. 20-1 seja substituída por um processo *reversível* que liga os mesmos estados *i* e *f*. No caso de um processo reversível, podemos plotar uma trajetória no diagrama

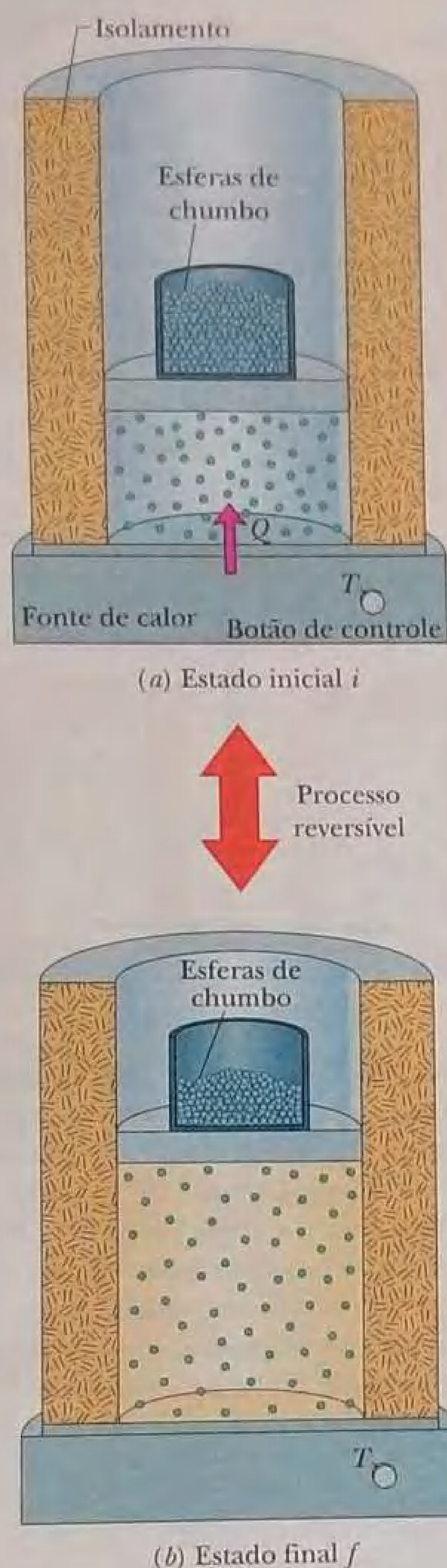


Figura 20-3 Expansão isotérmica de um gás ideal, realizada de forma reversível. O gás possui o mesmo estado inicial i e o mesmo estado final f que no processo irreversível das Figs. 20-1 e 20-2.

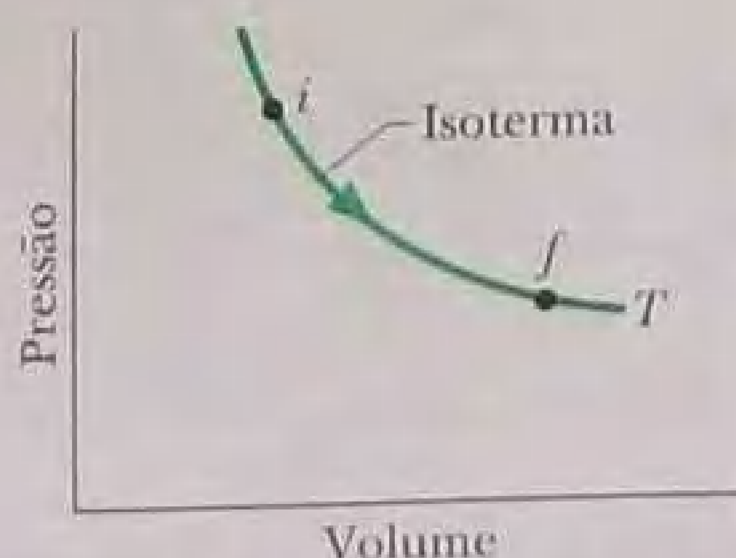


Figura 20-4 Diagrama p-V para a expansão isotérmica reversível da Fig. 20-3. Os estados intermediários, que são agora estados de equilíbrio, estão indicados por uma curva.

p-V e podemos encontrar uma relação entre Q e T que nos permita usar a Eq. 20-1 para obter a variação de entropia.

Vimos na Seção 19-11 que a temperatura de um gás ideal não varia durante uma expansão livre: $T_i = T_f = T$. Assim, os pontos i e f da Fig. 20-2 devem estar sobre a mesma isoterma. Um processo substituto conveniente é, portanto, uma expansão isotérmica reversível do estado i para o estado f, que ocorre *ao longo* dessa isoterma. Além disso, como T é constante durante uma expansão isotérmica reversível, a integral da Eq. 20-1 fica muito mais fácil de calcular.

A Fig. 20-3 mostra como é possível produzir essa expansão isotérmica reversível. Confinamos o gás a um cilindro isolado que se encontra em contato com uma fonte de calor mantida à temperatura T. Começamos colocando sobre o êmbolo uma quantidade de esferas de chumbo suficiente para que a pressão e o volume do gás correspondam ao estado inicial i da Fig. 20-1a. Em seguida, removemos lentamente as esferas (uma por uma) até que a pressão e o volume do gás correspondam ao estado final f da Fig. 20-1b. A temperatura do gás não varia porque o gás permanece em contato com a fonte de calor durante todo o processo.

A expansão isotérmica reversível da Fig. 20-3 é fisicamente bem diferente da expansão livre irreversível da Fig. 20-1. Entretanto, *os dois processos possuem o mesmo estado inicial e o mesmo estado final e, portanto, a variação de entropia é a mesma nos dois casos.* Como o chumbo é removido lentamente, os estados intermediários do gás são estados de equilíbrio e podem ser representados em um diagrama p-V (Fig. 20-4).

Para aplicar a Eq. 20-1 à expansão isotérmica, colocamos a temperatura constante T do lado de fora da integral, obtendo

$$\Delta S = S_f - S_i = \frac{1}{T}\int_i^f dQ.$$

Como $\int dQ = Q$, onde Q é a energia total transferida como calor durante o processo, temos:

$$\Delta S = S_f - S_i = \frac{Q}{T} \quad \text{(variação de entropia, processo isotérmico).} \tag{20-2}$$

Para manter constante a temperatura T do gás durante a expansão isotérmica da Fig. 20-3, uma quantidade de calor Q deve ser transferida *da* fonte de calor *para* o gás. Assim, Q é positivo e a entropia do gás *aumenta* durante o processo isotérmico e durante a expansão livre da Fig. 20-1.

Em resumo:

> Para determinar a variação de entropia em um processo irreversível que ocorre em um sistema *fechado*, substituímos esse processo por qualquer outro processo reversível que ligue os mesmos estados inicial e final e calculamos a variação de entropia para esse processo reversível usando a Eq. 20-1.

Quando a variação de temperatura ΔT de um sistema é pequena em relação à temperatura (em kelvins) antes e depois do processo, a variação de entropia é dada aproximadamente por

$$\Delta S = S_f - S_i \approx \frac{Q}{T_{\text{méd}}}, \tag{20-3}$$

em que $T_{\text{méd}}$ é a temperatura média do sistema, em kelvins, durante o processo.

TESTE 1

Aquece-se água em um fogão. Ordene as variações de entropia da água quando a temperatura aumenta (a) de 20°C para 30°C, (b) de 30°C para 35°C e (c) de 80°C para 85°C, em ordem decrescente.

A Entropia como uma Função de Estado

Supusemos que a entropia, como a pressão, a energia e a temperatura, é uma propriedade do estado de um sistema e não depende do modo como esse estado é atingido. O fato de que a entropia é realmente uma *função de estado* (como costumam ser chamadas as propriedades de estado) pode ser demonstrado apenas através de experimentos. Entretanto, podemos provar que é uma função de estado para o caso especial, muito importante, no qual um gás ideal passa por um processo reversível.

Para que o processo seja reversível, devemos executá-lo lentamente, em uma série de pequenos passos, com o gás em um estado de equilíbrio ao final de cada passo. Para cada pequeno passo, a energia absorvida ou cedida pelo gás na forma de calor é dQ, o trabalho realizado pelo gás é dW e a variação da energia interna é dE_{int}. Essas variações estão relacionadas pela primeira lei da termodinâmica na forma diferencial (Eq. 18-27):

$$dE_{int} = dQ - dW.$$

Como os passos são reversíveis, com o gás em estados de equilíbrio, podemos usar a Eq. 18-24 para substituir dW por $p\,dV$ e a Eq. 19-45 para substituir dE_{int} por $nC_V\,dT$. Fazendo essas substituições e explicitando dQ, obtemos

$$dQ = p\,dV + nC_V\,dT.$$

Usando a lei dos gases ideais, podemos substituir p nessa equação por nRT/V. Dividindo ambos os membros da equação resultante por T, obtemos:

$$\frac{dQ}{T} = nR\frac{dV}{V} + nC_V\frac{dT}{T}.$$

Em seguida, integramos os termos dessa equação de um estado inicial arbitrário i para um estado final arbitrário f, o que nos dá

$$\int_i^f \frac{dQ}{T} = \int_i^f nR\frac{dV}{V} + \int_i^f nC_V\frac{dT}{T}.$$

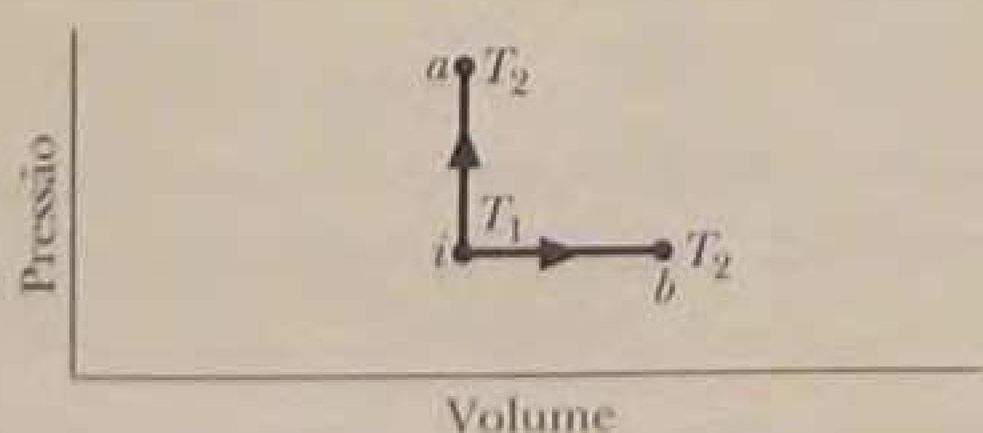
De acordo com a Eq. 20-1, o lado esquerdo desta equação é a variação de entropia ΔS $(= S_f - S_i)$. Fazendo essa substituição e integrando os termos do lado direito, obtemos

$$\Delta S = S_f - S_i = nR\ln\frac{V_f}{V_i} + nC_V\ln\frac{T_f}{T_i}. \quad (20\text{-}4)$$

Observe que não foi preciso especificar um processo reversível em particular para realizar a integração. Assim, o resultado da integração deve ser válido para qualquer processo reversível que leve o gás do estado i para o estado j. Isso mostra que a variação de entropia ΔS entre os estados inicial e final de um gás ideal depende apenas das propriedades do estado inicial (V_i e T_i) e do estado final (V_f e T_f); ΔS não depende do modo como o gás passa do estado inicial para o estado final.

TESTE 2

Um gás ideal está à temperatura T_1 no estado inicial i mostrado no diagrama p-V. O gás está a uma temperatura maior T_2 nos estados finais a e b, que pode atingir seguindo as trajetórias mostradas na figura. A variação de entropia na trajetória do estado i para o estado a é maior, ou menor ou igual à variação de entropia na trajetória do estado i para o estado b?



Exemplo

Variação de entropia de dois blocos de cobre para atingirem o equilíbrio térmico

A Fig. 20-5*a* mostra dois blocos de cobre iguais de massa $m = 1{,}5$ kg: o bloco *E*, a uma temperatura $T_{iE} = 60°C$ e o bloco *D*, a uma temperatura $T_{iD} = 20°C$. Os blocos estão em uma caixa isolada termicamente e separados por uma divisória isolante. Quando removemos a divisória, os blocos atingem, depois de algum tempo, uma temperatura de equilíbrio $T_f = 40°C$ (Fig. 20-5*b*). Qual é a variação da entropia do sistema dos dois blocos durante esse processo irreversível? O calor específico do cobre é 386 J/kg · K.

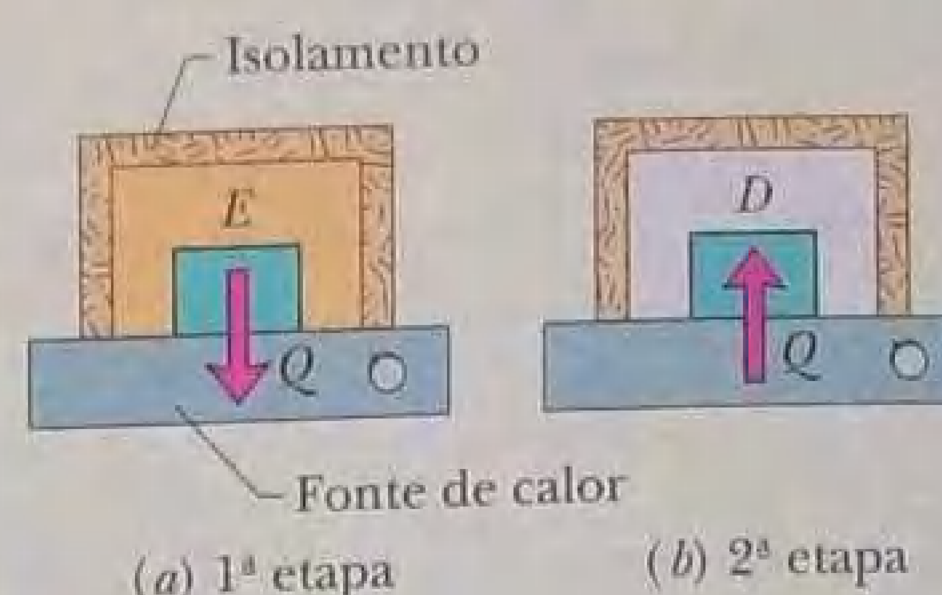


Figura 20-6 Os blocos da Fig. 20-5 podem passar do estado inicial para o estado final de uma forma reversível se usarmos uma fonte de temperatura controlável (*a*) para extrair calor reversivelmente do bloco *E* e (*b*) para adicionar calor reversivelmente ao bloco *D*.

IDEIA-CHAVE

Para calcular a variação de entropia, devemos encontrar um processo reversível que leve o sistema do estado inicial da Fig. 20-5*a* para o estado final da Fig. 20-5*b*. Podemos calcular a variação de entropia ΔS_{rev} do processo reversível usando a Eq. 20-1; a variação de entropia para o processo irreversível é igual a ΔS_{rev}.

Cálculos Para o processo reversível, precisamos de uma fonte de calor cuja temperatura possa ser variada lentamente (girando um botão, digamos). Os blocos podem ser levados ao estado final em duas etapas, ilustradas na Fig. 20-6.

1.ª etapa: Com a temperatura da fonte de calor em 60°C, colocamos o bloco *E* na fonte. (Como o bloco e a fonte estão à mesma temperatura, já se encontram em equilíbrio térmico.) Em seguida, diminuímos lentamente a temperatura da fonte e do bloco para 40°C. Para cada variação de temperatura dT do bloco, uma energia dQ é transferida na forma de calor do bloco para a fonte. Usando a Eq. 18-14, podemos escrever a energia transferida como $dQ = mc\,dT$, onde c é o calor específico do cobre. De acordo com a Eq. 20-1, a variação de entropia ΔS_E do bloco *E* durante a variação total de temperatura, da temperatura inicial T_{iE} (= 60°C = 333 K) para a temperatura final T_f (= 40°C = 313 K) é

$$\Delta S_E = \int_i^f \frac{dQ}{T} = \int_{T_{iE}}^{T_f} \frac{mc\,dT}{T} = mc \int_{T_{iE}}^{T_f} \frac{dT}{T}$$
$$= mc \ln \frac{T_f}{T_{iE}}.$$

Substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$\Delta S_E = (1{,}5\text{ kg})(386\text{ J/kg}\cdot\text{K}) \ln \frac{313\text{ K}}{333\text{ K}}$$
$$= -35{,}86\text{ J/K}.$$

2.ª etapa: Com a temperatura da fonte agora ajustada para 20°C, colocamos o bloco *D* na fonte e aumentamos lentamente a temperatura da fonte e do bloco para 40°C. Com o mesmo raciocínio usado para determinar ΔS_E, é fácil mostrar que a variação de entropia ΔS_D do bloco *D* durante o processo é

$$\Delta S_D = (1{,}5\text{ kg})(386\text{ J/kg}\cdot\text{K}) \ln \frac{313\text{ K}}{293\text{ K}}$$
$$= +38{,}23\text{ J/K}.$$

A variação de entropia ΔS_{rev} do sistema de dois blocos durante esse processo reversível hipotético de duas etapas é, portanto,

$$\Delta S_{rev} = \Delta S_E + \Delta S_D$$
$$= -35{,}86\text{ J/K} + 38{,}23\text{ J/K} = 2{,}4\text{ J/K}.$$

Assim, a variação de entropia ΔS_{irrev} para o sistema dos dois blocos durante o processo irreversível real é

$$\Delta S_{irrev} = \Delta S_{rev} = 2{,}4\text{ J/K}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Este resultado é positivo, o que está de acordo com o postulado da entropia da Seção 20-2.

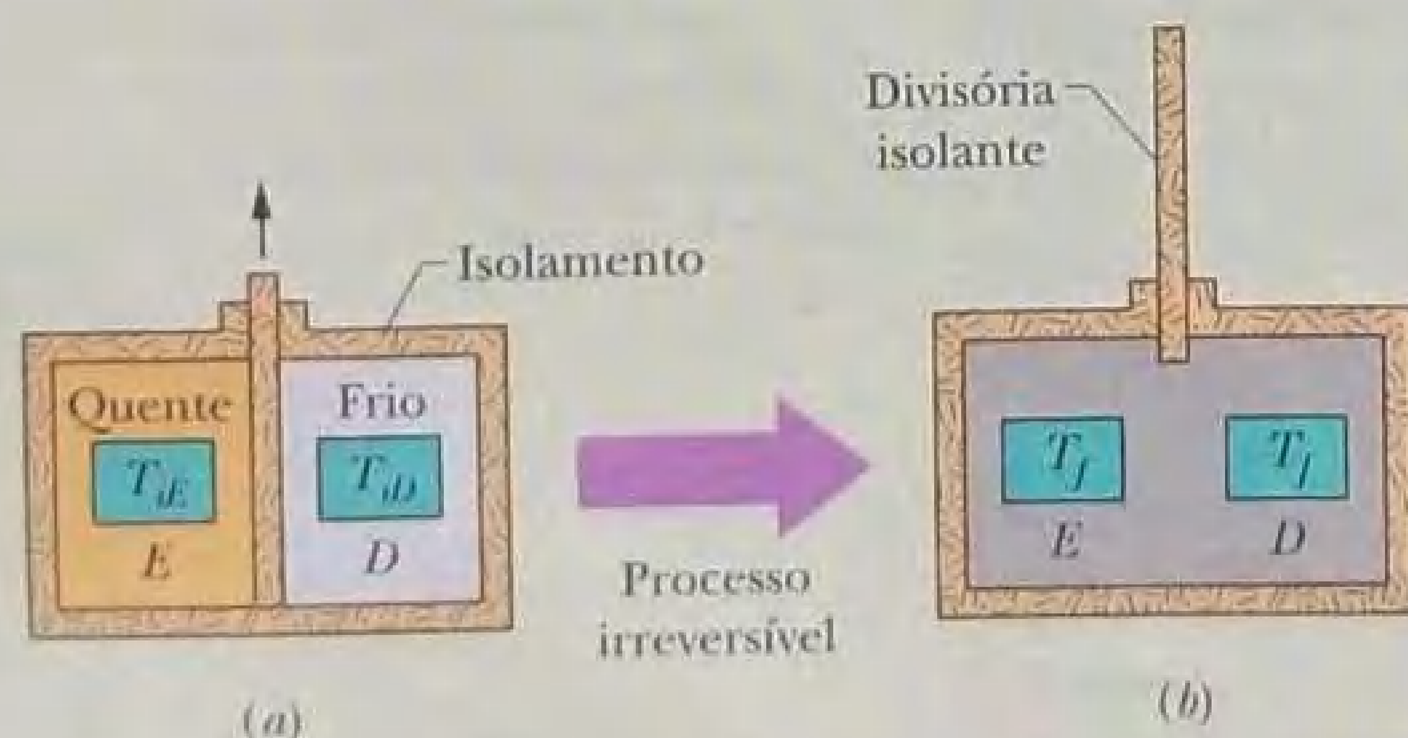


Figura 20-5 (*a*) No estado inicial, dois blocos *E* e *D*, iguais a não ser por estarem a temperaturas diferentes, se encontram em uma caixa isolada e estão separados por uma divisória isolante. (*b*) Quando a divisória é removida, os blocos trocam energia na forma de calor e chegam a um estado final no qual ambos estão à mesma temperatura T_f.

Exemplo

Variação de entropia na expansão livre de um gás

Suponha que 1,0 mol de nitrogênio esteja confinado no lado esquerdo do recipiente da Fig. 20-1*a*. A válvula é aberta e o volume do gás dobra. Qual é a variação de entropia do gás neste processo irreversível? Trate o gás como ideal.

IDEIAS-CHAVE

(1) Podemos determinar a variação de entropia para o processo irreversível calculando-a para um processo reversível que resulte na mesma variação de volume. (2) A temperatura do gás não varia durante a expansão livre. Assim, o processo reversível deve ser uma expansão isotérmica como a das Figs. 20-3 e 20-4.

Cálculos De acordo com a Tabela 19-4, a energia Q adicionada ao gás na forma de calor quando ele se expande isotermicamente à temperatura T de um volume inicial V_i para um volume final V_f é

$$Q = nRT \ln \frac{V_f}{V_i},$$

em que n é o número de mols de gás presentes. De acordo com a Eq. 20-2, a variação de entropia durante esse processo reversível é

$$\Delta S_{rev} = \frac{Q}{T} = \frac{nRT \ln(V_f/V_i)}{T} = nR \ln \frac{V_f}{V_i}.$$

Fazendo $n = 1{,}00$ mol e $V_f/V_i = 2$, obtemos

$$\Delta S_{rev} = nR \ln \frac{V_f}{V_i} = (1{,}00 \text{ mol})(8{,}31 \text{ J/mol}\cdot\text{K})(\ln 2) = +5{,}76 \text{ J/K}.$$

Assim, a variação de entropia para a expansão livre (e para todos os outros processos que ligam os estados inicial e final mostrados na Fig. 20-2) é

$$\Delta S_{irrev} = \Delta S_{rev} = +5{,}76 \text{ J/K}. \quad \text{(Resposta)}$$

Como o valor de ΔS é positivo, a entropia aumenta, o que está de acordo com o postulado da entropia da Seção 20-2.

20-4 A Segunda Lei da Termodinâmica

Aqui está um enigma. Quando fazemos com que o processo reversível da Fig. 20-3 ocorra da situação representada na Fig. 20-3*a* para a situação representada na Fig. 20-3*b*, a variação de entropia do gás (que tomamos como nosso sistema) é positiva. Entretanto, como o processo é reversível, podemos fazê-lo ocorrer no sentido inverso, acrescentando lentamente esferas de chumbo ao êmbolo da Fig. 20-3*b* até que o volume original do gás seja restabelecido. Nesse processo inverso, deve-se extrair energia *do gás*, na forma de calor, para evitar que a temperatura aumente. Assim, Q é negativo, e, de acordo com a Eq. 20-2, a entropia do gás deve diminuir.

Essa diminuição da entropia do gás não viola o postulado da entropia da Seção 20-2, segundo o qual a entropia sempre aumenta? Não, porque o postulado é válido somente para processos *irreversíveis* que ocorrem em sistemas fechados. O processo que acabamos de descrever não satisfaz esses requisitos. O processo *não é* irreversível e (como energia é transferida do gás para a fonte na forma de calor) o sistema (que é apenas o gás) *não é* fechado.

Por outro lado, quando consideramos a fonte como parte do sistema, passamos a ter um sistema fechado. Vamos examinar a variação na entropia do sistema ampliado *gás + fonte de calor* no processo que o leva de (*b*) para (*a*) na Fig. 20-3. Nesse processo reversível, energia é transferida, na forma de calor, do gás para a fonte, ou seja, de uma parte do sistema ampliado para outra. Seja $|Q|$ o valor absoluto desse calor. Usando a Eq. 20-2, podemos calcular separadamente as variações de entropia do gás (que perde $|Q|$) e para a fonte (que ganha $|Q|$). Obtemos

$$\Delta S_{gás} = -\frac{|Q|}{T}$$

e

$$\Delta S_{res} = +\frac{|Q|}{T}.$$

A variação da entropia do sistema fechado é a soma dos dois valores, ou seja, zero.

Com esse resultado, podemos modificar o postulado da entropia da Seção 20-2 para que se aplique tanto a processos reversíveis como a processos irreversíveis:

> Se um processo ocorre em um sistema *fechado*, a entropia do sistema aumenta se o processo for irreversível e permanece constante se o processo for reversível.

Embora a entropia possa diminuir em uma parte de um sistema fechado, sempre existe um aumento igual ou maior em outra parte do sistema, de modo que a entropia do sistema como um todo jamais diminui. Essa afirmação constitui uma das formas de enunciar a **segunda lei da termodinâmica** e pode ser representada matematicamente pela equação

$$\Delta S \geq 0 \quad \text{(segunda lei da termodinâmica)}, \tag{20-5}$$

onde o sinal de desigualdade se aplica a processos irreversíveis e o sinal de igualdade a processos reversíveis. A Eq. 20-5 se aplica apenas a sistemas fechados.

No mundo real, todos os processos são irreversíveis em maior ou menor grau por causa do atrito, da turbulência e de outros fatores, de modo que a entropia de sistemas reais fechados submetidos a processos reais sempre aumenta. Processos nos quais a entropia do sistema permanece constante são sempre aproximações.

Força Associada à Entropia

Para compreendermos por que a borracha resiste a ser esticada, vamos escrever a primeira lei da termodinâmica

$$dE = dQ - dW$$

para um elástico que sofre um pequeno aumento de comprimento dx quando o esticamos com as mãos. A força exercida pelo elástico tem módulo F, aponta no sentido contrário ao do aumento de comprimento e realiza um trabalho $dW = -F\,dx$ durante o aumento de comprimento dx. De acordo com a Eq. 20-2 ($\Delta S = Q/T$), pequenas variações de Q e S à temperatura constante estão relacionadas através da equação $dS = dQ/T$ ou $dQ = T\,dS$. Assim, podemos escrever a primeira lei na forma

$$dE = T\,dS + F\,dx. \tag{20-6}$$

Se a dilatação total do elástico não for muito grande, podemos supor que a variação dE da energia interna do elástico é praticamente nula. Fazendo $dE = 0$ na Eq. 20-6, obtemos a seguinte expressão para a força exercida pelo elástico:

$$F = -T\frac{dS}{dx}. \tag{20-7}$$

De acordo com a Eq. 20-7, F é proporcional à taxa dS/dx com a qual a entropia do elástico varia quando o comprimento do elástico sofre uma pequena variação dx. Assim, podemos *sentir* o efeito da entropia nas mãos ao esticar um elástico.

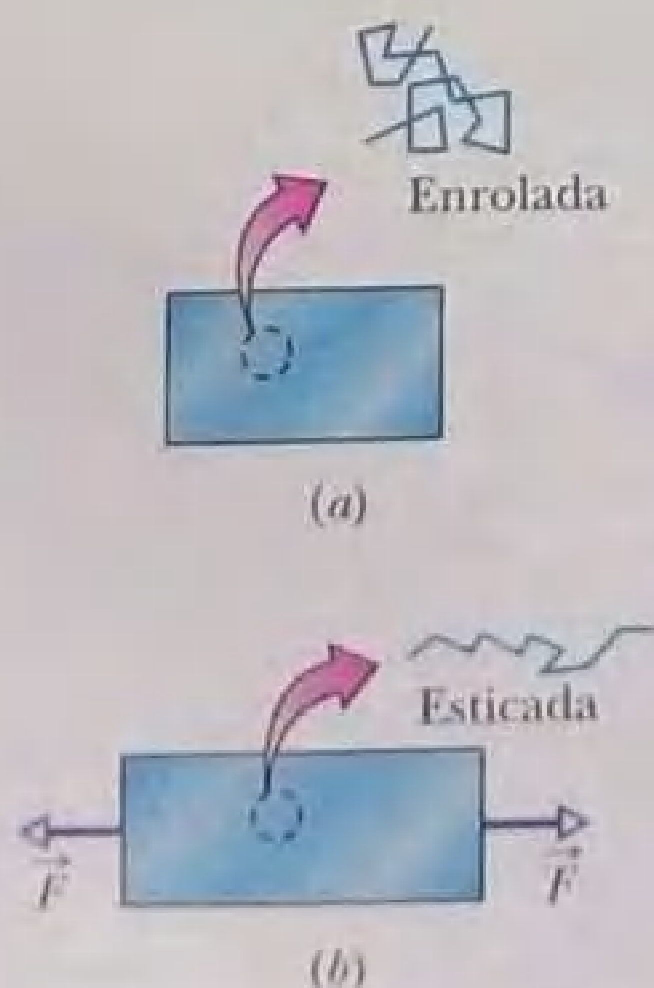


Figura 20-7 Um pedaço de elástico (*a*) relaxado e (*b*) distendido, mostrando uma cadeia polimérica do material (*a*) enrolada e (*b*) esticada.

Para entender por que existe uma relação entre força e entropia, considere um modelo simples da borracha de que é feito o elástico. A borracha é formada por longas cadeias poliméricas com ligações cruzadas, que lembram ziguezagues tridimensionais (Fig. 20-7). Quando o elástico se encontra no estado relaxado, essas cadeias estão parcialmente enroladas e orientadas aleatoriamente. Devido ao alto grau de desordem das moléculas, esse estado possui um alto valor de entropia. Quando esticamos um elástico de borracha, desenrolamos muitas moléculas e as alinhamos na direção do alongamento. Como o alinhamento diminui a desordem, a entropia do elástico esticado é menor. Isso significa que a derivada dS/dx da Eq. 20-7 é negativa, já que a entropia diminui quando dx aumenta. Assim, a força que sentimos ao esticar um elástico se deve à tendência das moléculas de voltar ao estado menos ordenado, para o qual a entropia é maior.

20-5 Entropia no Mundo Real: Máquinas Térmicas

Uma **máquina térmica** é um dispositivo que extrai energia do ambiente na forma de calor e realiza um trabalho útil. Toda máquina térmica utiliza uma *substância de trabalho*. Nas máquinas a vapor, a substância de trabalho é a água, tanto na forma líquida quanto na forma de vapor. Nos motores de automóvel, a substância de trabalho é uma mistura de gasolina e ar. Para que uma máquina térmica realize trabalho de forma contínua, a substância de trabalho deve operar em um *ciclo*, ou seja, deve passar por uma série fechada de processos termodinâmicos, chamados de *tempos*, voltando repetidamente a cada estado do ciclo. Vamos ver o que as leis da termodinâmica podem nos dizer a respeito do funcionamento das máquinas térmicas.

A Máquina de Carnot

Como vimos, é possível aprender muita coisa a respeito dos gases reais analisando um gás ideal, que obedece à equação $pV = nRT$. Embora não existam gases ideais na natureza, o comportamento de qualquer gás real se aproxima do comportamento de um gás ideal para pequenas concentrações de moléculas. Analogamente, podemos compreender melhor o funcionamento das máquinas térmicas estudando o comportamento de uma **máquina térmica ideal**.

Em uma máquina térmica ideal, todos os processos são reversíveis e as transferências de energia são realizadas sem as perdas causadas por efeitos como o atrito e a turbulência.

Vamos examinar um tipo particular de máquina térmica ideal, chamada de **máquina de Carnot** em homenagem ao cientista e engenheiro francês N. L. Sadi Carnot, que a imaginou em 1824. De todas as máquinas térmicas, a máquina de Carnot é a que utiliza o calor com maior eficiência para realizar trabalho útil. Surpreendentemente, Carnot foi capaz de analisar o desempenho desse tipo de máquina antes que a primeira lei da termodinâmica e o conceito de entropia tivessem sido descobertos.

A Fig. 20-8 mostra, de forma esquemática, o funcionamento de uma máquina de Carnot. Em cada ciclo da máquina, a substância de trabalho absorve uma quantidade $|Q_Q|$ de calor de uma fonte de calor a uma temperatura constante T_Q e fornece uma quantidade $|Q_F|$ de calor a uma segunda fonte de calor a uma temperatura constante mais baixa T_F.

A Fig. 20-9 mostra um diagrama *p-V* do *ciclo de Carnot*, ou seja, o ciclo a que é submetida a substância de trabalho na máquina de Carnot. Como indicam as setas, o ciclo é percorrido no sentido horário. Imagine que a substância de trabalho é um gás, confinado em um cilindro feito de material isolante e com um êmbolo sub-

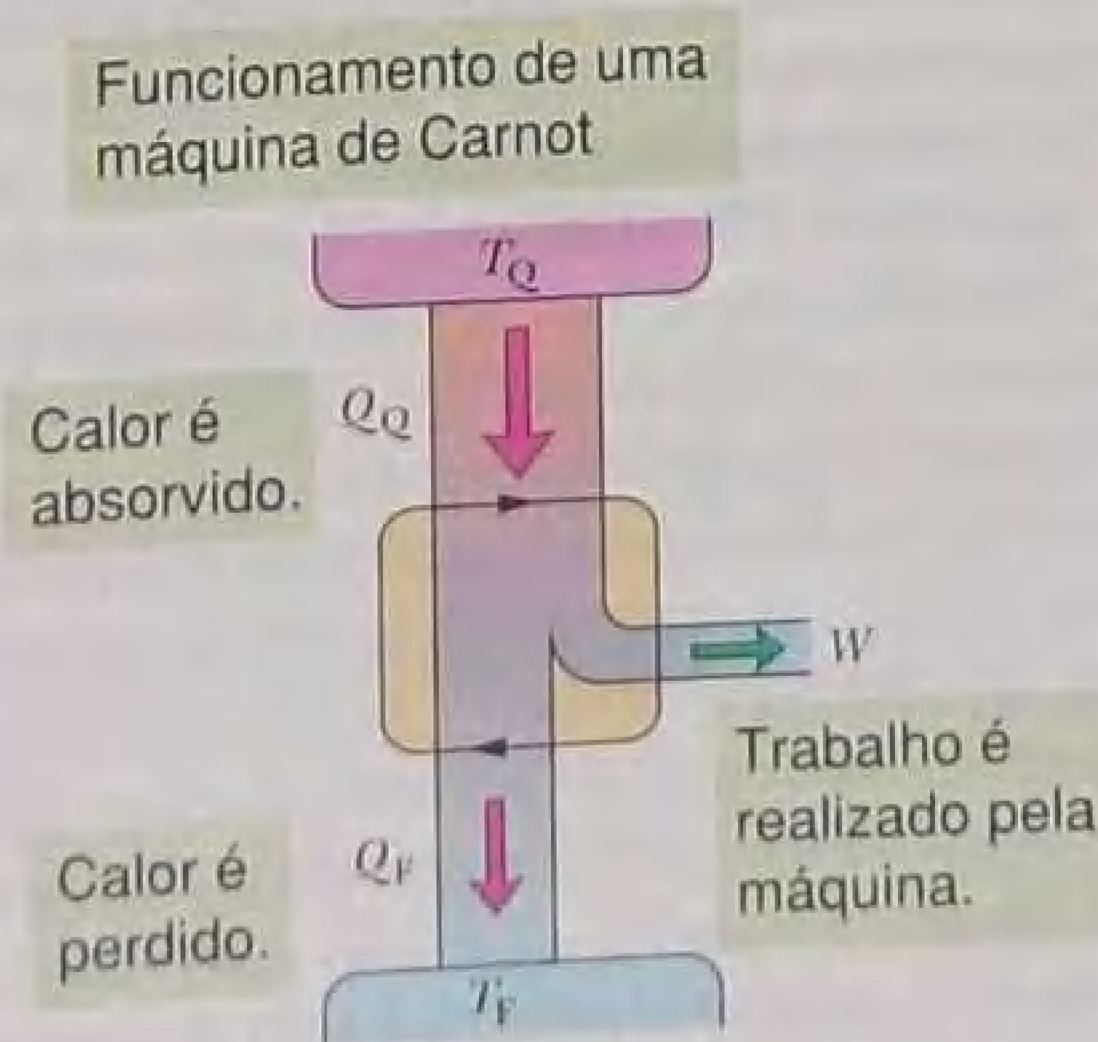
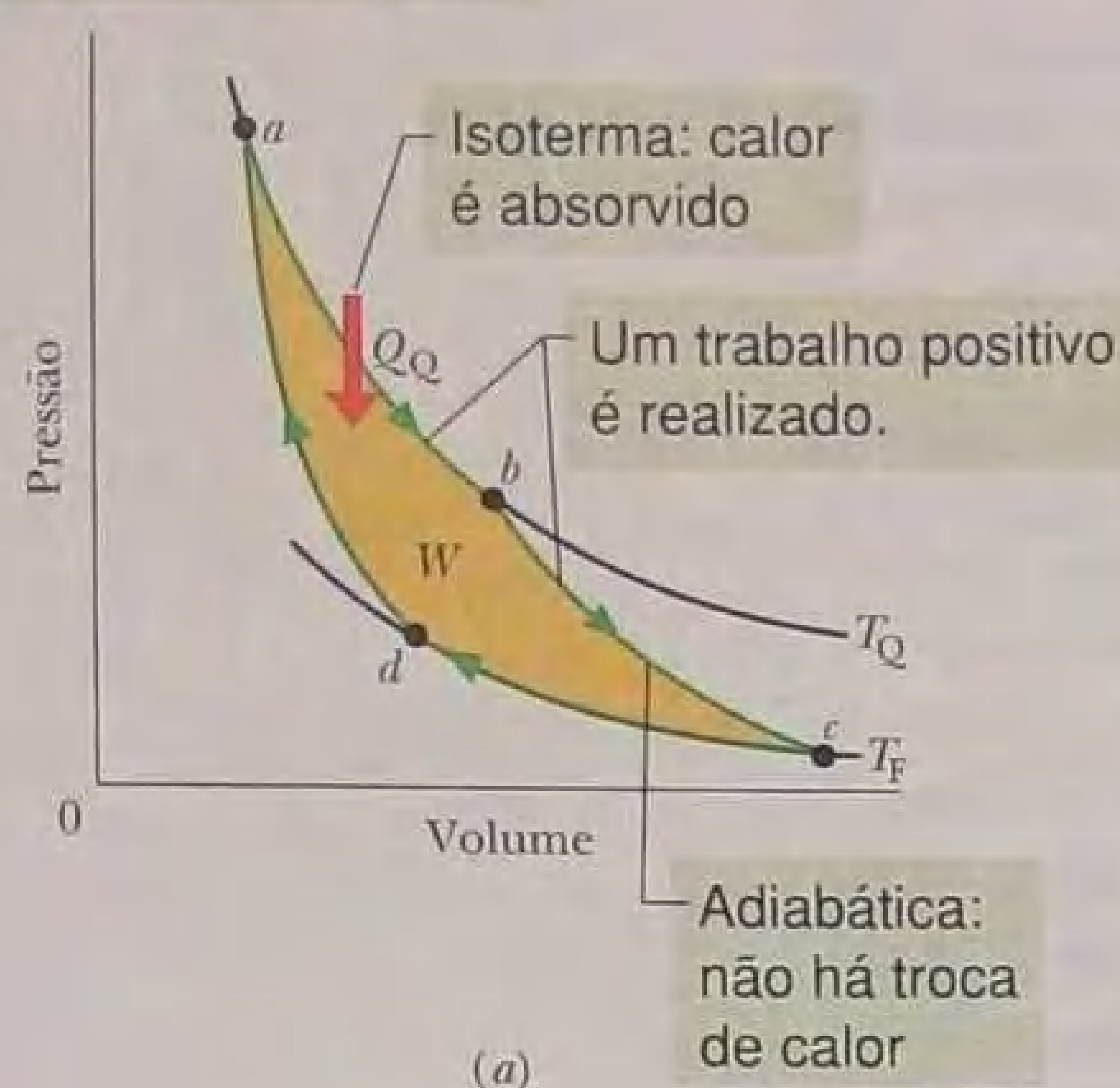


Figura 20-8 Os elementos de uma máquina de Carnot. As duas setas pretas horizontais no centro representam uma substância de trabalho operando ciclicamente, como em um diagrama *p-V*. Uma energia $|Q_Q|$ é transferida na forma de calor da fonte quente, que está a uma temperatura T_Q, para a substância de trabalho; uma energia $|Q_F|$ é transferida na forma de calor da substância de trabalho para a fonte fria, que está à temperatura T_F. Um trabalho W é realizado pela máquina térmica (na realidade, pela substância de trabalho) sobre o ambiente.



Tempos de uma máquina de Carnot



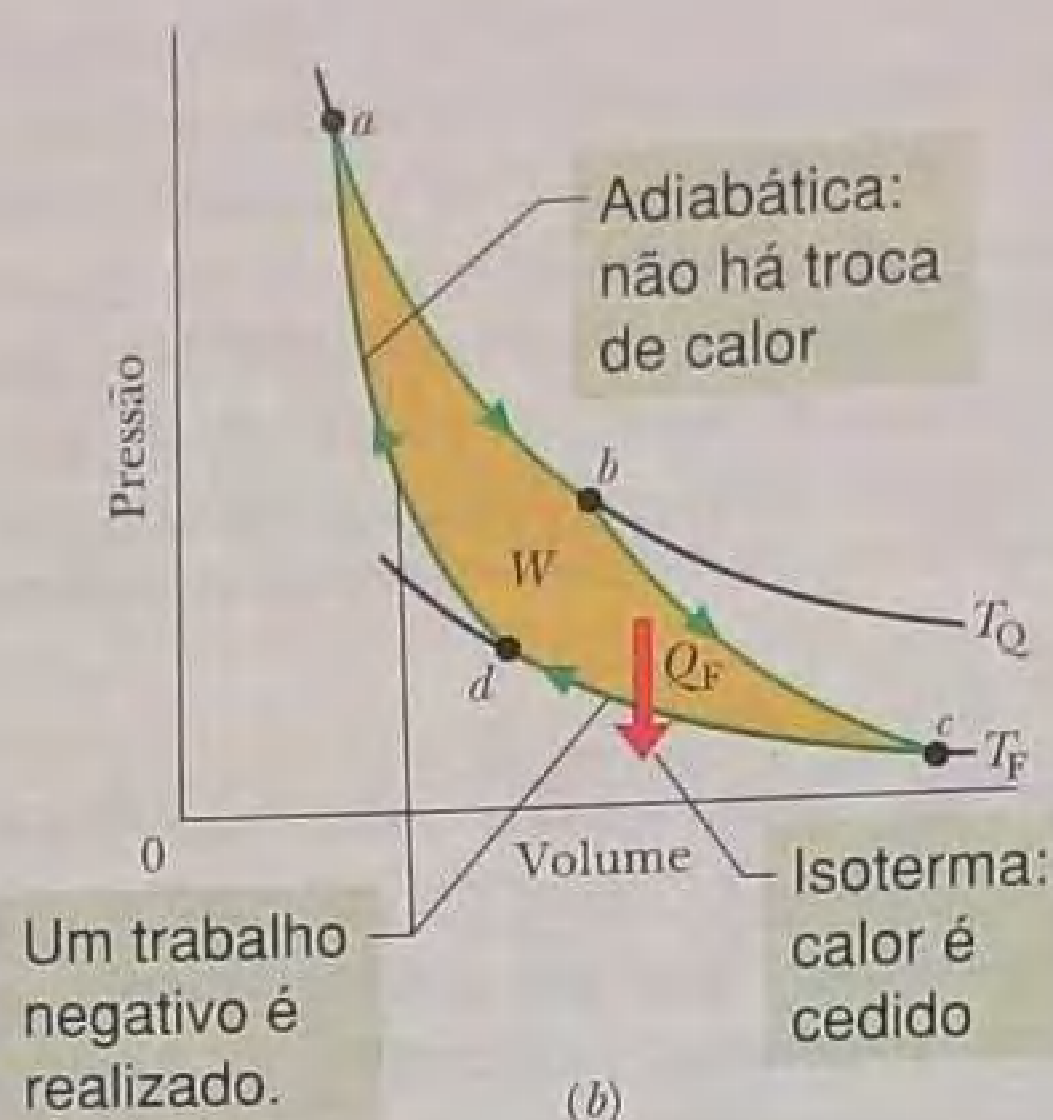


Figura 20-9 Diagrama pressão–volume do ciclo seguido pela substância de trabalho da máquina de Carnot da Fig. 20-8. O ciclo é formado por duas isotermas (*ab* e *cd*) e duas adiabáticas (*bc* e *da*). A área sombreada limitada pelo ciclo é igual ao trabalho W por ciclo realizado pela máquina de Carnot.

metido a um peso. O cilindro pode ser colocado entre duas fontes de calor, como na Fig. 20-6, ou sobre uma placa isolante. A Fig. 20-9*a* mostra que, quando colocamos o cilindro em contato com a fonte quente à temperatura T_Q, uma quantidade de calor $|Q_Q|$ é transferida *da* fonte quente *para* a substância de trabalho enquanto o gás sofre uma *expansão* isotérmica do volume V_a para o volume V_b. Analogamente, quando a substância de trabalho é posta em contato com a fonte fria, à temperatura T_F, uma quantidade de calor $|Q_F|$ é transferida *da* substância de trabalho *para* a fonte fria enquanto o gás sofre uma *compressão* isotérmica do volume V_c para o volume V_d (Fig. 20-9*b*).

Na máquina térmica da Fig. 20-8, supomos que as transferências de calor para a substância de trabalho ou para a fonte de calor ocorrem *apenas* durante os processos isotérmicos *ab* e *cd* da Fig. 20-9. Assim, os processos *bc* e *da* nessa figura, que ligam as isotermas correspondentes às temperaturas T_Q e T_F, devem ser processos adiabáticos (reversíveis), ou seja, processos nos quais nenhuma energia é transferida na forma de calor. Para isso, durante os processos *bc* e *da* o cilindro é colocado sobre uma placa isolante enquanto o volume da substância de trabalho varia.

Durante os processos *ab* e *bc* da Fig. 20-9*a*, a substância de trabalho está se expandindo, realizando trabalho positivo enquanto eleva o êmbolo e o peso sustentado pelo êmbolo. Esse trabalho é representado na Fig. 20-9*a* pela área sob a curva *abc*. Durante os processos *cd* e *da* (Fig. 20.9*b*), a substância de trabalho está sendo comprimida, o que significa que está realizando trabalho negativo sobre o ambiente ou, o que significa o mesmo, que o ambiente está realizando trabalho sobre a substância de trabalho enquanto o êmbolo desce. Esse trabalho é representado pela área sob a curva *cda*. O *trabalho líquido por ciclo*, que é representado por W nas Figs. 20-8 e 20-9, é a diferença entre as duas áreas e é uma grandeza positiva igual à área limitada pelo ciclo *abcda* da Fig. 20-9. Esse trabalho W é realizado sobre um objeto externo, como uma carga a ser levantada.

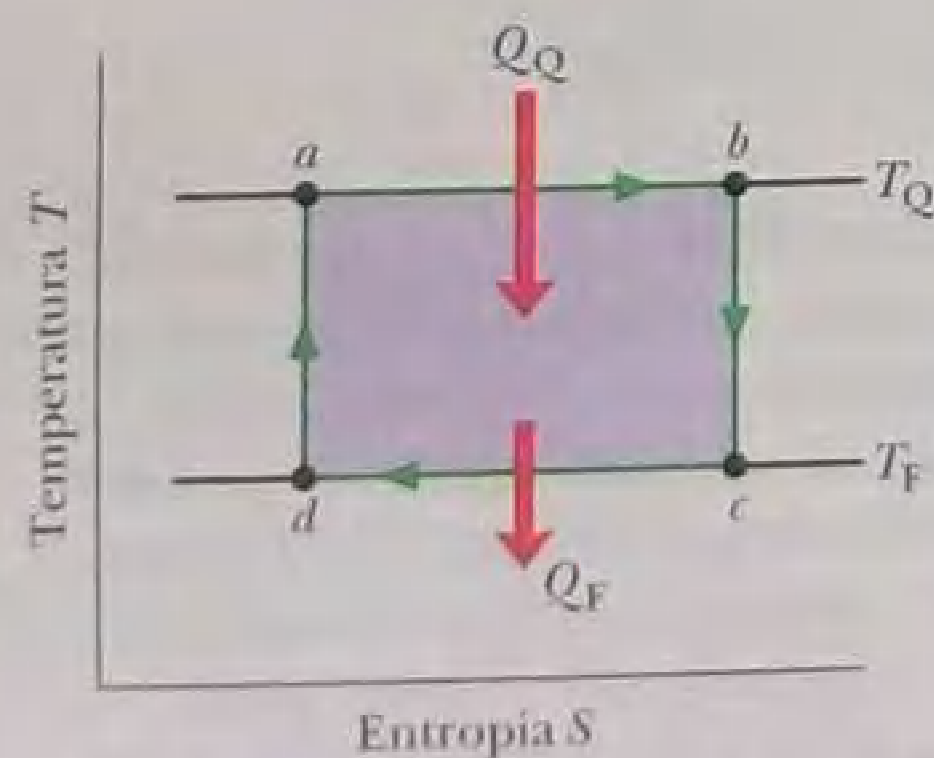


Figura 20-10 O ciclo de Carnot da Fig. 20-9 mostrado em um diagrama temperatura–entropia. Durante os processos *ab* e *cd*, a temperatura permanece constante. Durante os processos *bc* e *da*, a entropia permanece constante.

A Eq. 20-1 ($\Delta S = \int dQ/T$) nos diz que qualquer transferência de energia na forma de calor envolve uma variação de entropia. Para ilustrar as variações de entropia de uma máquina de Carnot, podemos plotar o ciclo de Carnot em um diagrama temperatura–entropia (T-S), como mostra a Fig. 20-10. Os pontos indicados pelas letras *a*, *b*, *c* e *d* na Fig. 20-10 correspondem aos pontos indicados pelas mesmas letras no diagrama p-V da Fig. 20-9. As duas retas horizontais na Fig. 20-10 correspondem aos dois processos isotérmicos do ciclo de Carnot (pois a temperatura é constante).

O processo *ab* é a expansão isotérmica do ciclo. Enquanto a substância de trabalho absorve (reversivelmente) um calor $|Q_Q|$ à temperatura constante T_Q durante a expansão, a entropia aumenta. Da mesma forma, durante a compressão isotérmica *cd*, a substância de trabalho perde (reversivelmente) um calor $|Q_F|$ à temperatura constante T_F e a entropia diminui.

As duas retas verticais da Fig. 20-10 correspondem aos dois processos adiabáticos do ciclo de Carnot. Como nenhum calor é transferido durante os dois processos, a entropia da substância de trabalho permanece constante.

O Trabalho Para calcular o trabalho realizado por uma máquina de Carnot durante um ciclo, vamos aplicar a Eq. 18-26, a primeira lei da termodinâmica ($\Delta E_{int} = Q - W$), à substância de trabalho. A substância deve retornar repetidamente a qualquer estado do ciclo escolhido arbitrariamente. Assim, se X representa qualquer propriedade de estado da substância de trabalho, como pressão, temperatura, volume, energia interna ou entropia, devemos ter $\Delta X = 0$ para o ciclo completo. Segue-se que $\Delta E_{int} = 0$ para um ciclo completo da substância de trabalho. Lembrando que Q na Eq. 18-26 é o calor *líquido* transferido por ciclo e W é o trabalho *líquido* resultante, podemos escrever a primeira lei da termodinâmica para o ciclo de Carnot na forma

$$W = |Q_Q| - |Q_F|. \tag{20-8}$$

Variações de Entropia Em uma máquina de Carnot existem *duas* (e apenas duas) transferências de energia reversíveis na forma de calor e, portanto, duas variações da entropia da substância de trabalho, uma à temperatura T_Q e outra à temperatura T_F. A variação líquida de entropia por ciclo é dada por

$$\Delta S = \Delta S_Q + \Delta S_F = \frac{|Q_Q|}{T_Q} - \frac{|Q_F|}{T_F}, \tag{20-9}$$

em que ΔS_Q é positiva, já que uma energia $|Q_Q|$ é *adicionada* à substância de trabalho na forma de calor (o que representa um aumento de entropia) e ΔS_F é negativa, pois uma energia $|Q_F|$ é *removida* da substância de trabalho na forma de calor (o que representa uma diminuição de entropia). Como a entropia é uma função de estado, devemos ter $\Delta S = 0$ para o ciclo completo. Fazendo $\Delta S = 0$ na Eq. 20-9, temos:

$$\frac{|Q_Q|}{T_Q} = \frac{|Q_F|}{T_F}. \tag{20-10}$$

Note que, como $T_Q > T_F$, temos $|Q_Q| > |Q_F|$, ou seja, mais energia é extraída na forma de calor da fonte quente do que fornecida à fonte fria.

Vamos agora usar as Eqs. 20-8 e 20-10 para deduzir uma expressão para a eficiência de uma máquina de Carnot.

Eficiência de uma Máquina de Carnot

No uso prático de qualquer máquina térmica, existe interesse em transformar em trabalho a maior parte possível da energia disponível Q_Q. O êxito nessa empreitada é medido através da chamada **eficiência térmica** (ε), definida como o trabalho que a máquina realiza por ciclo ("energia utilizada") dividido pela energia que recebe em forma de calor por ciclo ("energia adquirida"):

$$\varepsilon = \frac{\text{energia utilizada}}{\text{energia adquirida}} = \frac{|W|}{|Q_Q|} \quad \text{(eficiência, qualquer máquina térmica).} \tag{20-11}$$

No caso de uma máquina de Carnot, podemos substituir W pelo seu valor, dado pela Eq. 20-8, e escrever a Eq. 20-11 na forma

$$\varepsilon_C = \frac{|Q_Q| - |Q_F|}{Q_Q} = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_Q|}. \tag{20-12}$$

Combinando as Eqs. 20-12 e 20-10, obtemos

$$\varepsilon_C = 1 - \frac{T_F}{T_Q} \quad \text{(eficiência, máquina de Carnot).} \tag{20-13}$$

onde as temperaturas T_F e T_Q estão em kelvins. Como $T_F < T_Q$, a máquina de Carnot tem necessariamente uma eficiência térmica positiva e menor que a unidade, ou seja, menor que 100%. Este fato está ilustrado na Fig. 20-8, onde podemos ver que apenas parte da energia extraída como calor da fonte quente é usada para realizar trabalho; o calor que resta é transferido para a fonte fria. Mostraremos na Seção 20-7 que nenhuma máquina real pode ter uma eficiência térmica maior que a prevista pela Eq. 20-13.

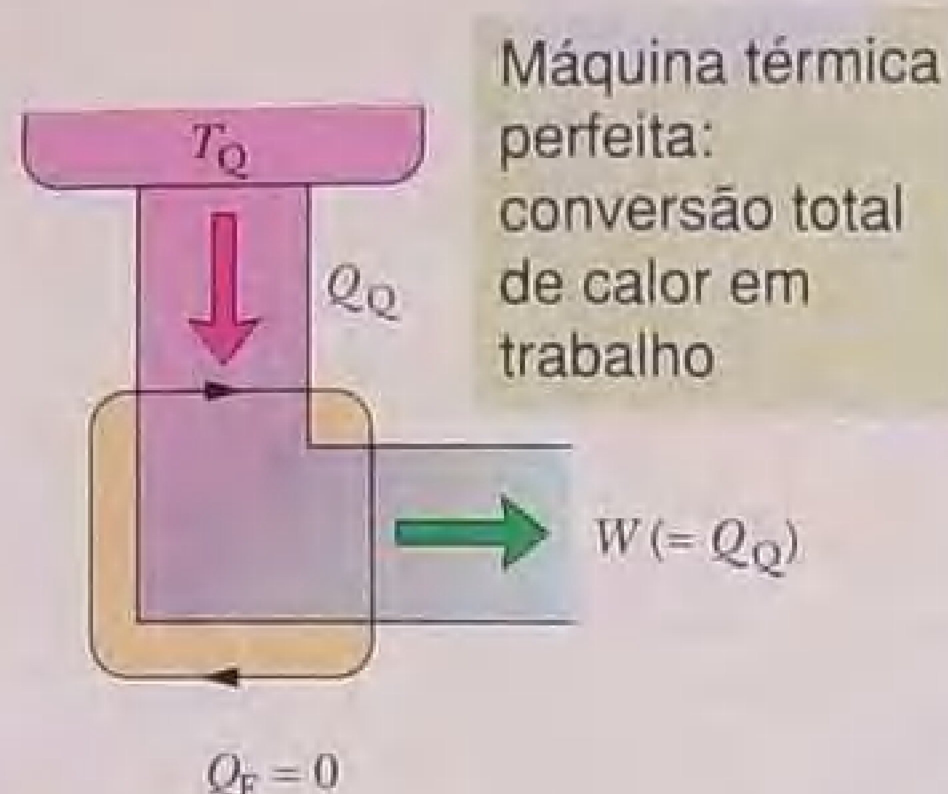


Figura 20-11 Os elementos de uma máquina térmica perfeita, ou seja, uma máquina que converte calor Q_Q de uma fonte quente em trabalho W com 100% de eficiência.

Os inventores estão sempre procurando aumentar a eficiência das máquinas térmicas reduzindo a quantidade de energia $|Q_F|$ que é "jogada fora" em cada ciclo. O sonho dos inventores é produzir a *máquina térmica perfeita*, mostrada esquematicamente na Fig. 20-11, na qual $|Q_F|$ é zero e $|Q_Q|$ é convertido totalmente em trabalho. Se uma máquina desse tipo fosse instalada em um navio, por exemplo, poderia extrair o calor da água e usá-lo para acionar as hélices, sem nenhum consumo de combustível. Um automóvel equipado com um motor desse tipo poderia extrair calor do ar e usá-lo para movimentar o carro, novamente sem nenhum consumo de combustível. Infelizmente, a máquina perfeita é apenas um sonho: examinando a Eq. 20-13, vemos que só seria possível trabalhar com 100% de eficiência (ou seja, com $\varepsilon = 1$) se $T_F = 0$ ou $T_Q = \infty$, condições impossíveis de serem satisfeitas na prática. Na verdade, a experiência levou à seguinte versão alternativa da segunda lei da termodinâmica, que, em última análise, equivale a dizer que *nenhuma máquina térmica é perfeita*:



Não existe uma série de processos cujo único resultado seja a conversão total em trabalho da energia contida em uma fonte de calor.

Resumindo: a eficiência térmica dada pela Eq. 20-13 se aplica apenas às máquinas de Carnot. As máquinas reais, nas quais os processos que formam o ciclo da máquina não são reversíveis, têm uma eficiência menor. De acordo com a Eq. 20-13, se o seu carro fosse movido por uma máquina de Carnot, a eficiência seria de aproximadamente 55%; na prática, a eficiência é provavelmente da ordem de 25%. Uma usina nuclear (Fig. 20-12), considerada como um todo, é uma máquina térmica que extrai energia em forma de calor do núcleo de um reator, realiza trabalho através de uma turbina e descarrega energia em forma de calor em um rio ou no mar. Se uma usina nuclear operasse como uma máquina de Carnot, teria uma eficiência de cerca de 40%; na prática, a eficiência é da ordem de 30%. No projeto de máquinas térmicas de qualquer tipo, é simplesmente impossível superar o limite de eficiência imposto pela Eq. 20-13.



Figura 20-12 A usina nuclear de North Anna, perto de Charlottesville, Virgínia, que gera energia elétrica a uma taxa de 900 MW. Ao mesmo tempo, por projeto, descarrega energia em um rio próximo a uma taxa de 2100 MW. Essa usina e todas as outras semelhantes descartam mais energia do que fornecem em forma útil. São as versões realistas da máquina térmica ideal da Fig. 20-8. (©Robert Ustinich)

A Máquina de Stirling

A Eq. 20-13 não se aplica a todas as máquinas ideais, mas somente às que funcionam segundo um ciclo como o da Fig. 20-9, ou seja, as máquinas de Carnot. A Fig. 20-13 mostra, por exemplo, o ciclo de operação de uma **máquina de Stirling** ideal. Uma comparação com o ciclo de Carnot da Fig. 20-9 revela que as duas máquinas possuem transferências de calor isotérmicas nas temperaturas T_Q e T_F. Entretanto, as duas isotermas do ciclo da máquina de Stirling não são ligadas por processos adiabáticos, como na máquina de Carnot, mas por processos a volume constante. Para aumentar reversivelmente a temperatura de um gás a volume constante de T_F para T_Q (processo *da* na Fig. 20-13) é preciso transferir energia na forma de calor para a substância de trabalho a partir de uma fonte cuja temperatura possa variar suavemente entre esses limites. Além disso, uma transferência no sentido inverso é necessária para executar o processo *bc*. Assim, transferências reversíveis de calor (e variações

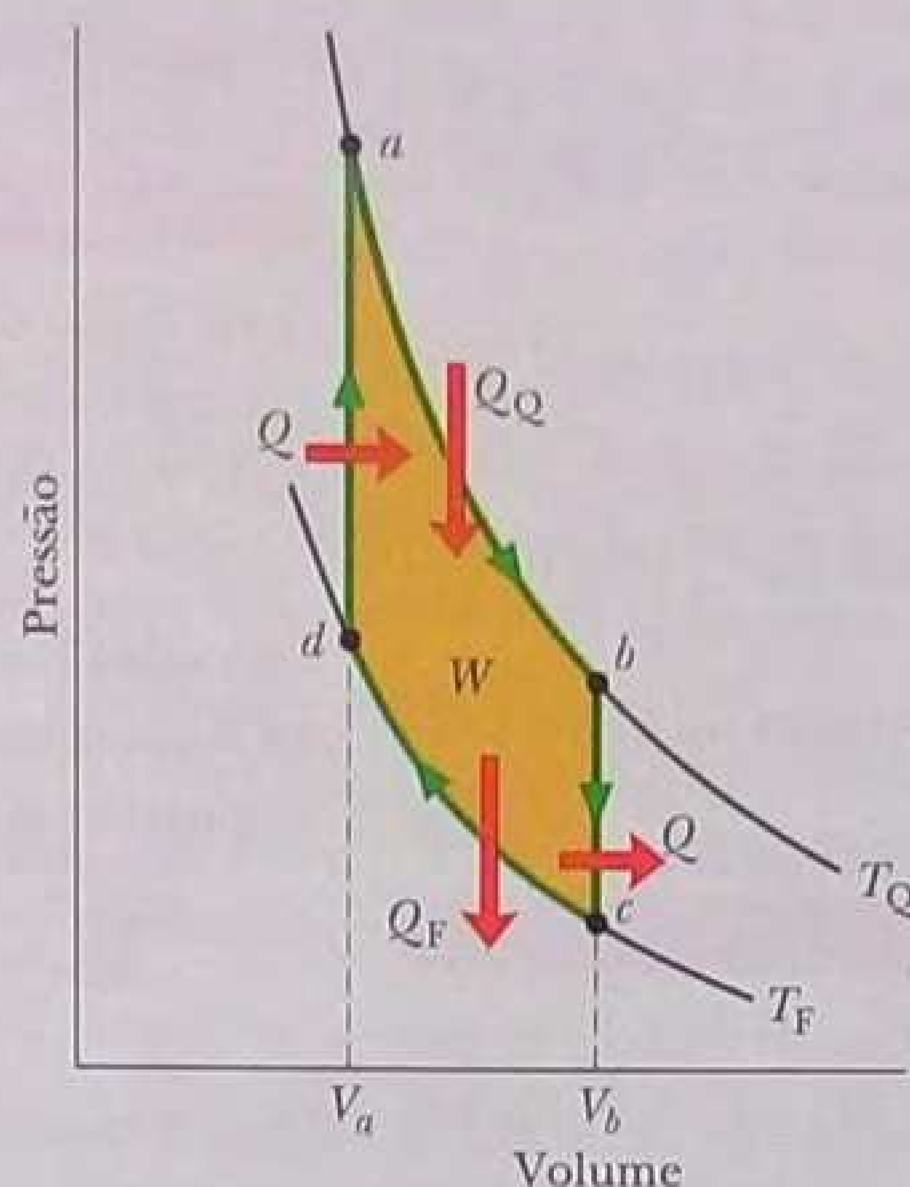


Figura 20-13 Diagrama p-V da substância de trabalho de uma máquina de Stirling ideal, supondo, por conveniência, que a substância de trabalho é um gás ideal.

correspondentes da entropia) ocorrem nos quatro processos que formam o ciclo de uma máquina de Stirling e não em apenas dois processos, como em uma máquina de Carnot. Assim, a dedução que leva à Eq. 20-13 não se aplica a uma máquina de Stirling ideal; a eficiência de uma máquina de Stirling ideal é menor do que a de uma máquina de Carnot operando entre as mesmas temperaturas. As máquinas de Stirling reais possuem uma eficiência ainda menor.

A máquina de Stirling foi inventada em 1816 por Robert Stirling. A máquina, que foi ignorada durante muito tempo, hoje está sendo aperfeiçoada para uso em automóveis e naves espaciais. Uma máquina de Stirling com uma potência de 5000 hp (3,7 MW) já foi construída. Como são muito silenciosas, as máquinas de Stirling são usadas em alguns submarinos militares.

TESTE 3

Três máquinas de Carnot operam entre fontes de calor a temperaturas de (a) 400 e 500 K, (b) 600 e 800 K e (c) 400 e 600 K. Ordene as máquinas de acordo com a eficiência, em ordem decrescente.

Exemplo

Eficiência, potência e variações de entropia de uma máquina de Carnot

Uma máquina de Carnot opera entre as temperaturas T_Q = 850 K e T_F = 300 K. A máquina realiza 1200 J de trabalho em cada ciclo, que leva 0,25 s.

(a) Qual é a eficiência da máquina?

IDEIA-CHAVE

A eficiência ε de uma máquina de Carnot depende apenas da razão T_F/T_Q das temperaturas (em kelvins) das fontes de calor às quais está ligada.

Cálculo De acordo com a Eq. 20-13,

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_F}{T_Q} = 1 - \frac{300\ \text{K}}{850\ \text{K}} = 0{,}647 \approx 65\%. \quad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é a potência média da máquina?

IDEIA-CHAVE

A potência média P de uma máquina é a razão entre o trabalho W realizado por ciclo e o tempo de duração t de cada ciclo.

Cálculo Para esta máquina de Carnot, temos:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1200\ \text{J}}{0{,}25\ \text{s}} = 4800\ \text{W} = 4{,}8\ \text{kW}. \quad \text{(Resposta)}$$

(c) Qual é a energia $|Q_Q|$ extraída em forma de calor da fonte quente a cada ciclo?

IDEIA-CHAVE

Para qualquer máquina térmica, incluindo as máquinas de Carnot, a eficiência ε é a razão entre o trabalho W realizado por ciclo e a energia $|Q_Q|$ extraída em forma de calor da fonte quente por ciclo ($\varepsilon = W/|Q_Q|$).

Cálculo: Temos:

$$|Q_Q| = \frac{W}{\varepsilon} = \frac{1200 \text{ J}}{0,647} = 1855 \text{ J}. \quad \text{(Resposta)}$$

(d) Qual é a energia $|Q_F|$ liberada em forma de calor para a fonte fria a cada ciclo?

IDEIA-CHAVE

Em uma máquina de Carnot, o trabalho W realizado por ciclo é igual à diferença entre as energias transferidas em forma de calor, ou seja, $|Q_Q| - |Q_F|$, como na Eq. 20-8.

Cálculo Temos:

$$|Q_F| = |Q_Q| - W$$
$$= 1855 \text{ J} - 1200 \text{ J} = 655 \text{ J}. \quad \text{(Resposta)}$$

(e) De quanto varia a entropia da substância de trabalho devido à energia recebida da fonte quente? De quanto varia a entropia da substância de trabalho devido à energia cedida à fonte fria?

IDEIA-CHAVE

A variação de entropia ΔS durante a transferência de energia em forma de calor Q a uma temperatura constante T é dada pela Eq. 20-2 ($\Delta S = Q/T$).

Cálculos Para a transferência *positiva* de uma energia Q_Q da fonte quente a uma temperatura T_Q, a variação de entropia da substância de trabalho é

$$\Delta S_Q = \frac{Q_Q}{T_Q} = \frac{1855 \text{ J}}{850 \text{ K}} = +2,18 \text{ J/K}. \quad \text{(Resposta)}$$

Para a transferência *negativa* de uma energia Q_F para a fonte fria a uma temperatura T_F, temos:

$$\Delta S_F = \frac{Q_F}{T_F} = \frac{-655 \text{ J}}{300 \text{ K}} = -2,18 \text{ J/K}. \quad \text{(Resposta)}$$

Note que a variação líquida de entropia da substância de trabalho para um ciclo completo é zero, como já foi discutido na dedução da Eq. 20-10.

Exemplo

Eficiência de um motor

Um inventor afirma que construiu um motor que apresenta uma eficiência de 75% quando opera entre as temperaturas de ebulição e congelamento da água. Isso é possível?

IDEIA-CHAVE

Não existe nenhuma máquina térmica real cuja eficiência seja maior ou igual à de uma máquina de Carnot operando entre as mesmas temperaturas.

Cálculo De acordo com a Eq. 20-13, a eficiência de uma máquina de Carnot que opera entre os pontos de ebulição e congelamento da água é

$$\varepsilon = 1 - \frac{T_F}{T_Q} = 1 - \frac{(0 + 273) \text{ K}}{(100 + 273) \text{ K}} = 0,268 \approx 27\%.$$

Assim, a eficiência alegada de 75% para uma máquina real (com processos irreversíveis) operando entre as temperaturas dadas não pode ser verdadeira.

20-6 Entropia no Mundo Real: Refrigeradores

Um **refrigerador** é um dispositivo que utiliza trabalho para transferir energia de uma fonte fria para uma fonte quente através de processos termodinâmicos cíclicos. Nos refrigeradores domésticos, por exemplo, o trabalho é realizado por um compressor elétrico, que transfere energia do compartimento onde são guardados os alimentos (a fonte fria) para o ambiente (a fonte quente).

Os aparelhos de ar-condicionado e os aquecedores de ambiente também são refrigeradores; a diferença está apenas na natureza das fontes quente e fria. No caso dos aparelhos de ar-condicionado, a fonte fria é o aposento a ser resfriado e a fonte quente (supostamente a uma temperatura mais alta) é o lado de fora do aposento. Um aquecedor de ambiente é um aparelho de ar-condicionado operado em sentido inverso para aquecer um aposento; nesse caso, o aposento passa a ser a fonte quente e recebe calor do lado de fora (supostamente a uma temperatura mais baixa).

Considere um *refrigerador ideal*:

Em um refrigerador ideal, todos os processos são reversíveis e as transferências de energia são realizadas sem as perdas causadas por efeitos como o atrito e a turbulência.

A Fig. 20-14 mostra os elementos básicos de um refrigerador ideal. Note que o sentido de operação é o inverso do sentido de operação da máquina de Carnot da Fig. 20-8. Em outras palavras, todas as transferências de energia, tanto em forma de calor como em forma de trabalho, ocorrem no sentido oposto ao de uma máquina de Carnot. Podemos chamar esse refrigerador ideal de **refrigerador de Carnot**.

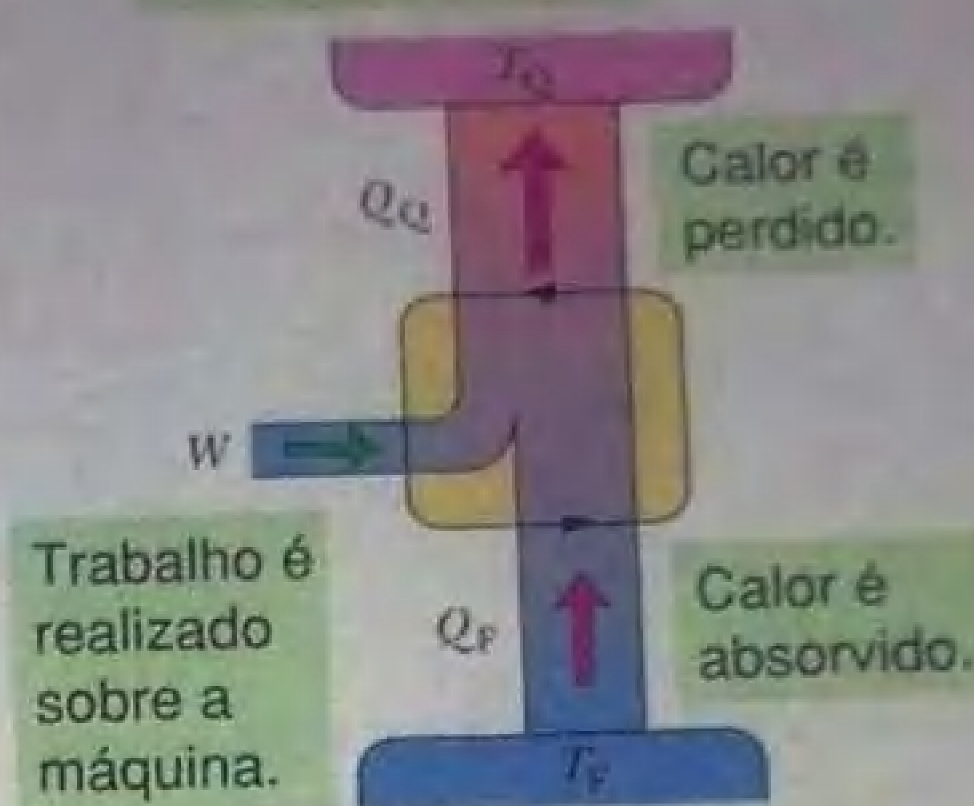


Figura 20-14 Os elementos de um refrigerador. As duas setas pretas horizontais no centro representam uma substância de trabalho operando ciclicamente, como em um diagrama *p-V*. Uma energia Q_F é transferida em forma de calor da fonte fria, que está à temperatura T_F, para a substância de trabalho; uma energia Q_Q é transferida em forma de calor da substância de trabalho para a fonte quente, que está à temperatura T_Q. Um trabalho W é realizado sobre o refrigerador (na realidade, sobre a substância de trabalho) pelo ambiente.

O projetista de um refrigerador está interessado em extrair a maior quantidade de energia $|Q_F|$ possível da fonte fria (energia utilizada) usando a menor quantidade possível de trabalho $|W|$ (energia adquirida). Uma medida da eficiência de um refrigerador é, portanto,

$$K = \frac{\text{energia utilizada}}{\text{energia adquirida}} = \frac{|Q_F|}{|W|} \quad \text{(coeficiente de desempenho, qualquer refrigerador)}, \tag{20-14}$$

em que K é chamado de *coeficiente de desempenho*. No caso de um refrigerador de Carnot, de acordo com a primeira lei da termodinâmica, $|W| = |Q_Q| - |Q_F|$, onde $|Q_Q|$ é o valor absoluto da energia transferida como calor para a fonte quente. Nesse caso, a Eq. 20-14 assume a forma

$$K_C = \frac{|Q_F|}{|Q_Q| - |Q_F|}. \tag{20-15}$$

Como um refrigerador de Carnot é uma máquina de Carnot operando no sentido inverso, podemos combinar a Eq. 20-10 com a Eq. 20-15; depois de algumas operações algébricas, obtemos

$$K_C = \frac{T_F}{T_Q - T_F} \quad \text{(coeficiente de desempenho, refrigerador de Carnot)}. \tag{20-16}$$

Para os aparelhos domésticos de ar-condicionado, $K \approx 2{,}5$; para as geladeiras domésticas, $K \approx 5$. Infelizmente, quanto menor a diferença de temperatura entre a fonte fria e a fonte quente, maior o valor de K. É por isso que os aparelhos de ar condicionado funcionam melhor nos países de clima temperado que nos países de clima quente, onde a temperatura externa é muito maior do que a temperatura interna desejada.

Seria ótimo ter um refrigerador que não precisasse de trabalho, ou seja, que funcionasse sem estar ligado na tomada. A Fig. 20-15 mostra outro "sonho de inventor", um *refrigerador perfeito* que transfere energia na forma de calor Q de uma fonte fria para uma fonte quente sem necessidade de trabalho. Como o equipamento opera em ciclos, a entropia da substância de trabalho não varia durante um ciclo completo. Entretanto, as entropias das duas fontes variam: a variação de entropia da fonte fria é $-|Q|/T_F$ e a variação de entropia da fonte quente é $+|Q|/T_Q$. Assim, a variação líquida de entropia para o sistema como um todo é

$$\Delta S = -\frac{|Q|}{T_F} + \frac{|Q|}{T_Q}.$$

Como $T_Q > T_F$, o lado direito da equação é negativo e, portanto, a variação líquida da entropia por ciclo para o sistema fechado *refrigerador + fonte* também é negativa. Como essa diminuição de entropia viola a segunda lei da termodinâmica (Eq. 20-5), não existe um refrigerador perfeito. (Uma geladeira só funciona se estiver ligada na tomada.)

Esse resultado nos leva a uma outra formulação (equivalente) da segunda lei da termodinâmica:

Refrigerador perfeito: transferência total de calor da fonte fria para a fonte quente sem realizar trabalho

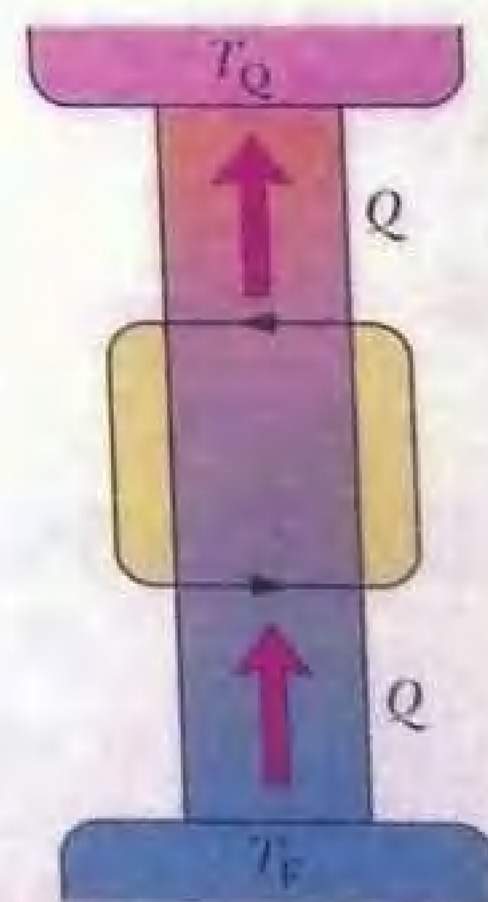
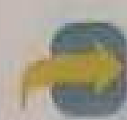


Figura 20-15 Os elementos de um refrigerador perfeito, ou seja, um refrigerador que transfere energia de uma fonte fria para uma fonte quente sem necessidade de trabalho.


Não existe uma série de processos cujo único resultado seja transferir energia na forma de calor de uma fonte fria para uma fonte quente.

Em suma: *não existem refrigeradores perfeitos.*


TESTE 4

Um refrigerador ideal funciona com um certo coeficiente de desempenho. Quatro mudanças são possíveis: (a) operar com o interior do aparelho a uma temperatura ligeiramente mais alta, (b) operar com o interior do aparelho a uma temperatura ligeiramente mais baixa, (c) levar o aparelho para um aposento ligeiramente mais quente e (d) levar o aparelho para um aposento ligeiramente mais frio. Os valores absolutos das variações de temperatura são os mesmos nos quatro casos. Ordene as mudanças de acordo com o valor do novo coeficiente de desempenho, em ordem decrescente.

20-7 A Eficiência de Máquinas Térmicas Reais

Seja ε_C a eficiência de uma máquina de Carnot operando entre duas temperaturas dadas. Nesta seção, mostramos que nenhuma máquina térmica real operando entre as mesmas temperaturas pode ter uma eficiência maior do que ε_C. Se isso fosse possível, a máquina violaria a segunda lei da termodinâmica.

Vamos supor que um inventor, trabalhando na garagem de casa, tenha construído uma máquina X que, segundo ele, possui uma eficiência ε_X maior do que ε_C:

$$\varepsilon_X > \varepsilon_C \quad \text{(alegação do inventor).} \tag{20-17}$$

Vamos acoplar a máquina X a um refrigerador de Carnot, como na Fig. 20-16*a*. Ajustamos os tempos do refrigerador de Carnot para que o trabalho necessário por ciclo seja exatamente igual ao realizado pela máquina X. Assim, não existe nenhum trabalho (externo) associado à combinação *máquina térmica + refrigerador* da Fig. 20-16*a*, que tomamos como nosso sistema.

Se a Eq. 20-17 for verdadeira, de acordo com a definição de eficiência (Eq. 20-11) devemos ter

$$\frac{|W|}{|Q'_Q|} > \frac{|W|}{|Q_Q|},$$

onde a plica indica a máquina X e o lado direito da desigualdade é a eficiência do refrigerador de Carnot quando funciona como uma máquina térmica. Essa desigualdade exige que

$$|Q_Q| > |Q'_Q|. \tag{20-18}$$

Como o trabalho realizado pela máquina X é igual ao trabalho realizado sobre o refrigerador de Carnot, temos, segundo a primeira lei da termodinâmica, dada pela Eq. 20-8,

$$|Q_Q| - |Q_F| = |Q'_Q| - |Q'_F|,$$

que pode ser escrita na forma

$$|Q_Q| - |Q'_Q| = |Q_F| - |Q'_F| = Q. \tag{20-19}$$

De acordo com a Eq. 20-18, o valor de Q na Eq. 20-19 deve ser positivo.

De acordo com a Eq. 20-19 e a Fig. 20-16, o efeito da máquina X e do refrigerador de Carnot, trabalhando em conjunto, é transferir uma energia Q na forma de calor de uma fonte fria para uma fonte quente sem necessidade de realizar trabalho. Assim, a combinação age como o refrigerador perfeito da Fig. 20-15, cuja existência viola a segunda lei da termodinâmica.

Algo deve estar errado com uma ou mais de nossas suposições, e a única que foi tomada arbitrariamente é expressa pela Eq. 20-17. A conclusão é que *nenhuma máquina real pode ter uma eficiência maior que a de uma máquina de Carnot operando entre as mesmas temperaturas.* Na melhor das hipóteses, a máquina real pode ter uma eficiência igual à de uma máquina de Carnot. Nesse caso, a máquina real *é* uma máquina de Carnot.

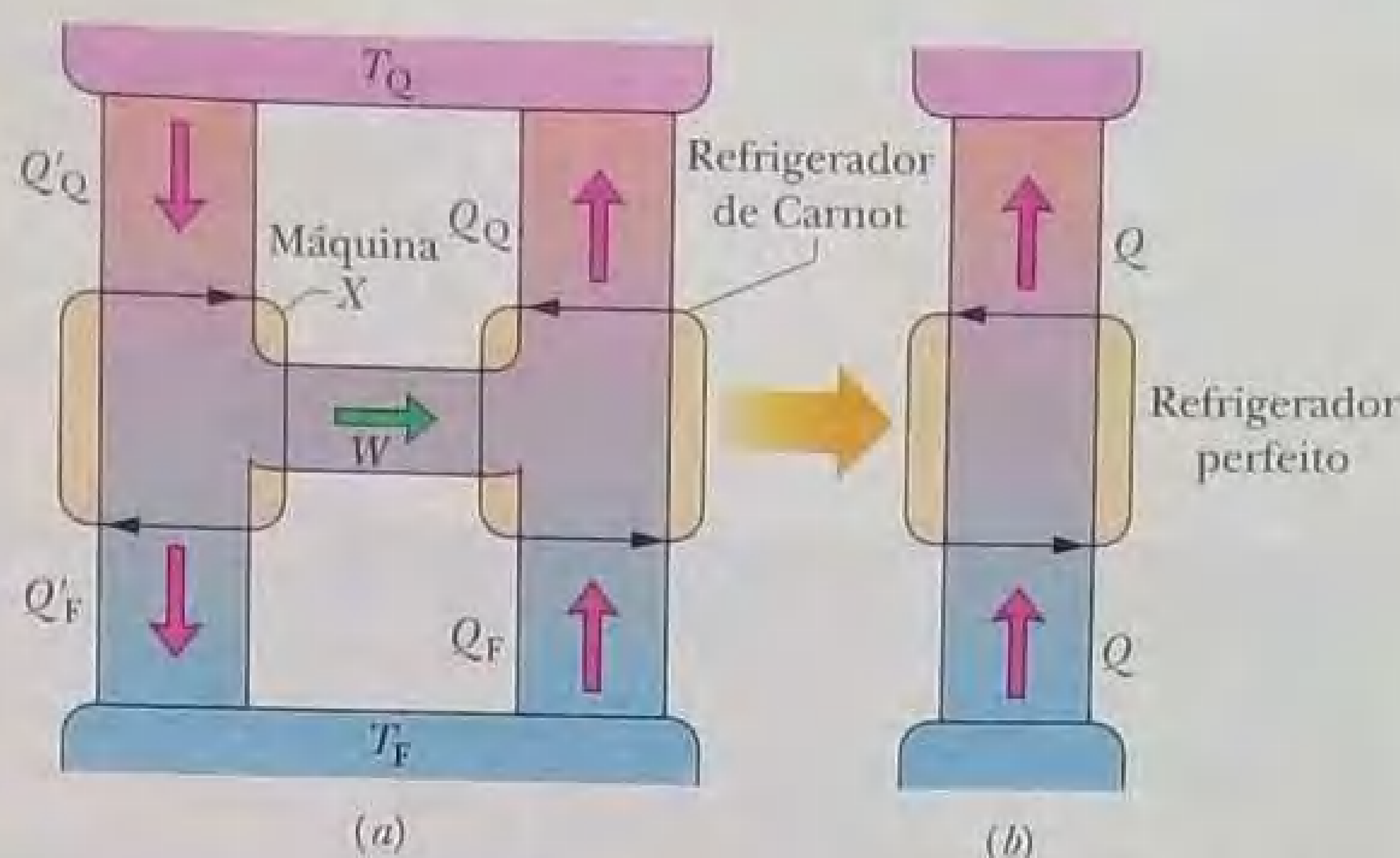


Figura 20-16 (*a*) A máquina térmica *X* alimenta um refrigerador de Carnot. (*b*) Se, como alega o inventor, a máquina *X* é mais eficiente que a máquina de Carnot, a combinação mostrada em (*a*) é equivalente ao refrigerador perfeito mostrado em (*b*). Como isso viola a segunda lei da termodinâmica, concluímos que a máquina *X não pode* ser mais eficiente que uma máquina de Carnot.

20-8 Uma Visão Estatística da Entropia

Como vimos no Capítulo 19, as propriedades macroscópicas de um gás podem ser explicadas em termos do comportamento das moléculas do gás. A pressão exercida por um gás sobre as paredes de um recipiente, por exemplo, pode ser descrita em termos da transferência de momento das moléculas do gás para as paredes do recipiente através de colisões. Essas explicações fazem parte de um campo de estudo conhecido como **mecânica estatística**.

Vamos agora concentrar nossa atenção em apenas um problema, o da distribuição das moléculas de um gás entre os dois lados de uma caixa isolada. Esse problema é razoavelmente fácil de analisar e permite usar a mecânica estatística para calcular a variação de entropia durante a expansão livre de um gás ideal. Como vamos ver, a mecânica estatística fornece o mesmo resultado que a termodinâmica.

A Fig. 20-17 mostra uma caixa que contém seis moléculas iguais (e, portanto, indistinguíveis) de um gás. Em um instante qualquer, uma dada molécula está no lado esquerdo ou no lado direito da caixa; como os dois lados têm o mesmo volume, a probabilidade de que a molécula esteja no lado esquerdo é 0,5 e a probabilidade de que esteja no lado direito também é 0,5.

A Tabela 20-1 mostra as sete *configurações* possíveis das seis moléculas, identificadas por algarismos romanos. Na configuração I, por exemplo, as seis moléculas estão no lado esquerdo ($n_1 = 6$) e nenhuma está no lado direito ($n_2 = 0$). É fácil ver que, em muitos casos, uma configuração pode ser obtida de várias formas diferentes. Esses diferentes arranjos das moléculas são chamados de *microestados*. Vejamos como calcular o número de microestados que correspondem a uma dada configuração.

Suponha que temos N moléculas, distribuídas com n_1 moléculas em um lado da caixa e n_2 no outro. (Naturalmente, $n_1 + n_2 = N$.) Imagine que as moléculas sejam distribuídas "manualmente", uma de cada vez. Se $N = 6$, podemos selecionar a primeira molécula de seis formas diferentes, ou seja, podemos escolher qualquer uma das seis moléculas para colocar na primeira posição da configuração. Podemos selecionar a segunda molécula de cinco formas diferentes, escolhendo qualquer das

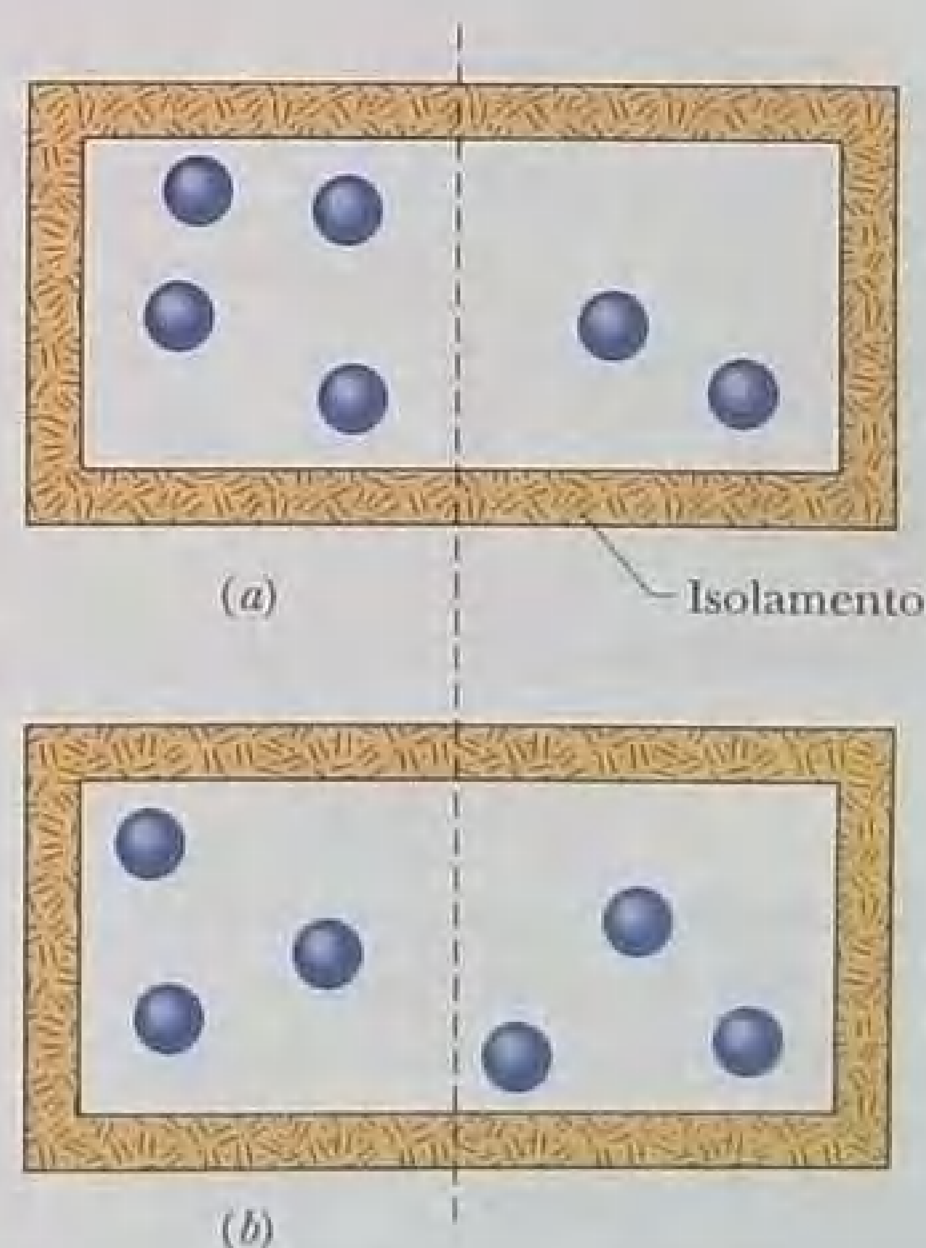


Figura 20-17 Uma caixa isolada contém seis moléculas de um gás. Cada molécula tem a mesma probabilidade de estar no lado esquerdo ou no lado direito da caixa. O arranjo mostrado em (*a*) corresponde à configuração III da Tabela 20-1 e o arranjo mostrado em (*b*) corresponde à configuração IV.

Tabela 20-1

Seis Moléculas em uma Caixa

Configuração Número	n_1	n_2	Multiplicidade W (número de microestados)	Cálculo de W (Eq. 20-20)	Entropia 10^{-23} J/K (Eq. 20-21)
I	6	0	1	6!/(6! 0!) = 1	0
II	5	1	6	6!/(5! 1!) = 6	2,47
III	4	2	15	6!/(4! 2!) = 15	3,74
IV	3	3	20	6!/(3! 3!) = 20	4,13
V	2	4	15	6!/(2! 4!) = 15	3,74
VI	1	5	6	6!/(1! 5!) = 6	2,47
VII	0	6	1	6!/(0! 6!) = 1	0
			Total = 64		

cinco moléculas restantes, e assim por diante. O número total de formas pelas quais podemos escolher as seis moléculas é o produto dessas formas independentes, $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$. Em notação matemática, escrevemos esse produto como $6! = 720$, onde 6! é lido como "seis fatorial". A maioria das calculadoras permite calcular fatoriais. Para uso futuro, você precisa saber que $0! = 1$. (Verifique na sua calculadora.)

Como as moléculas são indistinguíveis, os 720 arranjos não são todos diferentes. No caso em que $n_1 = 4$ e $n_2 = 2$ (a configuração III na Tabela 20-1), por exemplo, a ordem em que as quatro moléculas são colocadas em um dos lados da caixa não importa, pois, após as quatro moléculas terem sido colocadas, é impossível determinar a ordem em que foram colocadas. O número de formas diferentes de ordenar as quatro moléculas é $4! = 24$. Analogamente, o número de formas de ordenar as duas moléculas no outro lado da caixa é $2! = 2$. Para determinar o número de arranjos *diferentes* que levam à divisão (4, 2) que define a configuração III, devemos dividir 720 por 24 e também por 2. Chamamos o valor resultante, que é o número de microestados que correspondem a uma configuração, de *multiplicidade* W da configuração. Assim, para a configuração III,

$$W_{III} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{720}{24 \times 2} = 15.$$

É por isso que, de acordo com a Tabela 20-1, existem 15 microestados independentes que correspondem à configuração III. Note que, como também pode ser visto na tabela, o número total de microestados para as sete configurações é 64.

Extrapolando de seis moléculas para o caso geral de N moléculas, temos:

$$W = \frac{N!}{n_1!\,n_2!} \quad \text{(multiplicidade da configuração).} \qquad (20\text{-}20)$$

O leitor pode verificar que a Eq. 20-20 fornece as multiplicidades de todas as configurações que aparecem na Tabela 20-1.

A hipótese fundamental da mecânica estatística é a seguinte:



Todos os microestados são igualmente prováveis.

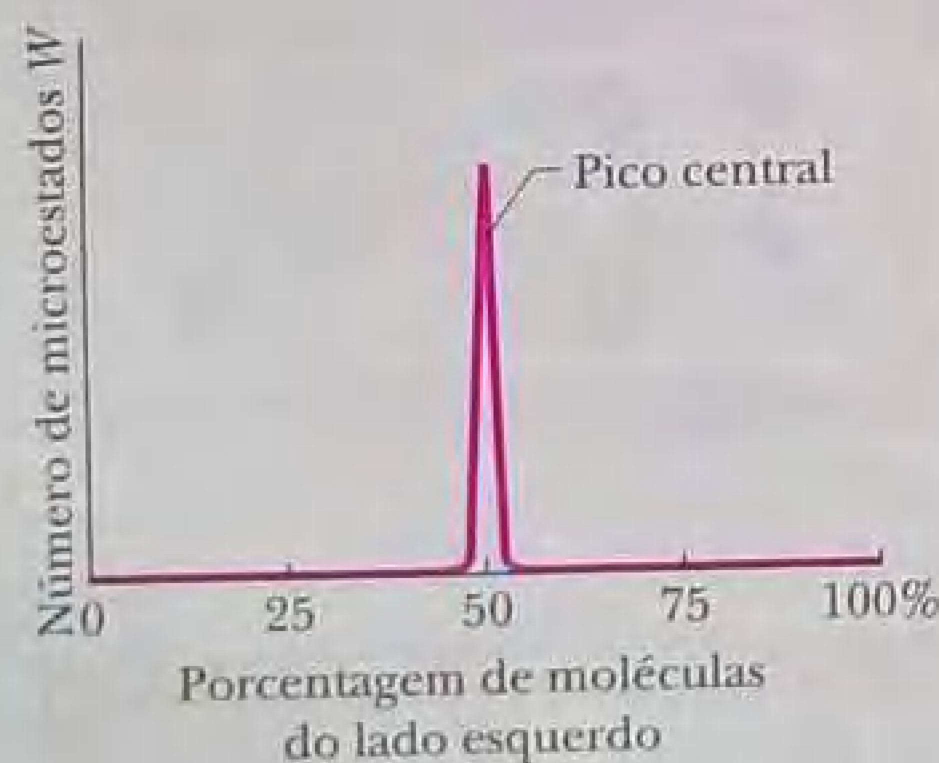


Figura 20-18 Gráfico do número de microestados em função da porcentagem de moléculas do lado esquerdo da caixa para um número *grande* de moléculas. Quase todos os microestados correspondem a um número aproximadamente igual de moléculas nos dois lados da caixa; esses microestados formam o *pico central* do gráfico. Para $N = 10^{24}$ (o número aproximado de moléculas contidas em um mol de um gás), o pico central seria tão estreito que, na escala do gráfico, ficaria reduzido a uma reta vertical.

Em outras palavras, se tirássemos muitas fotografias das seis moléculas enquanto se movem na caixa da Fig. 20-17 e contássemos o número de vezes que cada microestado aconteceu, verificaríamos que os 64 microestados aconteceram com a mesma frequência. Assim, o sistema passa, em média, a mesma quantidade de tempo em cada um dos 64 microestados.

Como todos os microestados são igualmente prováveis e configurações diferentes podem ter um número diferente de microestados, nem todas as configurações são igualmente prováveis. Na Tabela 20-1, a configuração IV, com 20 microestados, é a *configuração mais provável*, com uma probabilidade de $20/64 = 0{,}313$. Isso significa que o sistema se encontra na configuração IV 31,3% do tempo. As configurações I e VII, nas quais todas as moléculas se encontram em um lado da caixa, são as menos prováveis, com uma probabilidade $1/64 = 0{,}016$ ou 1,6% cada uma. Não é de espantar que a configuração mais provável seja aquela em que as moléculas estão igualmente divididas entre os dois lados da caixa, pois é o que esperamos que aconteça em equilíbrio térmico. Entretanto, *é* surpreendente que exista uma probabilidade *finita*, embora pequena, de que as seis moléculas se juntem em um lado da caixa, deixando o outro lado vazio.

Para grandes valores de N, existe um número extremamente grande de microestados, mas praticamente todos os microestados, como mostra a Fig. 20-18, pertencem à configuração na qual as moléculas estão divididas igualmente entre os dois lados da caixa. Mesmo que os valores medidos da temperatura e pressão do gás perma-

neçam constantes, o gás está em constante agitação, com as moléculas "visitando" todos os microestados com a mesma probabilidade. Entretanto, como muito poucos microestados estão fora do pico central da Fig. 20-18, podemos supor que as moléculas do gás se dividem igualmente entre os dois lados da caixa. Como vamos ver daqui a pouco, essa é a configuração para a qual a entropia é máxima.

Exemplo

Microestados e multiplicidade

Suponha que existem 100 moléculas indistinguíveis na caixa da Fig. 20-17. Qual é o número de microestados da configuração $n_1 = 50$ e $n_2 = 50$ e da configuração $n_1 = 100$ e $n_2 = 0$? Discuta os resultados em termos das probabilidades das duas configurações.

IDEIA-CHAVE

A multiplicidade W de uma configuração de moléculas indistinguíveis em uma caixa fechada é o número de microestados possíveis com essa configuração, dado pela Eq. 20-20.

Cálculos Para a configuração (50,50), temos:

$$W = \frac{N!}{n_1!\, n_2!} = \frac{100!}{50!\, 50!} = \frac{9{,}33 \times 10^{157}}{(3{,}04 \times 10^{64})(3{,}04 \times 10^{64})} = 1{,}01 \times 10^{29}. \quad \text{(Resposta)}$$

Para a configuração (100,0), temos:

$$W = \frac{N!}{n_1!\, n_2!} = \frac{100!}{100!\, 0!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1. \quad \text{(Resposta)}$$

Discussão Comparando os dois resultados, vemos que uma distribuição 50−50 é mais provável que uma distribuição 100−0 por um fator enorme, da ordem de 1×10^{29}. Se pudéssemos contar, à taxa de um por nanossegundo, o número de microestados que correspondem à distribuição 50−50, levaríamos cerca de 3×10^{12} anos, um tempo 200 vezes maior que a idade do universo. É preciso não esquecer que o número de moléculas (100) que usamos neste exemplo é extremamente pequeno (ou seja, corresponde a uma quantidade extremamente pequena de um gás). Imagine qual seria a diferença entre as probabilidades se usássemos um número mais realista para o número de moléculas, como $N = 10^{24}$. É por isso que o leitor não precisa se preocupar com a possibilidade de que todas as moléculas do ar se acumulem de repente do outro lado da sala, deixando-o sufocado.

Probabilidade e Entropia

Em 1877, o físico austríaco Ludwig Boltzmann (o mesmo da constante de Boltzmann k) encontrou uma relação entre a entropia S de uma configuração de um gás e a multiplicidade W dessa configuração. A relação é a seguinte:

$$S = k \ln W \quad \text{(equação da entropia de Boltzmann).} \qquad (20\text{-}21)$$

Esta fórmula famosa está gravada no túmulo de Boltzmann.

É natural que S e W estejam relacionadas através de uma função logarítmica. A entropia total de dois sistemas independentes é a *soma* das entropias individuais. A probabilidade de ocorrência de dois eventos independentes é o *produto* das probabilidades individuais. Como $\ln ab = \ln a + \ln b$, o logaritmo é a forma lógica de estabelecer uma ligação entre as duas grandezas.

A Tabela 20-1 mostra as entropias das configurações do sistema de seis moléculas da Fig. 20-17, calculadas usando a Eq. 20-21. A configuração IV, que possui a maior multiplicidade, possui também a maior entropia.

Quando usamos a Eq. 20-20 para determinar o valor de W, a calculadora pode exibir uma mensagem de erro se tentamos obter o fatorial de um número maior que algumas centenas. Felizmente, existe uma aproximação muito boa, conhecida como **aproximação de Stirling**, não para $N!$, mas para $\ln N!$, que é exatamente o que precisamos na Eq. 20-21. A aproximação de Stirling é a seguinte:

$$\ln N! \approx N(\ln N) - N \quad \text{(aproximação de Stirling).} \qquad (20\text{-}22)$$

O Stirling dessa aproximação não é Robert Stirling, o inventor da máquina de Stirling, e sim um matemático escocês chamado James Stirling.



TESTE 5

Uma caixa contém 1 mol de um gás. Considere duas configurações: (a) cada lado da caixa contém metade das moléculas e (b) cada terço da caixa contém um terço das moléculas. Qual das configurações possui mais microestados?

Exemplo

Cálculo do aumento de entropia associado a uma expansão livre usando microestados

No segundo exemplo deste capítulo vimos que se n mols de um gás ideal passam a ocupar o dobro do volume em uma expansão livre, o aumento de entropia do estado inicial i para o estado final f é $S_f - S_i = nR \ln 2$. Mostre que esse resultado está correto usando os métodos da mecânica estatística.

IDEIA-CHAVE

Podemos relacionar a entropia S de qualquer configuração das moléculas de um gás à multiplicidade W dos microestados dessa configuração usando a Eq. 20-21 ($S = k \ln W$).

Cálculos Estamos interessados em duas configurações: a configuração final f (com as moléculas ocupando todo o volume do recipiente da Fig. 20-1b) e a configuração inicial i (com as moléculas ocupando o lado esquerdo do recipiente). Como as moléculas estão em um recipiente fechado, podemos calcular a multiplicidade W dos microestados usando a Eq. 20-20. Neste caso, temos as N moléculas contidas nos n mols do gás. Inicialmente, com todas as moléculas no lado esquerdo do recipiente, a configuração (n_1, n_2) é $(N, 0)$ e, de acordo com a Eq. 20-20,

$$W_i = \frac{N!}{N!\,0!} = 1.$$

Com as moléculas distribuídas por todo o volume, a configuração (n_1, n_2) é $(N/2, N/2)$. De acordo com a Eq. 20-20, temos:

$$W_f = \frac{N!}{(N/2)!\,(N/2)!}.$$

De acordo com a Eq. 20-21, as entropias inicial e final são

$$S_i = k \ln W_i = k \ln 1 = 0$$

e

$$S_f = k \ln W_f = k \ln(N!) - 2k \ln[(N/2)!]. \quad (20\text{-}23)$$

Para chegar à Eq. 20-23, usamos a relação

$$\ln \frac{a}{b^2} = \ln a - 2 \ln b.$$

Aplicando a aproximação de Stirling (Eq. 20-22) à Eq. 20-23, obtemos:

$$\begin{aligned} S_f &= k \ln(N!) - 2k \ln[(N/2)!] \\ &= k[N(\ln N) - N] - 2k[(N/2)\ln(N/2) - (N/2)] \\ &= k[N(\ln N) - N - N \ln(N/2) + N] \\ &= k[N(\ln N) - N(\ln N - \ln 2)] = Nk \ln 2. \end{aligned} \quad (20\text{-}24)$$

De acordo com a Eq. 19-8, podemos substituir Nk por nR, onde R é a constante universal dos gases. Nesse caso, a Eq. 20-24 se torna

$$S_f = nR \ln 2.$$

A variação de entropia do estado inicial para o estado final é, portanto,

$$\begin{aligned} S_f - S_i &= nR \ln 2 - 0 \\ &= nR \ln 2, \end{aligned} \quad \text{(Resposta)}$$

como queríamos demonstrar. No segundo exemplo deste capítulo, calculamos este aumento de entropia para uma expansão livre a partir dos princípios da termodinâmica, encontrando um processo reversível equivalente e calculando a variação de entropia para *esse* processo em termos da temperatura e da transferência de calor. Neste exemplo, calculamos a mesma variação de entropia a partir dos princípios da mecânica estatística, usando o fato de que o sistema é formado por moléculas. Essas duas abordagens, muito diferentes, fornecem exatamente a mesma resposta.

O Stirling dessa aproximação não é Robert Stirling, o inventor da máquina de Stirling, e sim um matemático escocês chamado James Stirling.



TESTE 5

Uma caixa contém 1 mol de um gás. Considere duas configurações: (a) cada lado da caixa contém metade das moléculas e (b) cada terço da caixa contém um terço das moléculas. Qual das configurações possui mais microestados?

Exemplo

Cálculo do aumento de entropia associado a uma expansão livre usando microestados

No segundo exemplo deste capítulo vimos que se n mols de um gás ideal passam a ocupar o dobro do volume em uma expansão livre, o aumento de entropia do estado inicial i para o estado final f é $S_f - S_i = nR \ln 2$. Mostre que esse resultado está correto usando os métodos da mecânica estatística.

IDEIA-CHAVE

Podemos relacionar a entropia S de qualquer configuração das moléculas de um gás à multiplicidade W dos microestados dessa configuração usando a Eq. 20-21 ($S = k \ln W$).

Cálculos Estamos interessados em duas configurações: a configuração final f (com as moléculas ocupando todo o volume do recipiente da Fig. 20-1b) e a configuração inicial i (com as moléculas ocupando o lado esquerdo do recipiente). Como as moléculas estão em um recipiente fechado, podemos calcular a multiplicidade W dos microestados usando a Eq. 20-20. Neste caso, temos as N moléculas contidas nos n mols do gás. Inicialmente, com todas as moléculas no lado esquerdo do recipiente, a configuração (n_1, n_2) é $(N, 0)$ e, de acordo com a Eq. 20-20,

$$W_i = \frac{N!}{N!\,0!} = 1.$$

Com as moléculas distribuídas por todo o volume, a configuração (n_1, n_2) é $(N/2, N/2)$. De acordo com a Eq. 20-20, temos:

$$W_f = \frac{N!}{(N/2)!\,(N/2)!}.$$

De acordo com a Eq. 20-21, as entropias inicial e final são

$$S_i = k \ln W_i = k \ln 1 = 0$$

e

$$S_f = k \ln W_f = k \ln(N!) - 2k \ln[(N/2)!]. \quad (20\text{-}23)$$

Para chegar à Eq. 20-23, usamos a relação

$$\ln \frac{a}{b^2} = \ln a - 2 \ln b.$$

Aplicando a aproximação de Stirling (Eq. 20-22) à Eq. 20-23, obtemos:

$$\begin{aligned} S_f &= k \ln(N!) - 2k \ln[(N/2)!] \\ &= k[N(\ln N) - N] - 2k[(N/2)\ln(N/2) - (N/2)] \\ &= k[N(\ln N) - N - N\ln(N/2) + N] \\ &= k[N(\ln N) - N(\ln N - \ln 2)] = Nk \ln 2. \quad (20\text{-}24) \end{aligned}$$

De acordo com a Eq. 19-8, podemos substituir Nk por nR, onde R é a constante universal dos gases. Nesse caso, a Eq. 20-24 se torna

$$S_f = nR \ln 2.$$

A variação de entropia do estado inicial para o estado final é, portanto,

$$\begin{aligned} S_f - S_i &= nR \ln 2 - 0 \\ &= nR \ln 2, \quad \text{(Resposta)} \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. No segundo exemplo deste capítulo, calculamos este aumento de entropia para uma expansão livre a partir dos princípios da termodinâmica, encontrando um processo reversível equivalente e calculando a variação de entropia para *esse* processo em termos da temperatura e da transferência de calor. Neste exemplo, calculamos a mesma variação de entropia a partir dos princípios da mecânica estatística, usando o fato de que o sistema é formado por moléculas. Essas duas abordagens, muito diferentes, fornecem exatamente a mesma resposta.

REVISÃO E RESUMO

Processos Unidirecionais Um processo irreversível é aquele que não pode ser invertido por meio de pequenas mudanças no ambiente. O sentido no qual um processo irreversível ocorre é determinado pela *variação de entropia* ΔS do sistema no qual ocorre o processo. A entropia S é uma *propriedade de estado* (ou *função de estado*) do sistema, ou seja, uma função que depende apenas do estado do sistema e não da forma como o sistema atinge esse estado. O *postulado da entropia* afirma (em parte) o seguinte: *se um processo irreversível acontece em um sistema fechado, a entropia do sistema sempre aumenta.*

Cálculo da Variação de Entropia A **variação de entropia** ΔS em um processo irreversível que leva um sistema de um estado inicial i para um estado final f é exatamente igual à variação de entropia ΔS em *qualquer processo reversível* que ligue esses mesmos estados. Podemos calcular a última (mas não a primeira) usando a equação

$$\Delta S = S_f - S_i = \int_i^f \frac{dQ}{T}, \qquad (20\text{-}1)$$

em que Q é a energia absorvida ou cedida pelo sistema na forma de calor durante o processo e T é a temperatura do sistema em kelvins durante o processo.

No caso de um processo isotérmico reversível, a Eq. 20-1 se reduz a

$$\Delta S = S_f - S_i = \frac{Q}{T}. \qquad (20\text{-}2)$$

Se a variação de temperatura ΔT de um sistema é pequena em relação à temperatura (em kelvins) antes e depois do processo, a variação de entropia é dada aproximadamente por

$$\Delta S = S_f - S_i \approx \frac{Q}{T_{\text{méd}}}, \qquad (20\text{-}3)$$

em que $T_{\text{méd}}$ é a temperatura média do sistema durante o processo.

Quando um gás ideal passa reversivelmente de um estado inicial à temperatura T_i e volume V_i para um estado final à temperatura T_f e volume V_f, a variação ΔS da entropia do gás é dada por

$$\Delta S = S_f - S_i = nR \ln \frac{V_f}{V_i} + nC_V \ln \frac{T_f}{T_i}. \qquad (20\text{-}4)$$

A Segunda Lei da Termodinâmica Esta lei, que é uma extensão do postulado da entropia, afirma o seguinte: *se um processo ocorre em um sistema fechado, a entropia do sistema aumenta se o processo for irreversível e permanece constante se o processo for reversível.* Em forma de equação,

$$\Delta S \geq 0. \qquad (20\text{-}5)$$

Máquinas Térmicas Uma **máquina térmica** é um dispositivo que, operando ciclicamente, extrai uma energia térmica $|Q_Q|$ de uma fonte quente e realiza uma certa quantidade de trabalho $|W|$. A *eficiência* ε de uma máquina térmica é definida como

$$\varepsilon = \frac{\text{energia utilizada}}{\text{energia adquirida}} = \frac{|W|}{|Q_Q|}. \qquad (20\text{-}11)$$

Em uma **máquina térmica ideal**, todos os processos são reversíveis e as transferências de energia são realizadas sem as perdas causadas por efeitos como o atrito e a turbulência. A **máquina de Carnot** é uma máquina ideal que segue o ciclo da Fig. 20-9. Sua eficiência é dada por

$$\varepsilon_C = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_Q|} = 1 - \frac{T_F}{T_Q}, \qquad (20\text{-}12, 20\text{-}13)$$

em que T_Q e T_F são as temperaturas da fonte quente e da fonte fria, respectivamente. As máquinas térmicas reais possuem sempre uma eficiência menor que a dada pela Eq. 20-13. As máquinas térmicas ideais que não são máquinas de Carnot também possuem uma eficiência menor.

Uma *máquina perfeita* é uma máquina imaginária na qual a energia extraída de uma fonte na forma de calor é totalmente convertida em trabalho. Uma máquina que se comportasse dessa forma violaria a segunda lei da termodinâmica, que pode ser reformulada da seguinte maneira: não existe uma série de processos cujo único resultado seja a conversão total em trabalho da energia contida em uma fonte de calor.

Refrigeradores Um refrigerador é um dispositivo que, operando ciclicamente, usa trabalho para transferir uma energia $|Q_F|$ de uma fonte fria para uma fonte quente. O coeficiente de desempenho K de um refrigerador é definido como

$$K = \frac{\text{energia utilizada}}{\text{energia adquirida}} = \frac{|Q_F|}{|W|}. \qquad (20\text{-}14)$$

Um **refrigerador de Carnot** é uma máquina de Carnot operando no sentido oposto. Para um refrigerador de Carnot, a Eq. 20-14 se torna

$$K_C = \frac{|Q_F|}{|Q_Q| - |Q_F|} = \frac{T_F}{T_Q - T_F}. \qquad (20\text{-}15, 20\text{-}16)$$

Um *refrigerador perfeito* é um refrigerador imaginário no qual a energia extraída de uma fonte fria na forma de calor é totalmente transferida para uma fonte quente, sem a necessidade de realizar trabalho. Um refrigerador que se comportasse dessa forma violaria a segunda lei da termodinâmica, que pode ser reformulada da seguinte forma: não existe uma série de processos cujo único resultado seja a transferência de energia na forma de calor de uma fonte fria para uma fonte quente.

Uma Visão Estatística da Entropia A entropia de um sistema pode ser definida em termos das possíveis distribuições das moléculas do sistema. No caso de moléculas iguais, cada distribuição possível de moléculas é chamada de **microestado** do sistema. Todos os microestados equivalentes são agrupados em uma **configuração** do sistema. O número de microestados de uma configuração é a **multiplicidade** W da configuração.

Para um sistema de N moléculas que podem ser distribuídas nos dois lados de uma caixa, a multiplicidade é dada por

$$W = \frac{N!}{n_1!\, n_2!}, \qquad (20\text{-}20)$$

em que n_1 é o número de moléculas em um dos lados da caixa e n_2 é o número de moléculas no outro lado. Uma hipótese básica da **mecânica estatística** é a de que todos os microestados são igualmente prováveis. Assim, as configurações de alta multiplicidade ocorrem com maior frequência. Quando N é muito grande ($N = 10^{24}$ moléculas, digamos), as moléculas estão quase sempre na configuração em que $n_1 = n_2$.

A multiplicidade W de uma configuração de um sistema e a entropia S do sistema nessa configuração estão relacionadas pela equação de entropia de Boltzmann:

$$S = k \ln W, \tag{20-21}$$

em que $k = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K é a constante de Boltzmann.

Quando N é muito grande (o caso mais comum), podemos calcular o valor aproximado de $\ln N!$ usando a *aproximação de Stirling*:

$$\ln N! \approx N(\ln N) - N. \tag{20-22}$$

PERGUNTAS

1 O ponto i da Fig. 20-19 representa o estado inicial de um gás ideal a uma temperatura T. Levando em conta os sinais algébricos, ordene as variações de entropia que o gás sofre ao passar, sucessiva e reversivelmente, do ponto i para os pontos a, b, c e d, em ordem decrescente.

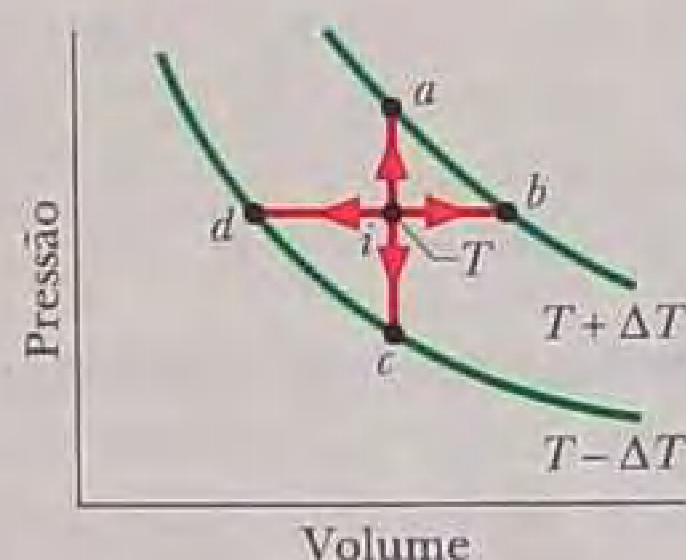


Figura 20-19 Pergunta 1.

2 Em quatro experimentos, os blocos A e B, inicialmente a temperaturas diferentes, foram colocados juntos em uma caixa isolada até atingirem uma temperatura final comum. As variações de entropia dos blocos nos quatro experimentos possuem, não necessariamente na ordem dada, os valores a seguir (em joules por kelvin). Determine a que valor de A corresponde cada valor de B.

Bloco	Valores			
A	8	5	3	9
B	−3	−8	−5	−2

3 Um gás, confinado em um cilindro isolado, é comprimido adiabaticamente até metade do volume inicial. A entropia do gás aumenta, diminui ou permanece constante durante o processo?

4 Um gás monoatômico ideal a uma temperatura inicial T_0 (em kelvins) se expande de um volume inicial V_0 para um volume $2V_0$ através de cinco processos indicados no diagrama T-V da Fig. 20-20. Em qual dos processos a expansão é (a) isotérmica, (b) isobárica (a pressão constante) e (c) adiabática? Justifique suas respostas. (d) Em quais dos processos a entropia do gás diminui?

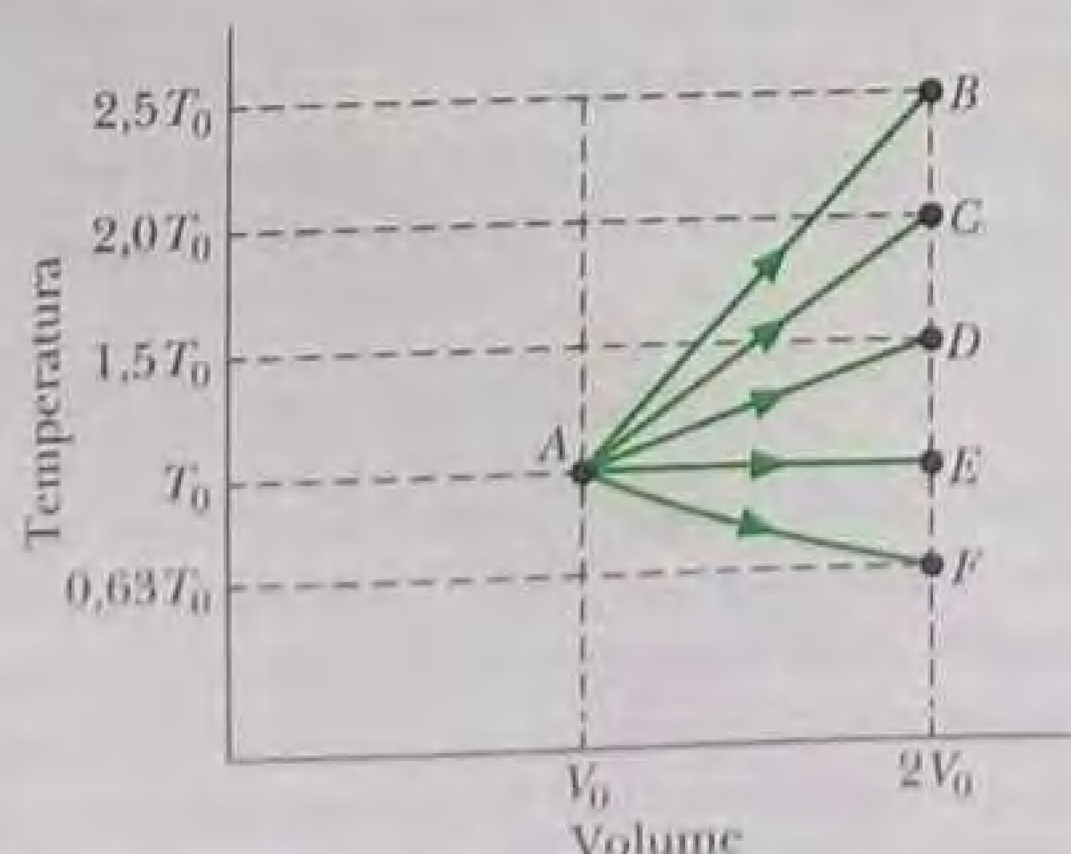


Figura 20-20 Pergunta 4.

5 Em quatro experimentos, 2,5 mols de hidrogênio sofrem expansões isotérmicas reversíveis, começando com o mesmo volume, mas a temperaturas diferentes. Os diagramas p-V correspondentes são mostrados na Fig. 20-21. Ordene as situações de acordo com a variação da entropia do gás, em ordem decrescente.

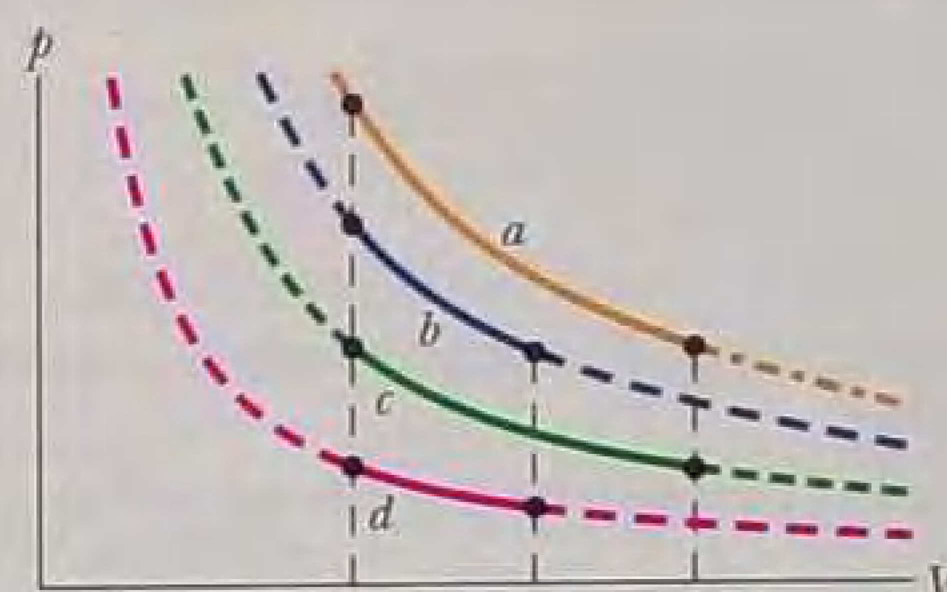


Figura 20-21 Pergunta 5.

6 Uma caixa contém 100 átomos em uma configuração na qual existem 50 átomos em cada lado da caixa. Suponha que você, usando um supercomputador, pudesse contar os diferentes microestados associados a essa configuração à taxa de 100 bilhões de estados por segundo. Sem realizar nenhum cálculo por escrito, estime quanto tempo seria necessário para executar a tarefa: um dia, um ano, ou muito mais que um ano.

7 A entropia por ciclo aumenta, diminui ou permanece constante para (a) uma máquina térmica de Carnot, (b) uma máquina térmica real e (c) uma máquina térmica perfeita (que, obviamente, não pode ser construída na prática)?

8 Três máquinas de Carnot operam entre as temperaturas de (a) 400 e 500 K, (b) 500 e 600 K e (c) 400 e 600 K. Cada máquina extrai a mesma quantidade de energia por ciclo da fonte quente. Ordene os valores absolutos dos trabalhos realizados por ciclo pelas máquinas, em ordem decrescente.

9 Um cientista afirma que inventou quatro máquinas, todas operando entre fontes de calor a temperaturas constantes de 400 K e 300 K. Os dados sobre cada máquina, por ciclo de operação, são os seguintes: máquina A, $Q_Q = 200$ J, $Q_F = -175$ J e $W = 40$ J; máquina B, $Q_Q = 500$ J, $Q_F = -200$ J e $W = 400$ J; máquina C, $Q_Q = 600$ J, $Q_F = -200$ J e $W = 400$ J; máquina D, $Q_Q = 100$ J, $Q_F = -90$ J e $W = 10$ J. Quais das máquinas violam a primeira ou a segunda lei da termodinâmica?

10 A entropia por ciclo aumenta, diminui ou permanece a mesma para (a) um refrigerador de Carnot, (b) um refrigerador real e (c) um refrigerador perfeito (que, obviamente, não pode ser construído na prática)?

PROBLEMAS

•–••• O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jearl Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

Seção 20-3 Variação de Entropia

•1 Suponha que 4,00 mols de um gás ideal sofrem uma expansão reversível isotérmica do volume V_1 para o volume $V_2 = 2{,}00V_1$ a uma temperatura $T = 400$ K. Determine (a) o trabalho realizado pelo gás e (b) a variação de entropia do gás. (c) Se a expansão fosse reversível e adiabática em vez de isotérmica, qual seria a variação da entropia do gás?

•2 Um gás ideal sofre uma expansão reversível isotérmica a 77,0°C, na qual o volume aumenta de 1,30 L para 3,40 L. A variação de entropia do gás é 22,0 J/K. Quantos mols de gás estão presentes?

•3 Uma amostra de 2,50 mols de um gás ideal se expande reversível e isotermicamente a 360 K até que o volume seja duas vezes maior. Qual é o aumento da entropia do gás?

•4 Quanta energia deve ser transferida na forma de calor para uma expansão isotérmica reversível de um gás ideal a 132°C se a entropia do gás aumenta de 46,0 J/K?

•5 Determine (a) a energia absorvida na forma de calor e (b) a variação de entropia de um bloco de cobre de 2,00 kg cuja temperatura aumenta reversivelmente de 25,0°C para 100°C. O calor específico do cobre é 386 J/kg · K.

•6 (a) Qual é a variação de entropia de um cubo de gelo de 12,0 g que funde totalmente em um balde de água cuja temperatura está ligeiramente acima do ponto de congelamento da água? (b) Qual é a variação de entropia de uma colher de sopa de água, com uma massa de 5,00 g, que evapora totalmente ao ser colocada em uma placa quente cuja temperatura está ligeiramente acima do ponto de ebulição da água?

••7 Um bloco de cobre de 50,0 g cuja temperatura é 400 K é colocado em uma caixa isolada juntamente com um bloco de chumbo de 100 g cuja temperatura é 200 K. (a) Qual é a temperatura de equilíbrio do sistema dos dois blocos? (b) Qual é a variação da energia interna do sistema do estado inicial para o estado de equilíbrio? (c) Qual é a variação da entropia do sistema? (*Sugestão:* consulte a Tabela 18-3.)

••8 Em temperaturas muito baixas, o calor específico molar C_V de muitos sólidos é dado aproximadamente por $C_V = AT^3$, onde A depende da substância considerada. Para o alumínio, $A = 3{,}15 \times 10^{-5}$ J/mol · K⁴. Determine a variação de entropia de 4,00 mols de alumínio quando a temperatura aumenta de 5,00 K para 10,0 K.

••9 Um cubo de gelo de 10 g a −10°C é colocado em um lago cuja temperatura é 15°C. Calcule a variação da entropia do sistema cubo–lago quando o cubo de gelo entra em equilíbrio térmico com o lago. O calor específico do gelo é 2220 J/kg · K. (*Sugestão:* o cubo de gelo afeta a temperatura do lago?)

••10 Um bloco de 364 g é colocado em contato com uma fonte de calor. O bloco está inicialmente a uma temperatura mais baixa do que a da fonte. Suponha que a consequente transferência de energia na forma de calor da fonte para o bloco seja reversível. A Fig. 20-22 mostra a variação de entropia ΔS do bloco até que o equilíbrio térmico seja alcançado. A escala do eixo horizontal é definida por $T_a = 280$ K e $T_b = 380$ K. Qual é o calor específico do bloco?

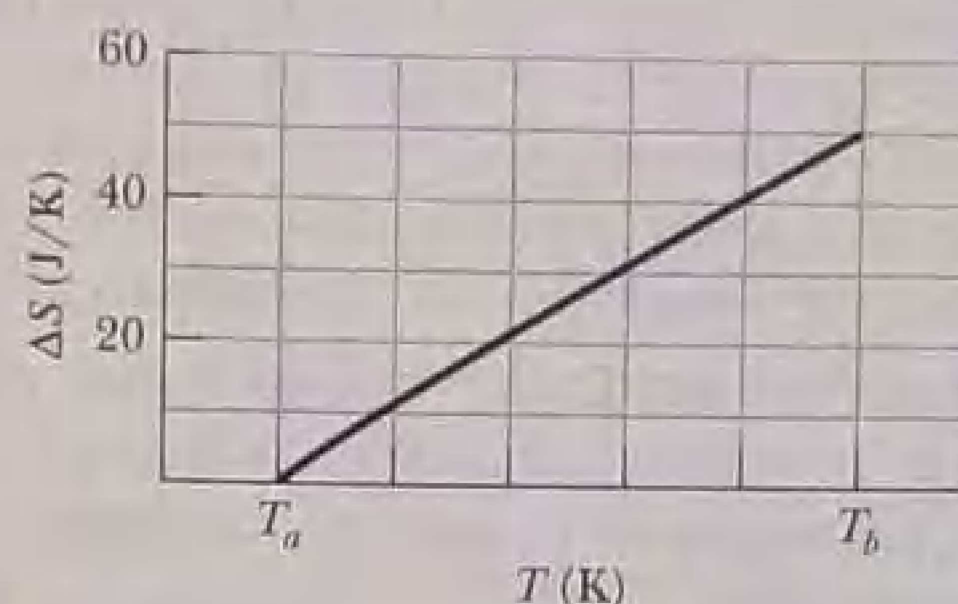


Figura 20-22 Problema 10.

••11 Em um experimento, 200 g de alumínio (com um calor específico de 900 J/kg · K) a 100°C são misturados com 50,0 g de água a 20,0°C, com a mistura isolada termicamente. (a) Qual é a temperatura de equilíbrio? Qual é a variação de entropia (b) do alumínio, (c) da água e (d) do sistema alumínio–água?

••12 Uma amostra de gás sofre uma expansão isotérmica reversível. A Fig. 20-23 mostra a variação ΔS da entropia do gás em função do volume final V_f do gás. A escala do eixo vertical é definida por $\Delta S_s = 64$ J/K. Quantos mols de gás existem na amostra?

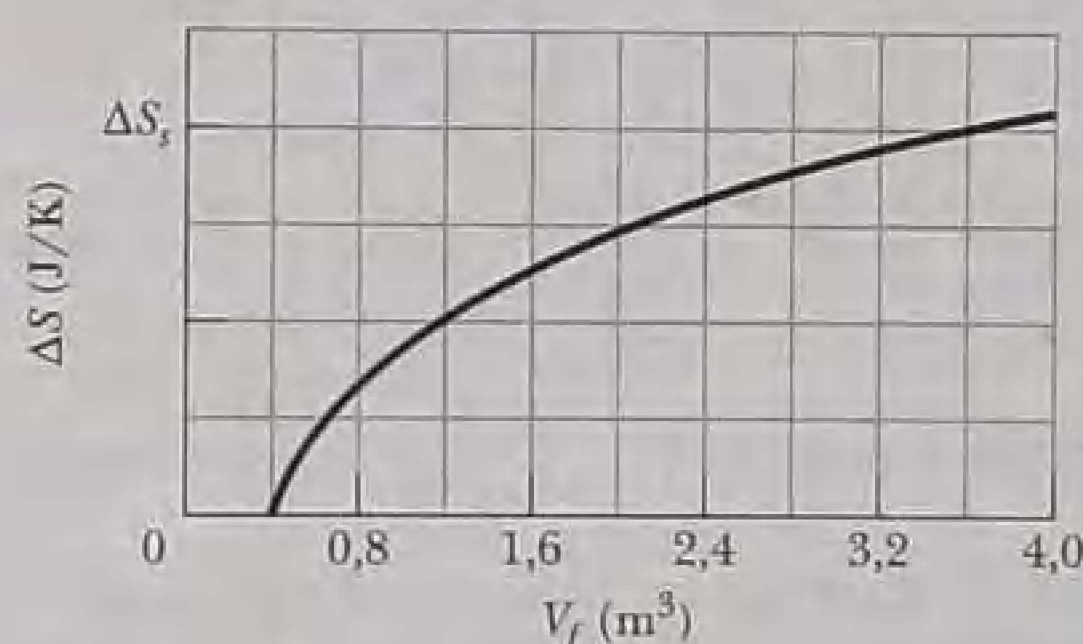


Figura 20-23 Problema 12.

••13 No processo irreversível da Fig. 20-5, as temperaturas iniciais dos blocos iguais E e D são 305,5 e 294,5 K, respectivamente, e 215 J é a energia que deve ser transferida de um bloco a outro para que o equilíbrio seja atingido. Para os processos reversíveis da Fig. 20-6, quanto é ΔS (a) para o bloco E, (b) para a fonte de calor do bloco E, (c) para o bloco D, (d) para a fonte de calor do bloco D, (e) para o sistema dos dois blocos e (f) para o sistema dos dois blocos e as duas fontes de calor?

••14 (a) Para 1,0 mol de um gás monoatômico ideal submetido ao ciclo da Fig. 20-24, em que $V_1 = 4{,}00V_0$, qual é o valor de W/p_0V_0 quando o gás vai do estado a ao estado c ao longo da trajetória abc? Quanto é o valor de $\Delta E_{int}/p_0V_0$ quando o gás (b) vai de b a c e (c) descreve um ciclo completo? Quanto é o valor de ΔS quando o gás (d) vai de b a c e (e) descreve um ciclo completo?

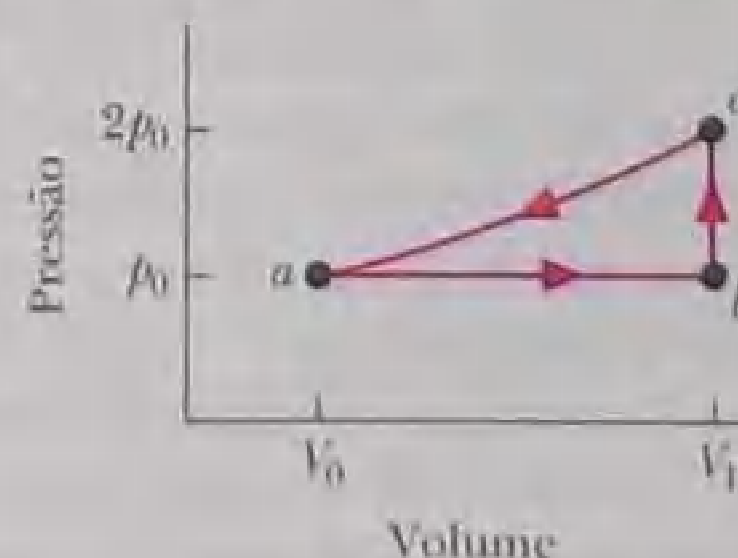


Figura 20-24 Problema 14.

••15 Uma mistura de 1773 g de água e 227 g de gelo está inicialmente em equilíbrio a 0,000°C. A mistura é levada, através de um processo reversível, a um segundo estado de equilíbrio no qual a razão água–gelo, em massa, é 1,00:1,00 a 0,000°C. (a) Calcule a variação de entropia do sistema durante esse processo. (O calor de fusão da água é 333 kJ/kg.) (b) O sistema retorna ao estado de equilíbrio inicial através de um processo irreversível (usando, por exemplo, um bico de Bunsen). Calcule a variação de entropia do sistema durante esse processo. (c) As respostas dos itens (a) e (b) são compatíveis com a segunda lei da termodinâmica?

••16 Um cubo de gelo de 8,0 g a −10°C é colocado em uma garrafa térmica com 100 cm³ de água a 20°C. De quanto varia a entropia do sistema cubo–água até o equilíbrio ser alcançado? O calor específico do gelo é 2220 J/kg · K.

••17 Na Fig. 20-25, onde $V_{23} = 3{,}00V_1$, n mols de um gás diatômico ideal passam por um ciclo no qual as moléculas giram, mas não oscilam. Determine (a) p_2/p_1, (b) p_3/p_1 e (c) T_3/T_1. Para a trajetória 1 → 2, determine (d) W/nRT_1, (e) Q/nRT_1, (f) $\Delta E_{int}/nRT_1$ e (g) $\Delta S/nR$. Para a trajetória 2 → 3, determine (h) W/nRT_1, (i) Q/nRT_1, (j) $\Delta E_{int}/nRT_1$ e (k) $\Delta S/nR$. Para a trajetória 3 → 1, determine (l) W/nRT_1, (m) Q/nRT_1, (n) $\Delta E_{int}/nRT_1$ e (o) $\Delta S/nR$.

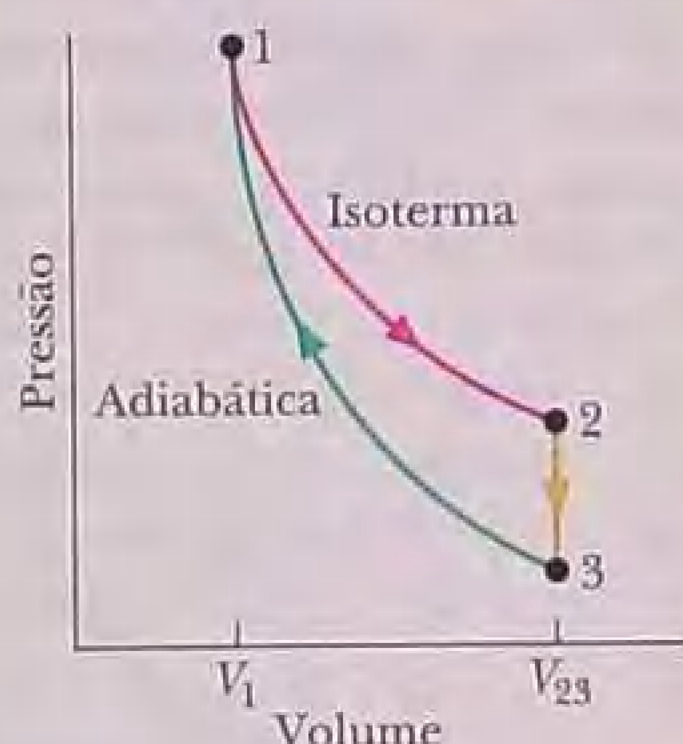


Figura 20-25 Problema 17.

••18 Uma amostra de 2,0 mols de um gás monoatômico ideal é submetida ao processo reversível da Fig. 20-26. A escala do eixo vertical é definida por $T_s = 400{,}0$ K e a escala do eixo horizontal é definida por $S_s = 20{,}0$ J/K. (a) Qual é a energia absorvida pelo gás na forma de calor? (b) Qual é a variação da energia interna do gás? (c) Qual é o trabalho realizado pelo gás?

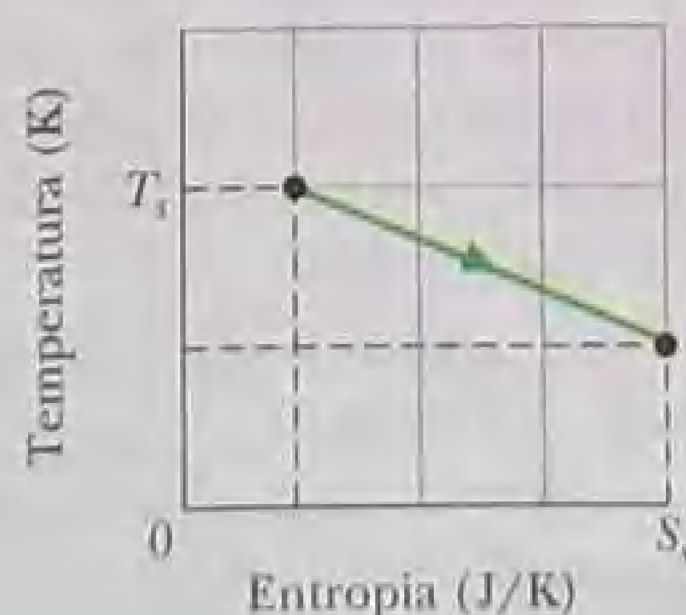


Figura 20-26 Problema 18.

•••19 Suponha que 1,00 mol de um gás monoatômico ideal inicialmente à pressão p_1 e ocupando um volume V_1 seja submetido sucessivamente a dois processos: (1) uma expansão isotérmica até um volume $2{,}00V_1$ e (2) um aumento de pressão a volume constante até uma pressão $2{,}00p_1$. Qual é o valor de Q/p_1V_1 (a) para o processo 1 e (b) para o processo 2? Qual é o valor de W/p_1V_1 (c) para o processo 1 e (d) para o processo 2? Para o processo completo, qual é o valor (e) de $\Delta E_{int}/p_1V_1$ e (f) de ΔS? O gás retorna ao estado inicial e é levado ao mesmo estado final, mas desta vez através dos seguintes processos sucessivos: (1) uma compressão isotérmica até a pressão $2{,}00p_1$ e (2) um aumento de volume até um volume $2{,}00V_1$ à pressão constante. Qual é o valor de Q/p_1V_1 (g) para o processo 1 e (h) para o processo 2? Qual é o valor de W/p_1V_1 (i) para o processo 1 e (j) para o processo 2? Quais são os valores de (k) $\Delta E_{int}/p_1V_1$ e (l) ΔS para o processo completo?

•••20 Expande-se 1,00 mol de um gás monoatômico ideal inicialmente a 5,00 kPa e 600 K do volume inicial $V_i = 1{,}00$ m³ para o volume final $V_f = 2{,}00$ m³. Em qualquer instante durante a expansão, a pressão p e o volume V do gás estão relacionados por $p = 5{,}00 \exp[(V_i - V)/a]$, com p em kPa, V_i e V em m³ e $a = 1{,}00$ m³. Qual é (a) a pressão e (b) a temperatura final do gás? (c) Qual é o trabalho realizado pelo gás durante a expansão? (d) Qual é o valor de ΔS para a expansão? (*Sugestão:* use dois processos reversíveis simples para determinar ΔS.)

•••21 É possível remover energia da água na forma de calor na temperatura de congelamento (0,0°C à pressão atmosférica) ou mesmo abaixo dessa temperatura sem que a água congele; quando isso acontece, dizemos que a água está *super-resfriada*. Suponha que uma gota d'água de 1,00 g seja super-resfriada até que a temperatura seja a mesma do ar nas vizinhanças, −5,00°C. Em seguida, a gota congela bruscamente, transferindo energia para o ar na forma de calor. Qual é a variação da entropia da gota? (*Sugestão:* use um processo reversível de três estágios, como se a gota passasse pelo ponto normal de congelamento.) O calor específico do gelo é 2220 J/kg · K.

•••22 Uma garrafa térmica isolada contém 130 g de água a 80,0°C. Um cubo de gelo de 12,0 g a 0°C é introduzido na garrafa térmica, formando um sistema *gelo + água original*. (a) Qual é a temperatura de equilíbrio do sistema? Qual é a variação de entropia da água que originalmente era gelo (b) ao derreter e (c) ao se aquecer até a temperatura de equilíbrio? (d) Qual é a variação de entropia da água original ao esfriar até a temperatura de equilíbrio? (e) Qual é a variação total de entropia do sistema *gelo + água original* ao atingir a temperatura de equilíbrio?

Seção 20-5 Entropia no Mundo Real: Máquinas Térmicas

•23 Uma máquina de Carnot cuja fonte fria está a 17°C tem uma eficiência de 40%. De quanto deve ser elevada a temperatura da fonte quente para que a eficiência aumente para 50%?

•24 Uma máquina de Carnot absorve 52 kJ na forma de calor e rejeita 36 kJ na forma de calor em cada ciclo. Calcule (a) a eficiência da máquina e (b) o trabalho realizado por ciclo em quilojoules.

•25 Uma máquina de Carnot tem uma eficiência de 22,0%. Ela opera entre duas fontes de calor de temperatura constante cuja diferença de temperatura é 75,0C°. Qual é a temperaturas (a) da fonte fria e (b) da fonte quente?

•26 Em um reator de fusão nuclear hipotético, o combustível é o gás deutério a uma temperatura de 7×10^8 K. Se o gás pudesse ser usado para operar uma máquina de Carnot com $T_F = 100$°C, qual seria a eficiência da máquina? Tome as duas temperaturas como exatas e calcule a resposta com sete algarismos significativos.

•27 Uma máquina de Carnot opera entre 235°C e 115°C, absorvendo $6{,}30 \times 10^4$ J por ciclo na temperatura mais alta. (a) Qual é a eficiência da máquina? (b) Qual é o trabalho por ciclo que esta máquina é capaz de realizar?

••28 No primeiro estágio de uma máquina de Carnot de dois estágios, uma energia Q_1 é absorvida na forma de calor à temperatura T_1, um trabalho W_1 é realizado e uma energia Q_2 é liberada na forma de

calor à temperatura T_2. O segundo estágio absorve essa energia Q_2, realiza um trabalho W_2 e libera energia na forma de calor Q_3 a uma temperatura ainda menor T_3. Mostre que a eficiência da máquina é $(T_2 - T_3)/T_2$.

••29 A Fig. 20-27 mostra um ciclo reversível a que é submetido 1,00 mol de um gás monoatômico ideal. Suponha que $p = 2p_0$, $V = 2V_0$, $p_0 = 1{,}01 \times 10^5$ Pa e $V_0 = 0{,}0225$ m^3. Calcule (a) o trabalho realizado durante o ciclo, (b) a energia adicionada em forma de calor durante o percurso abc e (c) a eficiência do ciclo. (d) Qual é a eficiência de uma máquina de Carnot operando entre a temperatura mais alta e a temperatura mais baixa do ciclo? (e) A eficiência calculada no item (d) é maior ou menor que a eficiência calculada no item (c)?

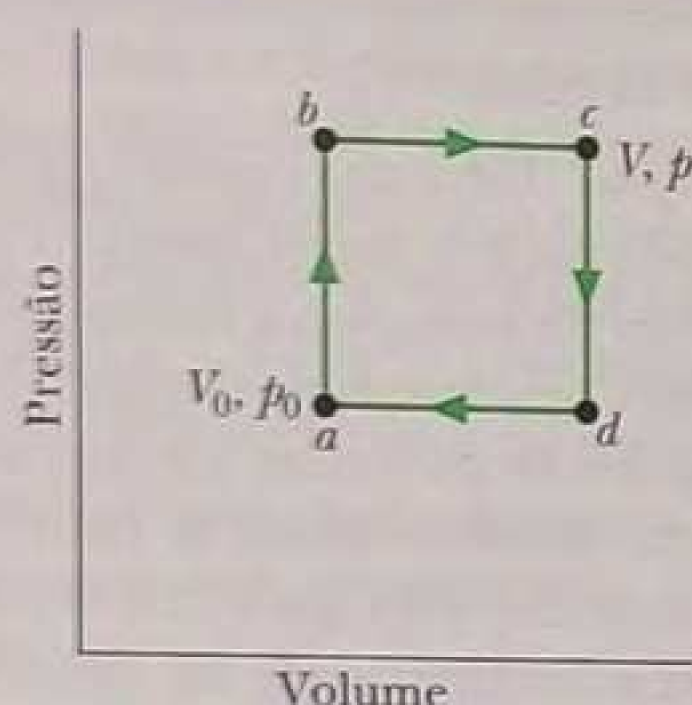


Figura 20-27 Problema 29.

••30 Uma máquina de Carnot de 500 W opera entre fontes de calor a temperaturas constantes de 100°C e 60,0°C. Qual é a taxa com a qual a energia é (a) absorvida pela máquina na forma de calor e (b) rejeitada pela máquina na forma de calor?

••31 A eficiência de um motor de automóvel é 25% quando o motor realiza um trabalho de 8,2 kJ por ciclo. Suponha que o processo é reversível. Determine (a) a energia Q_{ganho} que o motor ganha por ciclo em forma de calor graças à queima do combustível e (b) a energia $Q_{perdido}$ que o motor perde por ciclo em forma de calor por causa do atrito. Se uma regulagem do motor aumenta a eficiência para 31%, qual é o novo valor (c) de Q_{ganho} e (d) de $Q_{perdido}$ para o mesmo valor do trabalho realizado por ciclo?

••32 Uma máquina de Carnot é projetada para realizar um certo trabalho W por ciclo. Em cada ciclo, uma energia Q_Q na forma de calor é transferida para a substância de trabalho da máquina a partir da fonte quente, que está a uma temperatura ajustável T_Q. A fonte fria é mantida à temperatura $T_F = 250$ K. A Fig. 20-28 mostra o valor de Q_Q em função de T_Q. A escala do eixo vertical é definida por $Q_{Qs} = 6{,}0$ kJ. Se T_Q é ajustada para 550 K, qual é o valor de Q_Q?

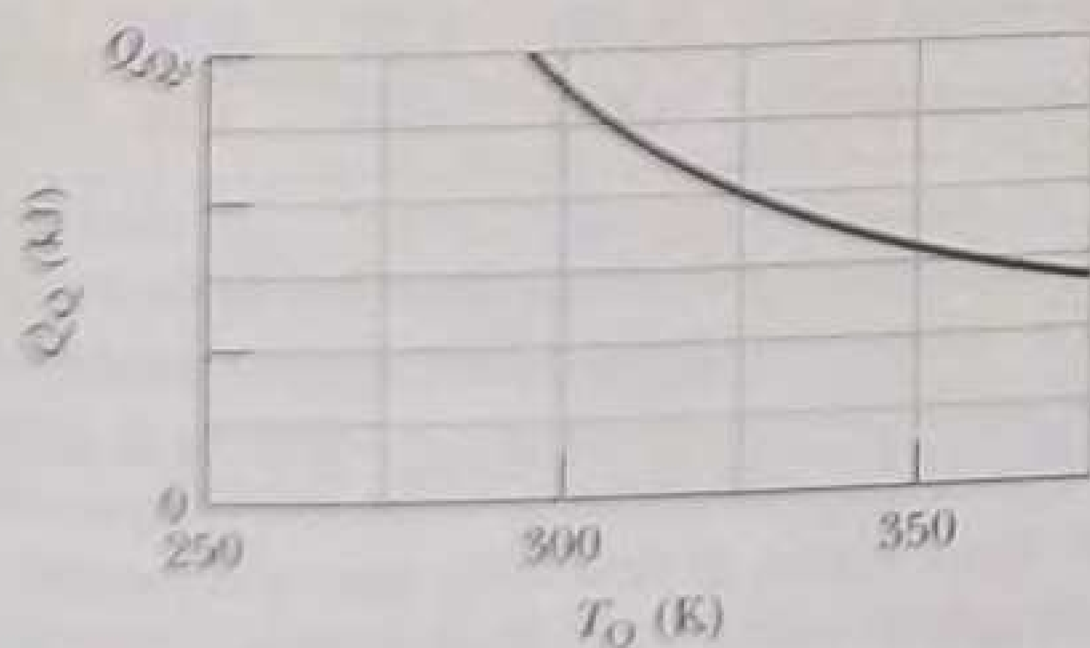


Figura 20-28 Problema 32.

••33 A Fig. 20-29 mostra um ciclo reversível a que é submetido 1,00 mol de um gás monoatômico ideal. O volume $V_c = 8{,}00V_b$. O processo bc é uma expansão adiabática, com $p_b = 10{,}0$ atm e $V_b = 1{,}00 \times 10^{-3}$ m^3. Determine, para o ciclo completo, (a) a energia fornecida ao gás na forma de calor, (b) a energia liberada pelo gás na forma de calor e (c) o trabalho líquido realizado pelo gás. (d) Calcule a eficiência do ciclo.

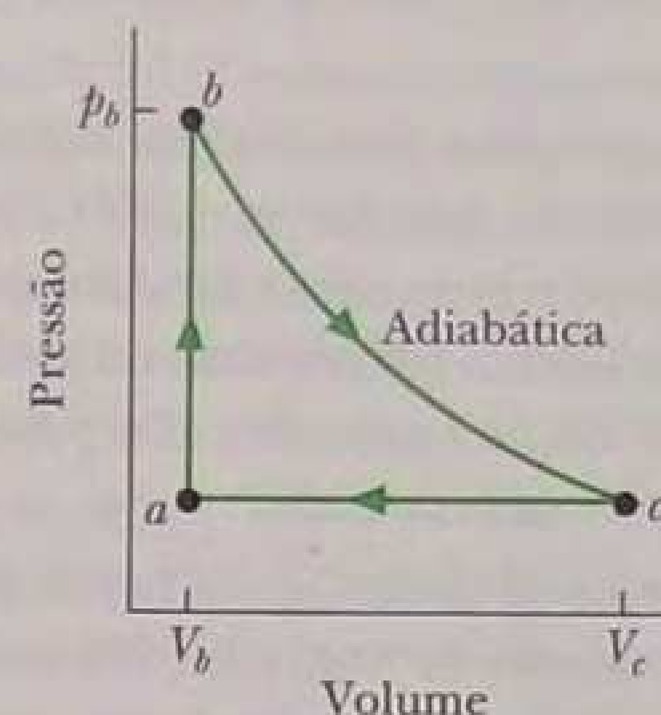


Figura 20-29 Problema 33.

••34 Um gás ideal (1,0 mol) é a substância de trabalho de uma máquina térmica que descreve o ciclo mostrado na Fig. 20-30. Os processos BC e DA são reversíveis e adiabáticos. (a) O gás é monoatômico, diatômico ou poliatômico? (b) Qual é a eficiência da máquina?

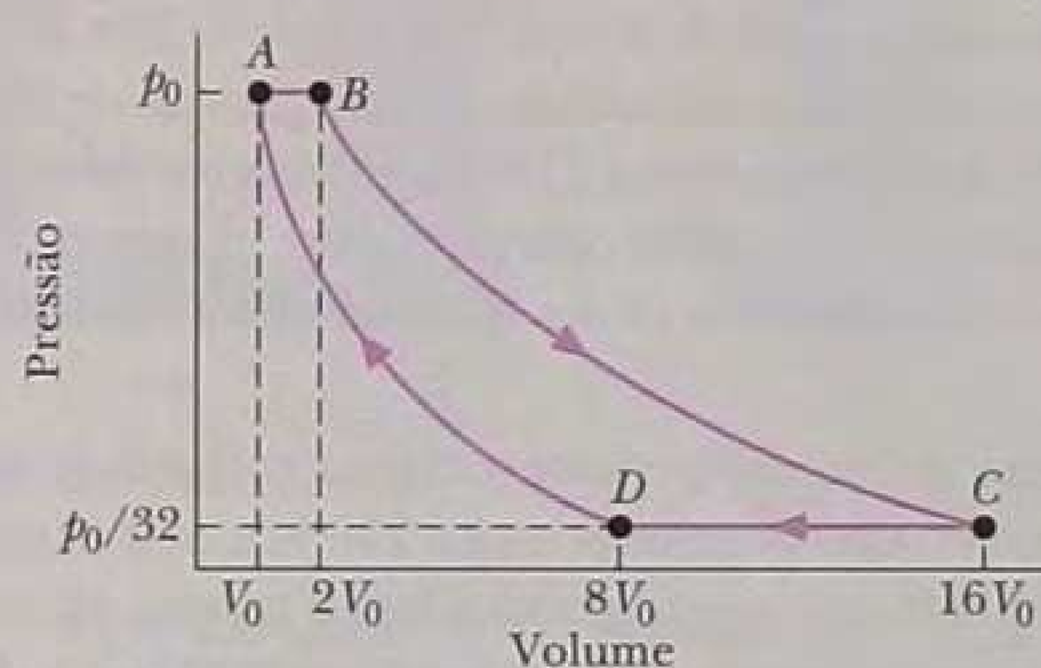


Figura 20-30 Problema 34.

•••35 O ciclo da Fig. 20-31 representa a operação de um motor de combustão interna a gasolina. O volume $V_3 = 4{,}00V_1$. Suponha que a mistura de admissão gasolina–ar é um gás ideal com $\gamma = 1{,}30$. Qual é a razão (a) T_2/T_1, (b) T_3/T_1, (c) T_4/T_1, (d) p_3/p_1 e (e) p_4/p_1? (f) Qual é a eficiência do motor?

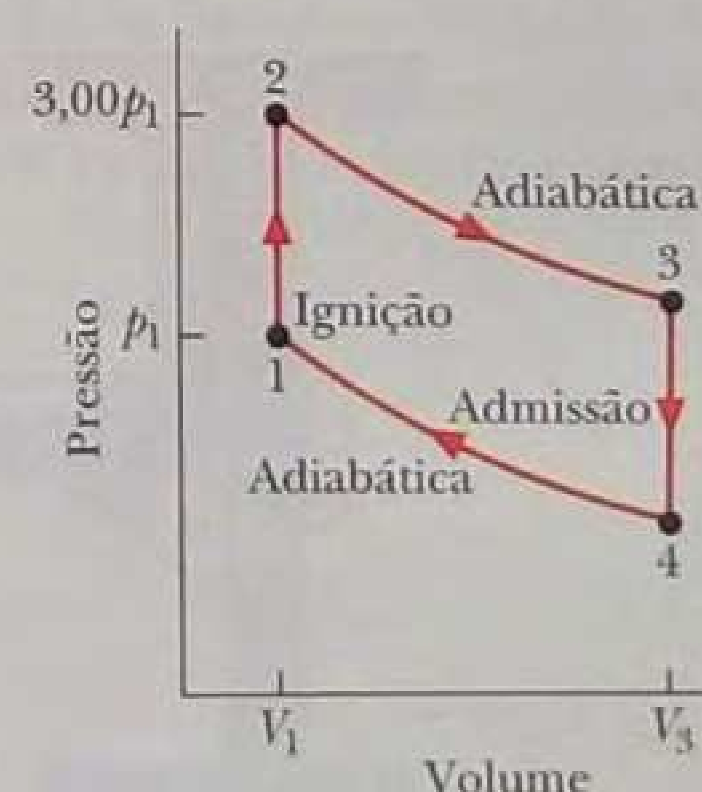


Figura 20-31 Problema 35.

Seção 20-6 Entropia no Mundo Real: Refrigeradores

•36 Qual deve ser o trabalho realizado por um refrigerador de Carnot para transferir 1,0 J na forma de calor (a) de uma fonte de calor a 7,0°C para uma fonte de calor a 27°C, (b) de uma fonte a −73°C para uma a 27°C, (c) de uma fonte a −173°C para uma a 27°C e (d) de uma fonte a −223°C para uma a 27°C?

•37 Uma bomba térmica é usada para aquecer um edifício. A temperatura externa é −5,0°C e a temperatura no interior do edifício

deve ser mantida em 22°C. O coeficiente de desempenho da bomba é 3,8 e a bomba térmica fornece 7,54 MJ por hora ao edifício na forma de calor. Se a bomba térmica é uma máquina de Carnot trabalhando no sentido inverso, qual deve ser a potência de operação da bomba?

•38 O motor elétrico de uma bomba térmica transfere energia na forma de calor do exterior, que está a −5,0°C, para uma sala que está a 17°C. Se a bomba térmica fosse uma bomba térmica de Carnot (uma máquina de Carnot trabalhando no sentido inverso), que energia seria transferida na forma de calor para a sala para cada joule de energia elétrica consumida?

•39 Um condicionador de ar de Carnot extrai energia térmica de uma sala a 70°F e a transfere na forma de calor para o ambiente, que está a 96°F. Para cada joule da energia elétrica necessária para operar o condicionador de ar, quantos joules são removidos da sala?

•40 Para fazer gelo, um refrigerador, que é o inverso de uma máquina de Carnot, extrai 42 kJ na forma de calor a −15°C durante cada ciclo, com um coeficiente de desempenho de 5,7. A temperatura ambiente é 30,3°C. Qual é (a) a energia por ciclo fornecida ao ambiente na forma de calor e (b) o trabalho por ciclo necessário para operar o refrigerador?

••41 Um condicionador de ar operando entre 93°F e 70°F é especificado como tendo uma capacidade de refrigeração de 4000 Btu/h. O coeficiente de desempenho é 27% do coeficiente de desempenho de um refrigerador de Carnot operando entre as mesmas temperaturas. Qual é a potência do motor do condicionador de ar em horsepower?

••42 O motor de um refrigerador tem uma potência de 200 W. Se o compartimento do congelador está a 270 K e o ar externo está a 300 K, e supondo que o refrigerador tem a mesma eficiência que um refrigerador de Carnot, qual é a quantidade máxima de energia que pode ser extraída na forma de calor do compartimento do congelador em 10,0 min?

••43 A Fig. 20-32 mostra uma máquina de Carnot que trabalha entre as temperaturas T_1 = 400 K e T_2 = 150 K e alimenta um refrigerador de Carnot que trabalha entre as temperaturas T_3 = 325 K e T_4 = 225 K. Qual é a razão Q_3/Q_1?

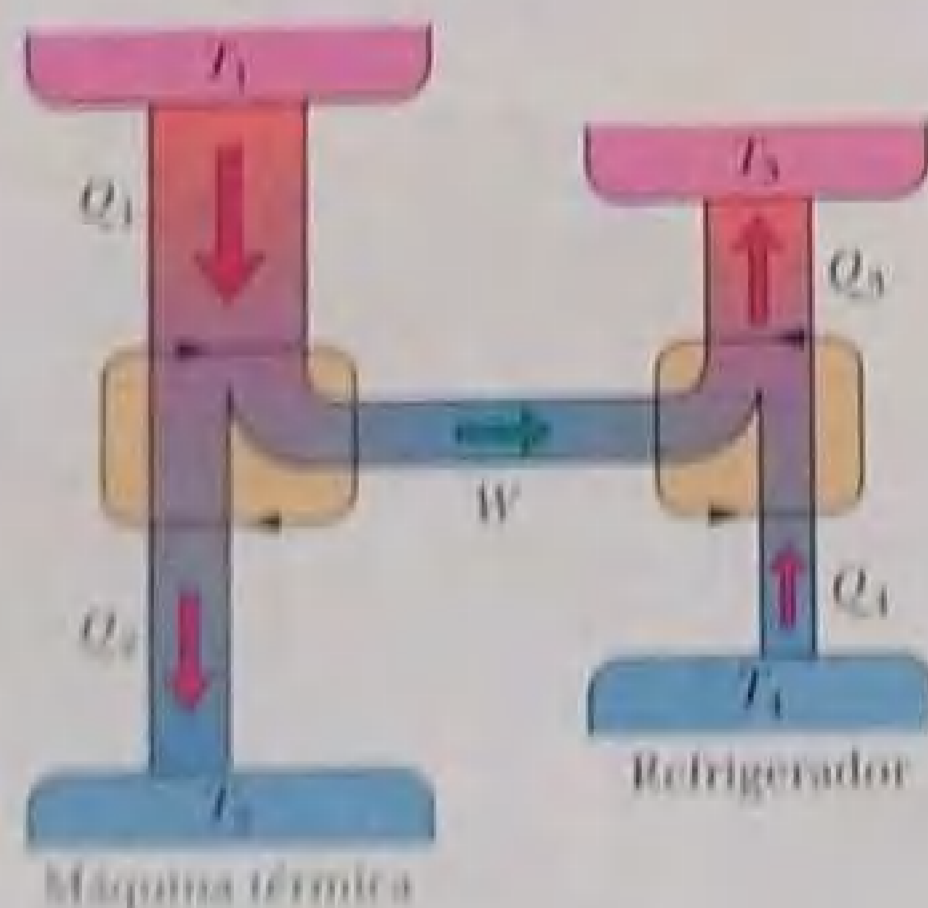


Figura 20-32 Problema 43.

••44 (a) Durante cada ciclo, uma máquina de Carnot absorve 750 J na forma de calor de uma fonte quente a 360 K, com a fonte fria a 280 K. Qual é o trabalho realizado por ciclo? (b) A máquina é operada no sentido inverso para funcionar como um refrigerador de Carnot entre as mesmas fontes. Que trabalho é necessário, durante um ciclo, para remover 1200 J da fonte fria na forma de calor?

Seção 20-8 Uma Visão Estatística da Entropia

•45 Construa uma tabela como a Tabela 20-1 para oito moléculas.

••46 Uma caixa contém N moléculas iguais de um gás, igualmente divididas nos dois lados da caixa. Qual é, para N = 50, (a) a multiplicidade W da configuração central, (b) o número total de microestados e (c) a porcentagem do tempo que o sistema passa na configuração central? Qual é, para N = 100, (d) a multiplicidade W da configuração central, (e) o número total de microestados e (f) a porcentagem do tempo que o sistema passa na configuração central? Qual é, para N = 200, (g) a multiplicidade W da configuração central, (h) o número total de microestados e (i) a porcentagem do tempo que o sistema passa na configuração central? (j) O tempo que o sistema passa na configuração central aumenta ou diminui quando N aumenta?

•••47 Uma caixa contém N moléculas de um gás. A caixa é dividida em três partes iguais. (a) Por extensão da Eq. 20-20, escreva uma fórmula para a multiplicidade de qualquer configuração dada. (b) Considere duas configurações: a configuração A, com números iguais de moléculas nas três divisões da caixa, e a configuração B, com números iguais de moléculas em cada lado da caixa dividida em duas partes iguais em vez de em três. Qual é a razão W_A/W_B entre a multiplicidade da configuração A e a da configuração B? (c) Calcule W_A/W_B para N = 100. (Como 100 não é divisível por 3, ponha 34 moléculas em uma das três partes da configuração A e 33 moléculas nas duas outras partes.)

Problemas Adicionais

48 Quatro partículas estão na caixa isolada da Fig. 20-17. Qual é (a) a menor multiplicidade, (b) a maior multiplicidade, (c) a menor entropia e (d) a maior entropia do sistema de quatro partículas?

49 Uma barra cilíndrica de cobre com 1,50 m de comprimento e 2,00 cm de raio é isolada para impedir a perda de calor através da superfície lateral. Uma das extremidades é colocada em contato com uma fonte de calor a 300°C; a outra é colocada em contato com uma fonte de calor a 30,0°C. Qual é a taxa de aumento de entropia do sistema barra–fontes?

50 Suponha que 0,550 mol de um gás ideal seja expandido isotérmica e reversivelmente nas quatro situações da tabela abaixo. Qual é a variação de entropia do gás para cada situação?

Situação	(a)	(b)	(c)	(d)
Temperatura (K)	250	350	400	450
Volume inicial (cm^3)	0,200	0,200	0,300	0,300
Volume final (cm^3)	0,800	0,800	1,20	1,20

51 Quando uma amostra de nitrogênio (N_2) sofre um aumento de temperatura a volume constante, a distribuição de velocidades das moléculas se altera, ou seja, a função distribuição de probabilidade $P(v)$ da velocidade das moléculas se torna mais larga, como mostra a Fig. 19-8b. Uma forma de descrever esse alargamento de $P(v)$ é medir a diferença Δv entre a velocidade mais provável v_P e a velocidade média quadrática v_{rms}. Quando $P(v)$ se estende para velocidades maiores, Δv aumenta. Suponha que o gás é ideal e que as moléculas de N_2 giram, mas não oscilam. Para 1,5 mol de N_2, uma temperatura inicial de 250 K e uma temperatura final de 500 K, qual é (a) a diferença inicial Δv_i, (b) a diferença final Δv_f e (c) a variação de entropia ΔS do gás?

52 Suponha que 1,0 mol de um gás monoatômico ideal inicialmente ocupando um volume de 10 L e a uma temperatura de 300 K seja aquecido a volume constante até 600 K, liberado para se expandir isotermicamente até a pressão inicial e, finalmente, contraído à pressão constante até os valores iniciais de volume, pressão e temperatura. Durante o ciclo, qual é (a) a energia líquida introduzida no sistema (o gás) na forma de calor e (b) o trabalho líquido realizado pelo gás? (c) Qual é a eficiência do ciclo?

53 Suponha que um poço profundo seja cavado na crosta terrestre perto de um dos polos, onde a temperatura da superfície é $-40°C$, até uma profundidade onde a temperatura é 800°C. (a) Qual é o limite teórico para a eficiência de uma máquina térmica operando entre as duas temperaturas? (b) Se toda a energia liberada na forma de calor na fonte fria fosse usada para derreter gelo que se encontra inicialmente a $-40°C$, a que taxa água líquida a 0°C poderia ser produzida por uma usina de energia elétrica de 100 MW (trate-a como uma máquina térmica)? O calor específico do gelo é 2220 J/kg · K; o calor de fusão da água é 333 kJ/kg. (Observe que, nesse caso, a máquina térmica opera efetivamente entre 0°C e 800°C. Uma energia liberada a $-40°C$ não pode aquecer nada acima de $-40°C$.)

54 Qual é a variação de entropia para 3,20 mols de um gás monoatômico ideal que sofrem um aumento reversível de temperatura de 380 K para 425 K a volume constante?

55 Um lingote de cobre de 600 g a 80,0°C é colocado em 70,0 g de água a 10,0°C em um recipiente isolado. (Os calores específicos estão na Tabela 18-3.) (a) Qual é a temperatura de equilíbrio do sistema cobre–água? Que variação de entropia (b) o cobre, (c) a água e (d) o sistema cobre–água sofrem até atingirem a temperatura de equilíbrio?

56 A Fig. 20-33 mostra o módulo F da força em função da distensão x de um elástico, com a escala do eixo F definida por $F_s = 1{,}50$ N e a escala do eixo x definida por $x_s = 3{,}50$ cm. A temperatura é 2,00°C. Quando o elástico é distendido de $x = 1{,}70$ cm, qual é a taxa de variação da entropia do elástico com a distensão para pequenas distensões?

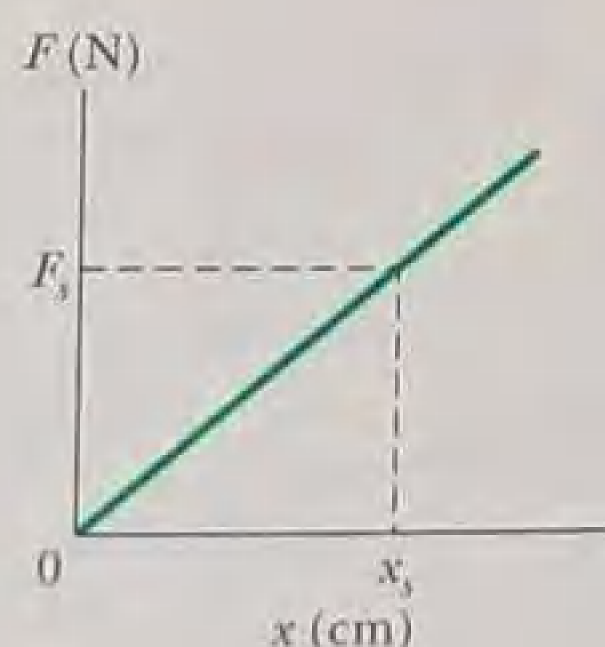


Figura 20-33 Problema 56.

57 A temperatura de 1,00 mol de um gás monoatômico ideal é elevada reversivelmente de 300 K para 400 K, com o volume mantido constante. Qual é a variação da entropia do gás?

58 Repita o Problema 57 supondo que a pressão do gás é mantida constante.

59 Uma amostra de 0,600 kg de água está inicialmente na forma de gelo à temperatura de $-20°C$. Qual é a variação de entropia da amostra se a temperatura aumenta para 40°C?

60 Um ciclo de três etapas é realizado por 3,4 mols de um gás diatômico ideal: (1) a temperatura do gás é aumentada de 200 K para 500 K a volume constante; (2) o gás é expandido isotermicamente até a pressão original; (3) o gás é contraído à pressão constante de volta ao volume original. Durante o ciclo, as moléculas giram, mas não oscilam. Qual é a eficiência do ciclo?

61 Um inventor construiu uma máquina térmica X que, segundo ele, possui uma eficiência ε_X maior que a eficiência ε de uma máquina térmica ideal operando entre as mesmas temperaturas. Suponhamos que a máquina X seja acoplada a um refrigerador de Carnot (Fig. 20-34*a*) e os tempos do refrigerador de Carnot sejam ajustados para que o trabalho necessário por ciclo seja igual ao que é realizado pela máquina X. Trate o conjunto máquina X–refrigerador como um único sistema e mostre que, se a alegação do inventor fosse verdadeira (ou seja, se $\varepsilon_X > \varepsilon$), o conjunto se comportaria como um refrigerador perfeito (Fig. 20-34*b*), transferindo energia na forma de calor do reservatório frio para o reservatório quente sem necessidade de realizar trabalho.

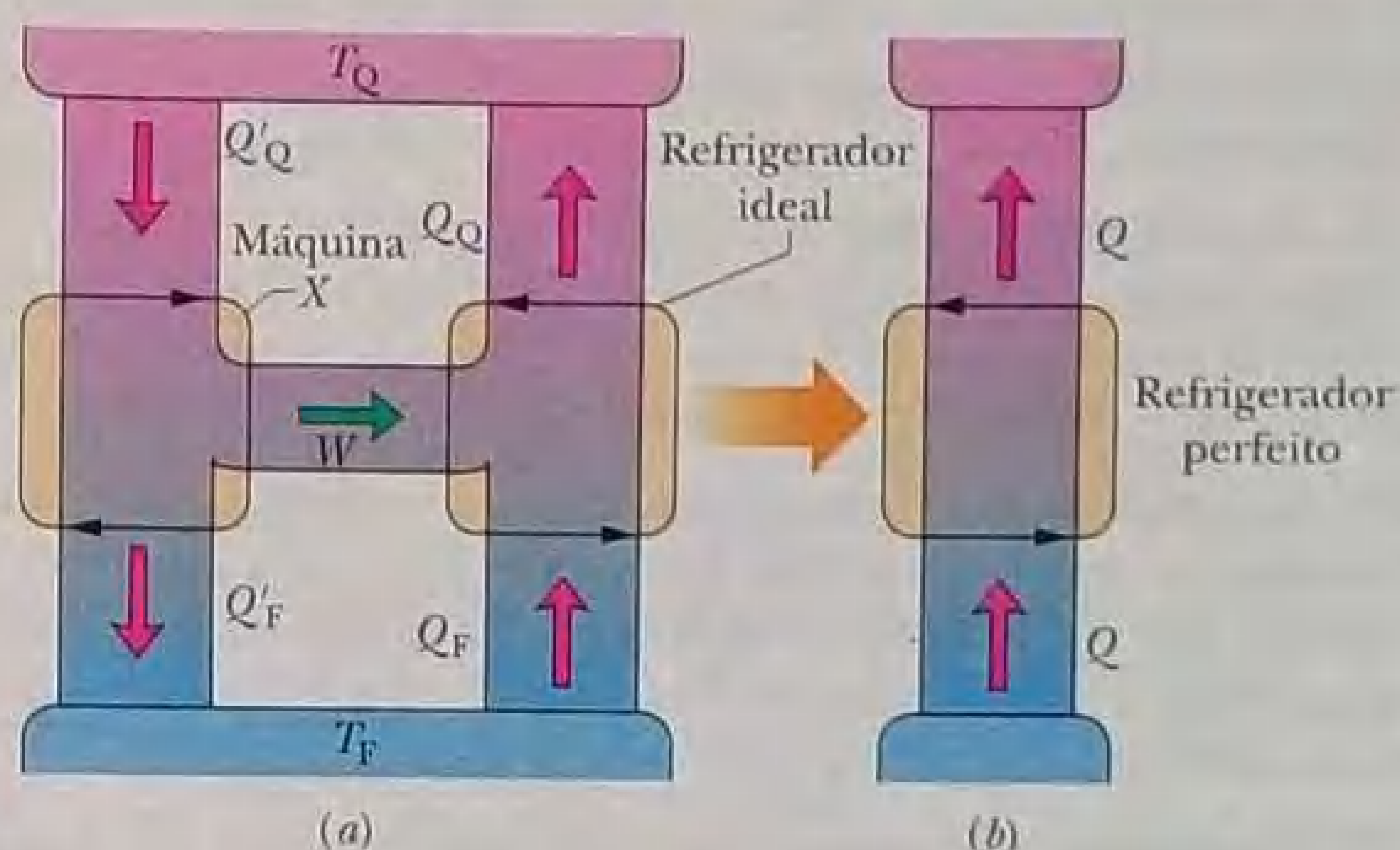


Figura 20-34 Problema 61.

62 Suponha que 2,00 mols de um gás diatômico ideal sejam submetidos reversivelmente ao ciclo mostrado no diagrama T-S da Fig. 20-35, onde $S_1 = 6{,}00$ J/K e $S_2 = 8{,}00$ J/K. As moléculas não giram nem oscilam. Qual é a energia transferida na forma de calor Q (a) na trajetória $1 \rightarrow 2$, (b) na trajetória $2 \rightarrow 3$ e (c) no ciclo completo? (d) Qual é o trabalho W para o processo isotérmico? O volume V_1 no estado 1 é 0,200 m³. Qual é o volume (e) no estado 2 e (f) no estado 3?

Qual é a variação ΔE_{int} (g) na trajetória $1 \rightarrow 2$, (h) na trajetória $2 \rightarrow 3$ e (i) no ciclo completo? (*Sugestão:* o item (h) pode ser resolvido em uma ou duas linhas de cálculos usando os resultados da Seção 19-8 ou em uma página de cálculos usando os resultados da Seção 19-11.) (j) Qual é o trabalho W para o processo adiabático?

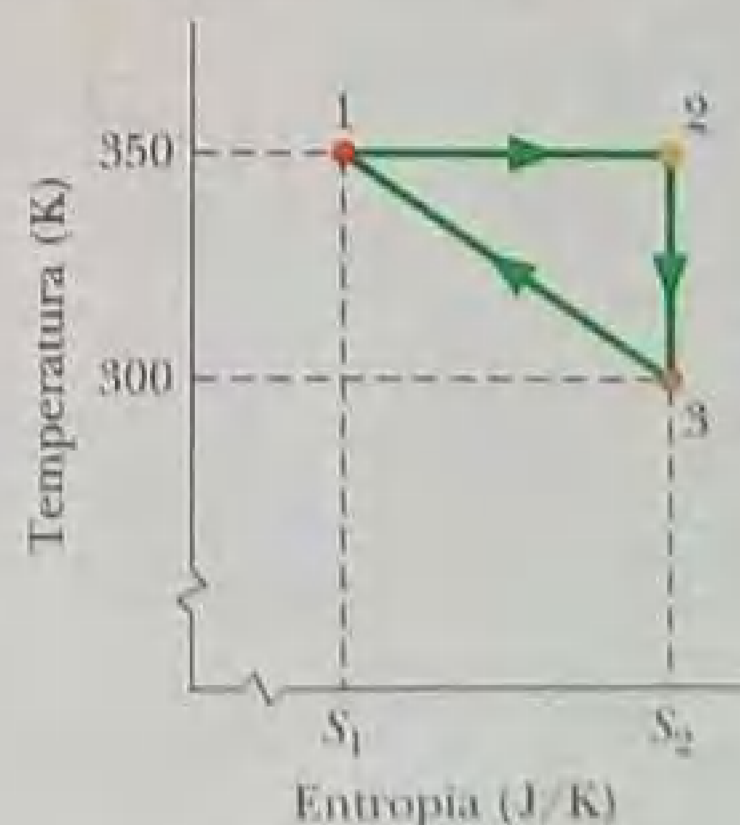


Figura 20-35 Problema 62.

63 Um ciclo de três etapas é executado reversivelmente por 4,00 mols de um gás ideal: (1) uma expansão adiabática que dá ao gás 2,00 vezes o volume inicial, (2) um processo a volume constante, (3) uma compressão isotérmica de volta ao estado inicial do gás. Não

sabemos se o gás é monoatômico ou diatômico; se for diatômico, não sabemos se as moléculas estão girando ou oscilando. Qual é a variação de entropia (a) para o ciclo, (b) para o processo 1, (c) para o processo 3 e (d) para o processo 2?

64 (a) Uma máquina de Carnot opera entre uma fonte quente a 320 K e uma fonte fria a 260 K. Se a máquina absorve 500 J da fonte quente por ciclo na forma de calor, qual é o trabalho realizado por ciclo? (b) Se a máquina opera como um refrigerador entre as mesmas fontes, que trabalho por ciclo deve ser fornecido para remover 1000 J da fonte fria na forma de calor?

65 2,00 mols de um gás diatômico inicialmente a 300 K realizam o seguinte ciclo: o gás é (1) aquecido a volume constante até 800 K, (2) liberado para se expandir isotermicamente até a pressão inicial, (3) contraído à pressão constante para o estado inicial. Supondo que as moléculas do gás nem giram nem oscilam, determine (a) a energia líquida transferida para o gás em forma de calor, (b) o trabalho líquido realizado pelo gás e (c) a eficiência do ciclo.

66 Um refrigerador ideal realiza 150 J de trabalho para remover 560 J do compartimento frio na forma de calor. (a) Qual é o coeficiente de desempenho do refrigerador? (b) Qual é a quantidade de energia liberada para a cozinha por ciclo na forma de calor?

67 Suponha que 260 J sejam conduzidos de uma fonte à temperatura constante de 400 K para uma fonte (a) a 100 K, (b) a 200 K, (c) a 300 K e (d) a 360 K. Qual é a variação líquida da entropia das fontes, $\Delta S_{líq}$, em cada caso? (e) Quando a diferença entre as temperaturas das fontes diminui, $\Delta S_{líq}$ aumenta, diminui ou permanece a mesma?

68 Um liquefator de hélio está em uma sala mantida a 300 K. Se o hélio está a 4,0 K, qual é o valor mínimo da razão Q_{sala}/Q_{He}, onde Q_{sala} é a energia fornecida à sala na forma de calor e Q_{He} é a energia removida do hélio na forma de calor?

69 Uma barra de latão está em contato térmico com uma fonte de calor a uma temperatura constante de 130°C em uma extremidade e com uma fonte de calor a uma temperatura constante de 24,0°C na outra extremidade. (a) Calcule a variação total da entropia do sistema barra–fontes quando 5030 J de energia são transferidos de uma fonte para a outra através da barra. (b) A entropia da barra varia?

70 Um bloco de tungstênio de 45,0 g a 30,0°C e um bloco de prata de 25,0 g a −120°C são colocados juntos em um recipiente isolado. (Os calores específicos estão na Tabela 18-3.) (a) Qual é a temperatura de equilíbrio? Que variação de entropia (b) o tungstênio, (c) a prata e (d) o sistema tungstênio–prata sofrem até atingirem a temperatura de equilíbrio?

71 Uma caixa contém N moléculas. Considere duas configurações: a configuração A, com uma divisão igual de moléculas entre os dois lados da caixa, e a configuração B, com 60,0% das moléculas no lado esquerdo e 40,0% no lado direito. Para $N = 50$, qual é (a) a multiplicidade W_A da configuração A, (b) a multiplicidade W_B da configuração B e (c) a razão $f_{B/A}$ entre o tempo que o sistema passa na configuração B e o tempo que o sistema passa na configuração A? Para $N = 100$, qual é (d) W_A, (e) W_B e (f) $f_{B/A}$? Para $N = 200$, qual é (g) W_A, (h) W_B e (i) $f_{B/A}$? (j) Com o aumento de N, f aumenta, diminui ou permanece constante?

72 Calcule a eficiência de uma usina de combustível fóssil que consome 380 toneladas métricas de carvão por hora para produzir trabalho útil à taxa de 750 MW. O calor de combustão do carvão (calor produzido pela queima do carvão) é 28 MJ/kg.

73 Um refrigerador de Carnot extrai 35,0 kJ na forma de calor durante cada ciclo, operando com um coeficiente de desempenho de 4,60. Qual é (a) a energia transferida para o ambiente por ciclo e (b) o trabalho realizado por ciclo?

74 Uma máquina de Carnot cuja fonte quente está a 400 K tem uma eficiência de 30,0%. De quanto deve mudar a temperatura da fonte fria para que a eficiência aumente para 40,0%?

75 O sistema A de três partículas e o sistema B de cinco partículas estão em caixas isoladas como as da Fig. 20-17. Qual é a menor multiplicidade W (a) do sistema A e (b) do sistema B? Qual é a maior multiplicidade (c) do sistema A e (d) do sistema B? Qual é a maior entropia (e) do sistema A e (f) do sistema B?

O Sistema Internacional de Unidades (SI)*

Tabela 1

As Unidades Fundamentais do SI

Grandeza	Nome	Símbolo	Definição
comprimento	metro	m	"... a distância percorrida pela luz no vácuo em 1/299.792.458 de segundo." (1983)
massa	quilograma	kg	"... este protótipo [um certo cilindro de platina–irídio] será considerado daqui em diante como a unidade de massa." (1889)
tempo	segundo	s	"... a duração de 9.192.631.770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio-133." (1967)
corrente elétrica	ampère	A	"... a corrente constante, que, se mantida em dois condutores paralelos retos de comprimento infinito, de seção transversal circular desprezível e separados por um distância de 1 m no vácuo, produziria entre estes condutores uma força igual a 2×10^{-7} newton por metro de comprimento." (1946)
temperatura termodinâmica	kelvin	K	"... a fração 1/273,16 da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água." (1967)
quantidade de matéria	mol	mol	"... a quantidade de matéria de um sistema que contém um número de entidades elementares igual ao número de átomos que existem em 0,012 quilograma de carbono-12." (1971)
intensidade luminosa	candela	cd	"... a intensidade luminosa, em uma dada direção, de uma fonte que emite radiação monocromática de frequência 540×10^{2} hertz e que irradia nesta direção com uma intensidade de 1/683 watt por esferorradiano." (1979)

*Adaptado de "The International System of Units (SI)", Publicação Especial 330 do National Bureau of Standards, edição de 2008. As definições aqui descritas foram adotadas pela Conferência Nacional de Pesos e Medidas, um órgão internacional, nas datas indicadas. A candela não é usada neste livro.

Tabela 2

Algumas Unidades Secundárias do SI

Grandeza	Nome da Unidade	Símbolo	
área	metro quadrado	m^2	
volume	metro cúbico	m^3	
frequência	hertz	Hz	s^{-1}
massa específica	quilograma por metro cúbico	kg/m^3	
velocidade escalar, velocidade	metro por segundo	m/s	
velocidade angular	radiano por segundo	rad/s	
aceleração	metro por segundo ao quadrado	m/s^2	
aceleração angular	radiano por segundo ao quadrado	rad/s^2	
força	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
pressão	pascal	Pa	N/m^2
trabalho, energia, quantidade de calor	joule	J	$N \cdot m$
potência	watt	W	J/s
quantidade de carga elétrica	coulomb	C	$A \cdot s$
diferença de potencial, força eletromotriz	volt	V	W/A
intensidade de campo elétrico	volt por metro (ou newton por coulomb)	V/m	N/C
resistência elétrica	ohm	Ω	V/A
capacitância	farad	F	$A \cdot s/V$
fluxo magnético	weber	Wb	$V \cdot s$
indutância	henry	H	$V \cdot s/A$
densidade de fluxo magnético	tesla	T	Wb/m^2
intensidade de campo magnético	ampère por metro	A/m	
entropia	joule por kelvin	J/K	
calor específico	joule por quilograma-kelvin	$J/(kg \cdot K)$	
condutividade térmica	watt por metro-kelvin	$W/(m \cdot K)$	
intensidade radiante	watt por esferorradiano	W/sr	

Tabela 3

As Unidades Suplementares do SI

Grandeza	Nome da Unidade	Símbolo
ângulo plano	radiano	rad
ângulo sólido	esferorradiano	sr

Algumas Constantes Fundamentais da Física*

Constante	Símbolo	Valor Prático	Melhor Valor (2006)	
			Valor[a]	Incerteza[b]
Velocidade da luz no vácuo	c	$3,00 \times 10^{8}$ m/s	2,997 924 58	exata
Carga elementar	e	$1,60 \times 10^{-19}$ C	1,602 176 487	0,025
Constante gravitacional	G	$6,67 \times 10^{-11}$ m³/s² · kg	6,674 28	100
Constante universal dos gases	R	8,31 J/mol · K	8,314 472	1,7
Constante de Avogadro	N_A	$6,02 \times 10^{23}$ mol^{-1}	6,022 141 79	0,050
Constante de Boltzmann	k	$1,38 \times 10^{-23}$ J/K	1,380 650 4	1,7
Constante de Stefan–Boltzmann	σ	$5,67 \times 10^{-8}$ W/m² · K⁴	5,670 400	7,0
Volume molar de um gás ideal nas CNTP[c]	V_m	$2,27 \times 10^{-2}$ m³/mol	2,271 098 1	1,7
Constante elétrica	ϵ_0	$8,85 \times 10^{-12}$ F/m	8,854 187 817 62	exata
Constante magnética	μ_0	$1,26 \times 10^{-6}$ H/m	1,256 637 061 43	exata
Constante de Planck	h	$6,63 \times 10^{-34}$ J · s	6,626 068 96	0,050
Massa do elétron[d]	m_e	$9,11 \times 10^{-31}$ kg	9,109 382 15	0,050
		$5,49 \times 10^{-4}$ u	5,485 799 094 3	$4,2 \times 10^{-4}$
Massa do próton[d]	m_p	$1,67 \times 10^{-27}$ kg	1,672 621 637	0,050
		1,0073 u	1,007 276 466 77	$1,0 \times 10^{-4}$
Razão entre a massa do próton e a massa do elétron	m_p/m_e	1840	1836,152 672 47	$4,3 \times 10^{-4}$
Razão entre a massa e a carga do elétron	e/m_e	$1,76 \times 10^{11}$ C/kg	1,758 820 150	0,025
Massa do nêutron[d]	m_n	$1,68 \times 10^{-27}$ kg	1,674 927 211	0,050
		1,0087 u	1,008 664 915 97	$4,3 \times 10^{-4}$
Massa do átomo de hidrogênio[d]	$m_{^1H}$	1,0078 u	1,007 825 031 6	0,0005
Massa do átomo de deutério[d]	$m_{^2H}$	2,0136 u	2,013 553 212 724	$3,9 \times 10^{-5}$
Massa do átomo de hélio[d]	$m_{^4He}$	4,0026 u	4,002 603 2	0,067
Massa do múon	m_μ	$1,88 \times 10^{-28}$ kg	1,883 531 30	0,056
Momento magnético do elétron	μ_e	$9,28 \times 10^{-24}$ J/T	9,284 763 77	0,025
Momento magnético do próton	μ_p	$1,41 \times 10^{-26}$ J/T	1,410 606 662	0,026
Magnéton de Bohr	μ_B	$9,27 \times 10^{-24}$ J/T	9,274 009 15	0,025
Magnéton nuclear	μ_N	$5,05 \times 10^{-27}$ J/T	5,050 783 24	0,025
Raio de Bohr	a	$5,29 \times 10^{-11}$ m	5,291 772 085 9	$6,8 \times 10^{-4}$
Constante de Rydberg	R	$1,10 \times 10^{7}$ m^{-1}	1,097 373 156 852 7	$6,6 \times 10^{-6}$
Comprimento de onda de Compton do elétron	λ_C	$2,43 \times 10^{-12}$ m	2,426 310 217 5	0,0014

[a]Os valores desta coluna têm a mesma unidade e potência de 10 que o valor prático.
[b]Partes por milhão.
[c]CNTP significa condições normais de temperatura e pressão: 0°C e 1,0 atm (0,1 MPa).
[d]As massas dadas em u estão em unidades unificadas de massa atômica: 1 u 5× $1,660\ 538\ 782 \times 10^{-27}$ kg.

*Os valores desta tabela foram selecionados entre os valores recomendados pelo CODATA em 2006 (www.physics.nist.gov).

APÊNDICE C

Alguns Dados Astronômicos

Algumas Distâncias da Terra

À Lua*	$3{,}82 \times 10^{8}$ m	Ao centro da nossa galáxia	$2{,}2 \times 10^{20}$ m
Ao Sol*	$1{,}50 \times 10^{11}$ m	À galáxia de Andrômeda	$2{,}1 \times 10^{22}$ m
À estrela mais próxima (Proxima Centauri)	$4{,}04 \times 10^{16}$ m	Ao limite do universo observável	$\sim 10^{26}$ m

*Distância média.

O Sol, a Terra e a Lua

Propriedade	Unidade	Sol	Terra	Lua
Massa	kg	$1{,}99 \times 10^{30}$	$5{,}98 \times 10^{24}$	$7{,}36 \times 10^{22}$
Raio médio	m	$6{,}96 \times 10^{8}$	$6{,}37 \times 10^{6}$	$1{,}74 \times 10^{6}$
Massa específica média	kg/m^3	1410	5520	3340
Aceleração de queda livre na superfície	m/s^2	274	9,81	1,67
Velocidade de escape	km/s	618	11,2	2,38
Período de rotação[a]	—	37 dias nos polos[b] 26 dias no equador[b]	23 h 56 min	27,3 d
Potência de radiação[c]	W	$3{,}90 \times 10^{26}$		

[a]Medido em relação às estrelas distantes.
[b]O Sol, uma bola de gás, não gira como um corpo rígido.
[c]Perto dos limites da atmosfera terrestre, a energia solar é recebida a uma taxa de 1340 W/m^2, supondo uma incidência normal.

Algumas Propriedades dos Planetas

	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno	Plutão*
Distância média do Sol, 10^6 km	57,9	108	150	228	778	1430	2870	4500	5900
Período de revolução, anos	0,241	0,615	1,00	1,88	11,9	29,5	84,0	165	248
Período de rotação[a], dias	58,7	−243[b]	0,997	1,03	0,409	0,426	−0,451[b]	0,658	6,39
Velocidade orbital, km/s	47,9	35,0	29,8	24,1	13,1	9,64	6,81	5,43	4,74
Inclinação do eixo em relação à órbita	<28°	≈3°	23,4°	25,0°	3,08°	26,7°	97,9°	29,6°	57,5°
Inclinação da órbita em relação à órbita da Terra	7,00°	3,39°		1,85°	1,30°	2,49°	0,77°	1,77°	17,2°
Excentricidade da órbita	0,206	0,0068	0,0167	0,0934	0,0485	0,0556	0,0472	0,0086	0,250
Diâmetro equatorial, km	4880	12 100	12 800	6790	143 000	120 000	51 800	49 500	2300
Massa (Terra = 1)	0,0558	0,815	1,000	0,107	318	95,1	14,5	17,2	0,002
Densidade (água = 1)	5,60	5,20	5,52	3,95	1,31	0,704	1,21	1,67	2,03
Valor de g na superfície[c], m/s^2	3,78	8,60	9,78	3,72	22,9	9,05	7,77	11,0	0,5
Velocidade de escape[c], km/s	4,3	10,3	11,2	5,0	59,5	35,6	21,2	23,6	1,3
Satélites conhecidos	0	0	1	2	63 + anéis	60 + anéis	27 + anéis	13 + anéis	3

[a]Medido em relação às estrelas distantes.
[b]Vênus e Urano giram no sentido contrário ao do movimento orbital.
[c]Aceleração gravitacional medida no equador do planeta.

*Desde 2008, por decisão da União Astronômica Internacional, Plutão não é mais um planeta e sim um plutoide, uma nova classe de astro que, até o momento, tem apenas dois representantes: Plutão e Eris. (N.T.)

Fatores de Conversão

Os fatores de conversão podem ser lidos diretamente destas tabelas. Assim, por exemplo, 1 grau = $2{,}778 \times 10^{-3}$ revoluções e, portanto, $16{,}7° = 16{,}7 \times 2{,}778 \times 10^{-3}$ revolução. As unidades do SI estão em letras maiúsculas. Adaptado parcialmente de G. Shortley and D. Williams, *Elements of Physics*, 1971, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Ângulo Plano

°	′	″	RADIANOS	rev
1 grau = 1	60	3600	$1{,}745 \times 10^{-2}$	$2{,}778 \times 10^{-3}$
1 minuto = $1{,}667 \times 10^{-2}$	1	60	$2{,}909 \times 10^{-4}$	$4{,}630 \times 10^{-5}$
1 segundo = $2{,}778 \times 10^{-4}$	$1{,}667 \times 10^{-2}$	1	$4{,}848 \times 10^{-6}$	$7{,}716 \times 10^{-7}$
1 RADIANO = 57,30	3438	$2{,}063 \times 10^{5}$	1	0,1592
1 revolução = 360	$2{,}16 \times 10^{4}$	$1{,}296 \times 10^{6}$	6,283	1

Ângulo Sólido

1 esfera = 4π esferorradianos = 12,57 esferorradianos

Comprimento

cm	METROS	km	polegadas	pés	milhas
1 centímetro = 1	10^{-2}	10^{-5}	0,3937	$3{,}281 \times 10^{-2}$	$6{,}214 \times 10^{-6}$
1 METRO = 100	1	10^{-3}	39,37	3,281	$6{,}214 \times 10^{-4}$
1 quilômetro = 10^{5}	1000	1	$3{,}937 \times 10^{4}$	3281	0,6214
1 polegada = 2,540	$2{,}540 \times 10^{-2}$	$2{,}540 \times 10^{-5}$	1	$8{,}333 \times 10^{-2}$	$1{,}578 \times 10^{-5}$
1 pé = 30,48	0,3048	$3{,}048 \times 10^{-4}$	12	1	$1{,}894 \times 10^{-4}$
1 milha = $1{,}609 \times 10^{5}$	1609	1,609	$6{,}336 \times 10^{4}$	5280	1

1 angström = 10^{-10} m
1 milha marítima = 1852 m = 1,151 milha = 6076 pés
1 fermi = 10^{-15} m
1 ano-luz = $9{,}461 \times 10^{12}$ km
1 parsec = $3{,}084 \times 10^{13}$ km
1 braça = 6 pés
1 raio de Bohr = $5{,}292 \times 10^{-11}$ m
1 jarda = 3 pés
1 vara = 16,5 pés
1 mil = 10^{-3} polegadas
1 nm = 10^{-9} m

Área

METROS^2	cm^2	pés^2	polegadas^2
1 METRO QUADRADO = 1	10^{4}	10,76	1550
1 centímetro quadrado = 10^{-4}	1	$1{,}076 \times 10^{-3}$	0,1550
1 pé quadrado = $9{,}290 \times 10^{-2}$	929,0	1	144
1 polegada quadrada = $6{,}452 \times 10^{-4}$	6,452	$6{,}944 \times 10^{-3}$	1

1 milha quadrada = $2{,}788 \times 10^{7}$ pés^2 = 640 acres
1 barn = 10^{-28} m^2
1 acre = 43.560 pés^2
1 hectare = 10^{4} m^2 = 2,471 acres

Volume

	METROS³	cm³	L	pés³	polegadas³
1 METRO CÚBICO =	1	10^6	1000	35,31	$6{,}102 \times 10^4$
1 centímetro cúbico =	10^{-6}	1	$1{,}000 \times 10^{-3}$	$3{,}531 \times 10^{-5}$	$6{,}102 \times 10^{-2}$
1 litro =	$1{,}000 \times 10^{-3}$	1000	1	$3{,}531 \times 10^{-2}$	61,02
1 pé cúbico =	$2{,}832 \times 10^{-2}$	$2{,}832 \times 10^4$	28,32	1	1728
1 polegada cúbica =	$1{,}639 \times 10^{-5}$	16,39	$1{,}639 \times 10^{-2}$	$5{,}787 \times 10^{-4}$	1

1 galão americano = 4 quartos de galão americano = 8 quartilhos americanos = 128 onças fluidas americanas = 231 polegadas³
1 galão imperial britânico = 277,4 polegadas³ = 1,201 galão americano

Massa

As grandezas nas áreas sombreadas não são unidades de massa, mas são frequentemente usadas como tal. Assim, por exemplo, quando escrevemos 1 kg "=" 2,205 lb, isso significa que um quilograma é a *massa* que *pesa* 2,205 libras em um local onde g tem o valor padrão de 9,80665 m/s².

	g	QUILOGRAMAS	slugs	u	onças	libras	toneladas
1 grama =	1	0,001	$6{,}852 \times 10^{-5}$	$6{,}022 \times 10^{23}$	$3{,}527 \times 10^{-2}$	$2{,}205 \times 10^{-3}$	$1{,}102 \times 10^{-6}$
1 QUILOGRAMA =	1000	1	$6{,}852 \times 10^{-2}$	$6{,}022 \times 10^{26}$	35,27	2,205	$1{,}102 \times 10^{-3}$
1 slug =	$1{,}459 \times 10^4$	14,59	1	$8{,}786 \times 10^{27}$	514,8	32,17	$1{,}609 \times 10^{-2}$
1 unidade de massa atômica =	$1{,}661 \times 10^{-24}$	$1{,}661 \times 10^{-27}$	$1{,}138 \times 10^{-28}$	1	$5{,}857 \times 10^{-26}$	$3{,}662 \times 10^{-27}$	$1{,}830 \times 10^{-30}$
1 onça =	28,35	$2{,}835 \times 10^{-2}$	$1{,}943 \times 10^{-3}$	$1{,}718 \times 10^{25}$	1	$6{,}250 \times 10^{-2}$	$3{,}125 \times 10^{-5}$
1 libra =	453,6	0,4536	$3{,}108 \times 10^{-2}$	$2{,}732 \times 10^{26}$	16	1	0,0005
1 tonelada =	$9{,}072 \times 10^5$	907,2	62,16	$5{,}463 \times 10^{29}$	$3{,}2 \times 10^4$	2000	1

1 tonelada métrica = 1000 kg

Massa Específica

As grandezas nas áreas sombreadas são pesos específicos e, como tal, dimensionalmente diferentes das massas específicas. Veja a nota na tabela de massas.

	slugs/pé³	QUILOGRAMAS/ METRO³	g/cm³	lb/pé³	lb/polegada³
1 slug por pé³ =	1	515,4	0,5154	32,17	$1{,}862 \times 10^{-2}$
1 QUILOGRAMA por METRO³ =	$1{,}940 \times 10^{-3}$	1	0,001	$6{,}243 \times 10^{-2}$	$3{,}613 \times 10^{-5}$
1 grama por centímetro³ =	1,940	1000	1	62,43	$3{,}613 \times 10^{-2}$
1 libra por pé³ =	$3{,}108 \times 10^{-2}$	16,02	$16{,}02 \times 10^{-2}$	1	$5{,}787 \times 10^{-4}$
1 libra por polegada³ =	53,71	$2{,}768 \times 10^4$	27,68	1728	1

Tempo

	anos	d	h	min	SEGUNDOS
1 ano =	1	365,25	$8{,}766 \times 10^3$	$5{,}259 \times 10^5$	$3{,}156 \times 10^7$
1 dia =	$2{,}738 \times 10^{-3}$	1	24	1440	$8{,}640 \times 10^4$
1 hora =	$1{,}141 \times 10^{-4}$	$4{,}167 \times 10^{-2}$	1	60	3600
1 minuto =	$1{,}901 \times 10^{-6}$	$6{,}944 \times 10^{-4}$	$1{,}667 \times 10^{-2}$	1	60
1 SEGUNDO =	$3{,}169 \times 10^{-8}$	$1{,}157 \times 10^{-5}$	$2{,}778 \times 10^{-4}$	$1{,}667 \times 10^{-2}$	1

Velocidade

	pés/s	km/h	METROS/SEGUNDO	milhas/h	cm/s
1 pé por segundo =	1	1,097	0,3048	0,6818	30,48
1 quilômetro por hora =	0,9113	1	0,2778	0,6214	27,78
1 METRO por SEGUNDO =	3,281	3,6	1	2,237	100
1 milha por hora =	1,467	1,609	0,4470	1	44,70
1 centímetro por segundo =	$3,281 \times 10^{-2}$	$3,6 \times 10^{-2}$	0,01	$2,237 \times 10^{-2}$	1

1 nó = 1 milha marítima/h = 1,688 pés/s   1 milha/min = 88,00 pés/s = 60,00 milhas/h

Força

As unidades de força nas áreas sombreadas são atualmente pouco usadas. 1 grama-força (= 1 gf) é a força da gravidade que atua sobre um objeto cuja massa é 1 grama em um local onde g possui o valor padrão de 9,80665 m/s².

	dinas	NEWTONS	libras	poundals	gf	kgf
1 dina =	1	10^{-5}	$2,248 \times 10^{-6}$	$7,233 \times 10^{-5}$	$1,020 \times 10^{-3}$	$1,020 \times 10^{-6}$
1 NEWTON =	10^5	1	0,2248	7,233	102,0	0,1020
1 libra =	$4,448 \times 10^5$	4,448	1	32,17	453,6	0,4536
1 poundal =	$1,383 \times 10^4$	0,1383	$3,108 \times 10^{-2}$	1	14,10	$1,410 \times 10^{-2}$
1 grama-força =	980,7	$9,807 \times 10^{-3}$	$2,205 \times 10^{-3}$	$7,093 \times 10^{-2}$	1	0,001
1 quilograma-força =	$9,807 \times 10^5$	9,807	2,205	70,93	1000	1

1 tonelada = 2000 lb

Pressão

	atm	dinas/cm²	polegadas de água	cmHg	PASCALS	libras/polegada²	libras/pé²
1 atmosfera =	1	$1,013 \times 10^6$	406,8	76	$1,013 \times 10^5$	14,70	2116
1 dina por centímetro² =	$9,869 \times 10^{-7}$	1	$4,015 \times 10^{-4}$	$7,501 \times 10^{-5}$	0,1	$1,405 \times 10^{-5}$	$2,089 \times 10^{-3}$
1 polegada de água[a] a 4°C =	$2,458 \times 10^{-3}$	2491	1	0,1868	249,1	$3,613 \times 10^{-2}$	5,202
1 centímetro de mercúrio[a] a 0°C =	$1,316 \times 10^{-2}$	$1,333 \times 10^4$	5,353	1	1333	0,1934	27,85
1 PASCAL =	$9,869 \times 10^{-6}$	10	$4,015 \times 10^{-3}$	$7,501 \times 10^{-4}$	1	$1,450 \times 10^{-4}$	$2,089 \times 10^{-2}$
1 libra por polegada² =	$6,805 \times 10^{-2}$	$6,895 \times 10^4$	27,68	5,171	$6,895 \times 10^3$	1	144
1 libra por pé² =	$4,725 \times 10^{-4}$	478,8	0,1922	$3,591 \times 10^{-2}$	47,88	$6,944 \times 10^{-3}$	1

[a]Onde a aceleração da gravidade possui o valor padrão de 9,80665 m/s².   1 milibar = 10^3 dinas/cm² = 10^2 Pa   1 torr = 1 mmHg

1 bar = 10^6 dina/cm² = 0,1 MPa

Energia, Trabalho e Calor

As grandezas nas áreas sombreadas não são unidades de energia, mas foram incluídas por conveniência. Elas se originam da fórmula relativística de equivalência entre massa e energia $E = mc^2$ e representam a energia equivalente a um quilograma ou uma unidade unificada de massa atômica (u) (as duas últimas linhas) e a massa equivalente a uma unidade de energia (as duas colunas da extremidade direita).

	Btu	erg	pés-libras	hp · h	JOULES	cal	kW · h	eV	MeV	kg	u
1 Btu =	1	$1{,}055 \times 10^{10}$	777,9	$3{,}929 \times 10^{-4}$	1055	252,0	$2{,}930 \times 10^{-4}$	$6{,}585 \times 10^{21}$	$6{,}585 \times 10^{15}$	$1{,}174 \times 10^{-14}$	$7{,}070 \times 10^{12}$
1 erg =	$9{,}481 \times 10^{-11}$	1	$7{,}376 \times 10^{-8}$	$3{,}725 \times 10^{-14}$	10^{-7}	$2{,}389 \times 10^{-8}$	$2{,}778 \times 10^{-14}$	$6{,}242 \times 10^{11}$	$6{,}242 \times 10^{5}$	$1{,}113 \times 10^{-24}$	670,2
1 pé-libra =	$1{,}285 \times 10^{-3}$	$1{,}356 \times 10^{7}$	1	$5{,}051 \times 10^{-7}$	1,356	0,3238	$3{,}766 \times 10^{-7}$	$8{,}464 \times 10^{18}$	$8{,}464 \times 10^{12}$	$1{,}509 \times 10^{-17}$	$9{,}037 \times 10^{9}$
1 horsepower-hora =	2545	$2{,}685 \times 10^{13}$	$1{,}980 \times 10^{6}$	1	$2{,}685 \times 10^{6}$	$6{,}413 \times 10^{5}$	0,7457	$1{,}676 \times 10^{25}$	$1{,}676 \times 10^{19}$	$2{,}988 \times 10^{-11}$	$1{,}799 \times 10^{16}$
1 JOULE =	$9{,}481 \times 10^{-4}$	10^{7}	0,7376	$3{,}725 \times 10^{-7}$	1	0,2389	$2{,}778 \times 10^{-7}$	$6{,}242 \times 10^{18}$	$6{,}242 \times 10^{12}$	$1{,}113 \times 10^{-17}$	$6{,}702 \times 10^{9}$
1 caloria =	$3{,}968 \times 10^{-3}$	$4{,}1868 \times 10^{7}$	3,088	$1{,}560 \times 10^{-6}$	4,1868	1	$1{,}163 \times 10^{-6}$	$2{,}613 \times 10^{19}$	$2{,}613 \times 10^{13}$	$4{,}660 \times 10^{-17}$	$2{,}806 \times 10^{10}$
1 quilowatt-hora =	3413	$3{,}600 \times 10^{13}$	$2{,}655 \times 10^{6}$	1,341	$3{,}600 \times 10^{6}$	$8{,}600 \times 10^{5}$	1	$2{,}247 \times 10^{25}$	$2{,}247 \times 10^{19}$	$4{,}007 \times 10^{-11}$	$2{,}413 \times 10^{16}$
1 elétron-volt =	$1{,}519 \times 10^{-22}$	$1{,}602 \times 10^{-12}$	$1{,}182 \times 10^{-19}$	$5{,}967 \times 10^{-26}$	$1{,}602 \times 10^{-19}$	$3{,}827 \times 10^{-20}$	$4{,}450 \times 10^{-26}$	1	10^{-6}	$1{,}783 \times 10^{-36}$	$1{,}074 \times 10^{-9}$
1 milhão de elétron-volts =	$1{,}519 \times 10^{-16}$	$1{,}602 \times 10^{-6}$	$1{,}182 \times 10^{-13}$	$5{,}967 \times 10^{-20}$	$1{,}602 \times 10^{-13}$	$3{,}827 \times 10^{-14}$	$4{,}450 \times 10^{-20}$	10^{-6}	1	$1{,}783 \times 10^{-30}$	$1{,}074 \times 10^{-3}$
1 quilograma =	$8{,}521 \times 10^{13}$	$8{,}987 \times 10^{23}$	$6{,}629 \times 10^{16}$	$3{,}348 \times 10^{10}$	$8{,}987 \times 10^{16}$	$2{,}146 \times 10^{16}$	$2{,}497 \times 10^{10}$	$5{,}610 \times 10^{35}$	$5{,}610 \times 10^{29}$	1	$6{,}022 \times 10^{26}$
1 unidade unificada de massa atômica =	$1{,}415 \times 10^{-13}$	$1{,}492 \times 10^{-3}$	$1{,}101 \times 10^{-10}$	$5{,}559 \times 10^{-17}$	$1{,}492 \times 10^{-10}$	$3{,}564 \times 10^{-11}$	$4{,}146 \times 10^{-17}$	$9{,}320 \times 10^{8}$	932,0	$1{,}661 \times 10^{-27}$	1

Potência

	Btu/h	pés-libras/s	hp	cal/s	kW	WATTS
1 Btu por hora =	1	0,2161	$3{,}929 \times 10^{-4}$	$6{,}998 \times 10^{-2}$	$2{,}930 \times 10^{-4}$	0,2930
1 pé-libra por segundo =	4,628	1	$1{,}818 \times 10^{-3}$	0,3239	$1{,}356 \times 10^{-3}$	1,356
1 horsepower =	2545	550	1	178,1	0,7457	745,7
1 caloria por segundo =	14,29	3,088	$5{,}615 \times 10^{-3}$	1	$4{,}186 \times 10^{-3}$	4,186
1 quilowatt =	3413	737,6	1,341	238,9	1	1000
1 WATT =	3,413	0,7376	$1{,}341 \times 10^{-3}$	0,2389	0,001	1

Campo Magnético

	gauss	TESLAS	miligauss
1 gauss =	1	10^{-4}	1000
1 TESLA =	10^{4}	1	10^{7}
1 miligauss =	0,001	10^{-7}	1

1 tesla = 1 weber/metro²

Fluxo Magnético

	maxwell	WEBERS
1 maxwell =	1	10^{-8}
1 WEBER =	10^{8}	1

Fórmulas Matemáticas

Geometria

Círculo de raio r: circunferência $= 2\pi r$; área $= \pi r^2$.

Esfera de raio r: área $= 4\pi r^2$; volume $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Cilindro circular reto de raio r e altura h: área $= 2\pi r^2 + 2\pi r h$; volume $= \pi r^2 h$.

Triângulo de base a e altura h: área $= \frac{1}{2}ah$.

Fórmula de Báskara

Se $ax^2 + bx + c = 0$, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Funções Trigonométricas do Ângulo θ

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r}$ $\quad \cos\theta = \dfrac{x}{r}$

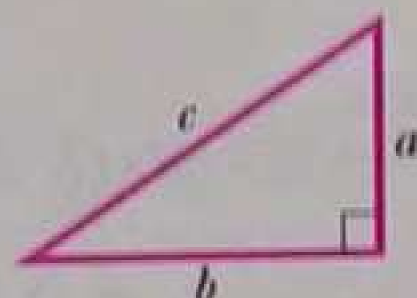
$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ $\quad \cot\theta = \dfrac{x}{y}$

$\sec\theta = \dfrac{r}{x}$ $\quad \csc\theta = \dfrac{r}{y}$

Teorema de Pitágoras

Neste triângulo retângulo,

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Triângulos

Ângulos: A, B, C

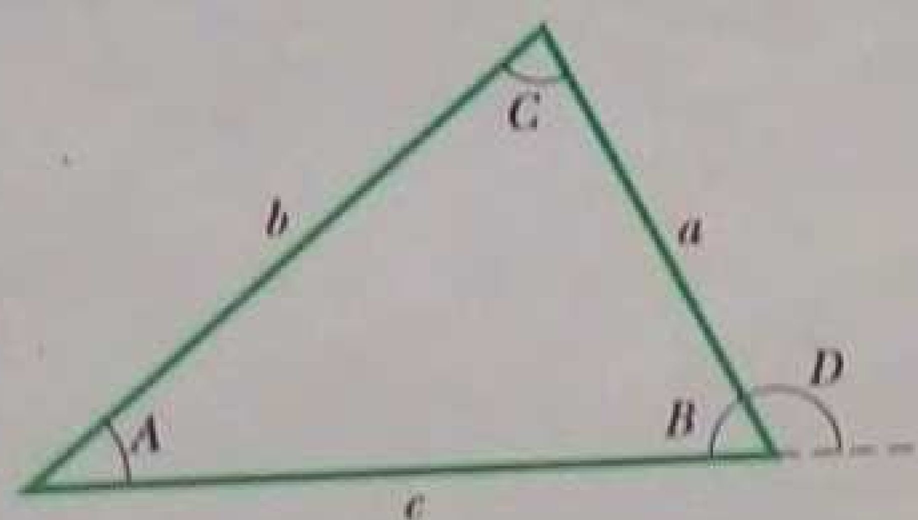
Lados opostos: a, b, c

$A + B + C = 180°$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Ângulo externo $D = A + C$



Sinais e Símbolos Matemáticos

$=$ igual a

$\approx$ aproximadamente igual a

$\sim$ da ordem de grandeza de

$\neq$ diferente de

$\equiv$ idêntico a, definido como

$>$ maior que ($\gg$ muito maior que)

$<$ menor que ($\ll$ muito menor que)

$\geq$ maior ou igual a (não menor que)

$\leq$ menor ou igual a (não maior que)

$\pm$ mais ou menos

$\propto$ proporcional a

Σ somatório de

$x_{méd}$ valor médio de x

Identidades Trigonométricas

$\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$

$\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$

$\operatorname{sen}\theta/\cos\theta = \tan\theta$

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

$\operatorname{sen}\alpha \pm \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

Teorema Binomial

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots \qquad (x^2 < 1)$$

Expansão Exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Expansão Logarítmica

$$\ln(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots \qquad (|x| < 1)$$

Expansões Trigonométricas
(θ em radianos)

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \cdots$$

Regra de Cramer

Um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, x e y,

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \text{e} \quad a_2x + b_2y = c_2,$$

tem como soluções

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Produtos de Vetores

Sejam $\hat{\mathrm{i}}, \hat{\mathrm{j}}$ e $\hat{\mathrm{k}}$ vetores unitários nas direções x, y e z, respectivamente. Nesse caso,

$$\hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}\cdot\hat{\mathrm{k}} = 1, \quad \hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{k}} = \hat{\mathrm{k}}\cdot\hat{\mathrm{i}} = 0,$$

$$\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}}\times\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}\times\hat{\mathrm{k}} = 0,$$

$$\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}, \quad \hat{\mathrm{j}}\times\hat{\mathrm{k}} = \hat{\mathrm{i}}, \quad \hat{\mathrm{k}}\times\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}}$$

Qualquer vetor $\vec{a}$ de componentes a_x, a_y e a_z ao longo dos eixos x, y e z pode ser escrito na forma

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}.$$

Sejam $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores arbitrários de módulos a, b e c. Nesse caso,

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{c})$$

$$(s\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(s\vec{b}) = s(\vec{a}\times\vec{b}) \quad \text{(onde } s \text{ é um escalar).}$$

Seja θ o menor dos dois ângulos entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Nesse caso,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = ab\cos\theta$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} & \hat{\mathrm{j}} & \hat{\mathrm{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\mathrm{i}}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{\mathrm{j}}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{\mathrm{k}}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= (a_yb_z - b_ya_z)\hat{\mathrm{i}} + (a_zb_x - b_za_x)\hat{\mathrm{j}} + (a_xb_y - b_xa_y)\hat{\mathrm{k}}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\operatorname{sen}\theta$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

Derivadas e Integrais

Nas fórmulas a seguir, as letras *u* e *v* representam duas funções de *x* e *a* e *m* são constantes. A cada integral indefinida deve-se somar uma constante de integração arbitrária. O *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press Inc.) contém uma tabela mais completa.

1. $\dfrac{dx}{dx} = 1$
2. $\dfrac{d}{dx}(au) = a\dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}(u + v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$
5. $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$
6. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$
7. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$
8. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$
9. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$
10. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
11. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
12. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$
13. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\cot x \csc x$
14. $\dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$
15. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u\dfrac{du}{dx}$
16. $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u\dfrac{du}{dx}$

1. $\int dx = x$
2. $\int au\,dx = a\int u\,dx$
3. $\int (u + v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
4. $\int x^m\,dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\ (m \neq -1)$
5. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|$
6. $\int u\dfrac{dv}{dx}dx = uv - \int v\dfrac{du}{dx}dx$
7. $\int e^x\,dx = e^x$
8. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$
9. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$
10. $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x|$
11. $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$
12. $\int e^{-ax}\,dx = -\dfrac{1}{a}e^{-ax}$
13. $\int xe^{-ax}\,dx = -\dfrac{1}{a^2}(ax + 1)e^{-ax}$
14. $\int x^2e^{-ax}\,dx = -\dfrac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$
15. $\int_0^\infty x^ne^{-ax}\,dx = \dfrac{n!}{a^{n+1}}$
16. $\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx = \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$
17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$
18. $\int \dfrac{x\,dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\dfrac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$
19. $\int \dfrac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \dfrac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{1/2}}$
20. $\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-ax^2}\,dx = \dfrac{n!}{2a^{n+1}}\ (a > 0)$
21. $\int \dfrac{x\,dx}{x + d} = x - d\ln(x + d)$

Propriedades dos Elementos

Todas as propriedades físicas são dadas para uma pressão de 1 atm a menos que seja indicado em contrário.

Elemento	Símbolo	Número Atômico, Z	Massa Molar, g/mol	Massa Específica, g/cm³ a 20°C	Ponto de Fusão, °C	Ponto de Ebulição, °C	Calor Específico, J/(g · °C) a 25°C
Actínio	Ac	89	(227)	10,06	1323	(3473)	0,092
Alumínio	Al	13	26,9815	2,699	660	2450	0,900
Amerício	Am	95	(243)	13,67	1541	—	—
Antimônio	Sb	51	121,75	6,691	630,5	1380	0,205
Argônio	Ar	18	39,948	$1{,}6626 \times 10^{-3}$	−189,4	−185,8	0,523
Arsênio	As	33	74,9216	5,78	817 (28 atm)	613	0,331
Astatínio	At	85	(210)	—	(302)	—	—
Bário	Ba	56	137,34	3,594	729	1640	0,205
Berílio	Be	4	9,0122	1,848	1287	2770	1,83
Berquélio	Bk	97	(247)	14,79	—	—	—
Bismuto	Bi	83	208,980	9,747	271,37	1560	0,122
Bóhrio	Bh	107	262,12	—	—	—	—
Boro	B	5	10,811	2,34	2030	—	1,11
Bromo	Br	35	79,909	3,12 (líquido)	−7,2	58	0,293
Cádmio	Cd	48	112,40	8,65	321,03	765	0,226
Cálcio	Ca	20	40,08	1,55	838	1440	0,624
Califórnio	Cf	98	(251)	—	—	—	—
Carbono	C	6	12,01115	2,26	3727	4830	0,691
Cério	Ce	58	140,12	6,768	804	3470	0,188
Césio	Cs	55	132,905	1,873	28,40	690	0,243
Chumbo	Pb	82	207,19	1,35	327,45	1725	0,129
Cloro	Cl	17	35,453	$3{,}214 \times 10^{-3}$ (0°C)	−101	−34,7	0,486
Cobalto	Co	27	58,9332	8,85	1495	2900	0,423
Cobre	Cu	29	63,54	8,96	1083,40	2595	0,385
Copernício	Cp	112	(285)	—	—	—	—
Criptônio	Kr	36	83,80	$3{,}488 \times 10^{-3}$	−157,37	−152	0,247
Cromo	Cr	24	51,996	7,19	1857	2665	0,448
Cúrio	Cm	96	(247)	13,3	—	—	—
Darmstádtio	Ds	110	(271)	—	—	—	—
Disprósio	Dy	66	162,50	8,55	1409	2330	0,172
Dúbnio	Db	105	262,114	—	—	—	—
Einstêinio	Es	99	(254)	—	—	—	—
Enxofre	S	16	32,064	2,07	119,0	444,6	0,707
Érbio	Er	68	167,26	9,15	1522	2630	0,167
Escândio	Sc	21	44,956	2,99	1539	2730	0,569
Estanho	Sn	50	118,69	7,2984	231,868	2270	0,226
Estrôncio	Sr	38	87,62	2,54	768	1380	0,737
Európio	Eu	63	151,96	5,243	817	1490	0,163
Férmio	Fm	100	(237)	—	—	—	—

Elemento	Símbolo	Número Atômico, Z	Massa Molar, g/mol	Massa Específica, g/cm³ a 20°C	Ponto de Fusão, °C	Ponto de Ebulição, °C	Calor Específico, J/(g · °C) a 25°C
Ferro	Fe	26	55,847	7,874	1536,5	3000	0,447
Flúor	F	9	18,9984	$1{,}696 \times 10^{-3}$ (0°C)	2219,6	188,2	0,753
Fósforo	P	15	30,9738	1,83	44,25	280	0,741
Frâncio	Fe	87	(223)	—	(27)	—	—
Gadolínio	Gd	64	157,25	7,90	1312	2730	0,234
Gálio	Ga	31	69,72	5,907	29,75	2237	0,377
Germânio	Ge	32	72,59	5,323	937,25	2830	0,322
Háfnio	Hf	72	178,49	13,31	2227	5400	0,144
Hássio	Hs	108	(265)	—	—	—	—
Hélio	He	2	4,0026	$0{,}1664 \times 10^{-3}$	−269,7	−268,9	5,23
Hidrogênio	H	1	1,00797	$0{,}8375 \times 10^{-3}$	−259,19	−252,7	14,4
Hólmio	Ho	67	164,930	8,79	1470	2330	0,165
Índio	In	49	114,82	7,31	156,634	2000	0,233
Iodo	I	53	126,9044	4,93	113,7	183	0,218
Irídio	Ir	77	192,2	22,5	2447	(5300)	0,130
Itérbio	Yb	70	173,04	6,965	824	0,155	0,155
Ítrio	Y	39	88,905	4,469	1526	3030	0,297
Lantânio	La	57	138,91	6,189	920	3470	0,195
Laurêncio	Lr	103	(2597)	—	—	—	—
Lítio	Li	3	6,939	0,534	180,55	1300	3,58
Lutécio	Lu	7	174,97	9,849	1663	1930	0,155
Magnésio	Mg	12	24,312	1,738	650	1107	1,03
Manganês	Mn	25	54,9380	7,44	1244	2150	0,481
Meitnério	Mt	109	(266)	—	—	—	—
Mendelévio	Md	101	(256)	—	—	—	—
Mercúrio	Hg	80	200.59	13,55	−38,87	357	0,138
Molibdênio	Mo	42	95,94	10,22	2617	5560	0,251
Neodímio	Nd	60	144,24	7,007	1016	3180	0,188
Neônio	Ne	10	20,183	$0{,}8387 \times 10^{-3}$	−248,597	−246,0	1,03
Netúnio	Np	93	(237)	20,25	637	—	1,26
Nióbio	NB	41	92,906	8,57	2468	4927	0,264
Níquel	NI	28	58,71	8,902	1453	2730	0,444
Nitrogênio	Os	76	190,2	22,59	3027	5500	0,130
Nobélio	O	8	15,9994	$1{,}3318 \times 10^{-3}$	−218,80	−183,0	0,913
Ósmio	Pd	46	106,4	12,02	1552	3980	0,243
Ouro	Au	79	196,967	19,32	1064,43	2970	0,131
Oxigênio	O	8	15,9994	$1{,}3318 \times 10^{-3}$	−218,80	−183,0	0,913
Paládio	Pd	46	106,4	12,02	1552	3980	0,243
Platina	Pt	78	195.09	21,45	1769	4530	0,134
Plutônio	Pu	94	(244)	19,8	640	3235	0,130
Polônio	Po	84	(210)	9,32	254	—	—
Potássio	K	19	39.102	0,862	63,20	760	0,758
Praseodímio	Pr	59	140.907	6,773	931	3020	0,197
Prata	Ag	47	107.870	10,49	960,8	2210	0,234
Promécio	Pm	61	(145)	7,22	(1027)	—	—
Protactínio	Pa	91	(231)	15,37 (estimada)	(1230)	—	—
Rádio	Ra	88	(226)	5,0	700	—	—

Elemento	Símbolo	Número Atômico, Z	Massa Molar, g/mol	Massa Específica, g/cm^3 a 20°C	Ponto de Fusão, °C	Ponto de Ebulição, °C	Calor Específico, J/(g · °C) a 25°C
Radônio	Rn	86	(222)	$9{,}96 \times 10^{-3}$ (0°C)	(−71)	−61,8	0,092
Rênio	Re	75	186,2	21,02	3180	5900	0,134
Ródio	Rh	45	102,905	12,41	1963	4500	0,243
Roentgênio	Rg	111	(280)	—	—	—	—
Rubídio	Rb	37	85,47	1,532	39,49	688	0,364
Rutênio	Ru	44	101,107	12,37	2250	4900	0,239
Rutherfórdio	Rf	104	261,11	—	—	—	—
Samário	Sm	62	150,35	7,52	1072	1630	0,197
Seabórgio	Sg	106	263,118	—	—	—	—
Selênio	Se	34	78,96	4,79	221	685	0,318
Silício	Si	14	28,086	2,33	1412	2680	0,712
Sódio	Na	11	2,9898	0,9712	97,85	892	1,23
Tálio	Tl	81	204,37	11,85	304	1457	0,130
Tântalo	Ta	73	180,948	180,948	16,6	5425	0,138
Tecnécio	Tc	43	(99)	(99)	11,46	—	0,209
Telúrio	Te	52	127,60	127,60	6,24	990	0,201
Térbio	Tb	65	158,924	158,924	8,229	2530	0,180
Titânio	Ti	22	47,90	4,54	1670	320	0,523
Tório	Th	90	(232)	11,72	1755	(3850)	0,117
Túlio	Tm	69	168,934	9,32	1545	1720	0,159
Tungstênio	W	74	183,85	19,3	3380	5930	0,134
Ununhéxio	Uuh	116	(293)	—	—	—	—
Ununóctio	Uuo	118	(294)	—	—	—	—
Ununpêntio	Uup	115	(288)	—	—	—	—
Ununquádio	Unq	114	(289)	—	—	—	—
Ununséptio	Uus	117	—	—	—	—	—
Ununtrio	Uut	113	(284)	—	—	—	—
Urânio	U	92	(238)	18,95	1132	3818	0,117
Vanádio	V	23	50,942	6,11	1902	3400	0,490
Xenônio	Xe	54	131,30	$5{,}495 \times 10^{-3}$	−111,79	−108	0,159
Zinco	Zn	30	65,37	7,133	419,58	906	0,389
Zircônio	Zr	40	91,22	6,506	1852	3580	0,276

Os números entre parênteses na coluna das massas molares são os números de massa dos isótopos de vida mais longa dos elementos radioativos. Os pontos de fusão e pontos de ebulição entre parênteses são pouco confiáveis.

Os dados para os gases são válidos apenas quando estes se encontram no estado molecular mais comum, como H_2, He, O_2, Ne etc. Os calores específicos dos gases são os valores à pressão constante.

Fonte: Adaptada de J. Emsley, *The Elements*, 3ª edição, 1998. Clarendon Press, Oxford. Veja também www.webelements.com para valores atualizados e, possivelmente, novos elementos.

Tabela Periódica dos Elementos

Metais / Metaloides / Não metais

PERÍODOS HORIZONTAIS

Período	Metais alcalinos IA	IIA	IIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIIIB	VIIIB	VIIIB	IB	IIB	IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	Gases nobres 0
1	1 H																	2 He
2	3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
3	11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
6	55 Cs	56 Ba	57-71 *	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
7	87 Fr	88 Ra	89-103 †	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Ds	111 Rg	112 Cp	113	114	115	116	117	118

Metais de transição (grupos IIIB a IIB)

Metais de transição

Série															
Série dos lantanídeos *	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
Série dos actinídeos †	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

Os elementos 113 a 118 foram descobertos mas, até 2010, ainda não haviam recebido nomes. Veja www.webelements.com para informações atualizadas e possíveis novos elementos.

RESPOSTAS

Respostas dos Testes e das Perguntas e Problemas Ímpares

CAPÍTULO 12

T **1.** *c,e,f* **2.** (a) não; (b) no ponto de aplicação de $\vec{F}_1$, perpendicular ao plano da figura; (c) 45 N **3.** *d*

P **1.** (a) 1 e 3,2; (b) todas iguais; (c) 1 e 3,2 (zero) **3.** *a* e *c* (as forças e os torques se equilibram) **5.** (a) 12 kg; (b) 3 kg; (c)1 kg **7.** (a) em *C* (para eliminar da equação do torque as forças aplicadas a este ponto); (b) positivo; (c) negativo; (d) igual **9.** aumenta

PR **1.** (a) 1,00 m; (b) 2,00 m; (c) 0,987 m; (d) 1,97 m **3.** (a) 9,4 N; (b) 4,4 N **5.** 7,92 kN **7.** (a) $2,8 \times 10^2$ N; (b) $8,8 \times 10^2$ N; (c) 71° **9.** 74,4 g **11.** (a) 1,2 kN; (b) para baixo; (c) 1,7 kN; (d) para cima; (e) o de trás; (f) o da frente **13.** (a) 2,7 kN; (b) para cima; (c) 3,6 kN; (d) para baixo **15.** (a) 5,0 N; (b) 30 N; (c) 1,3 m **17.** (a) 0,64 m; (b) aumentar **19.** 8,7 N **21.** (a) 6,63 kN; (b) 5,74 kN; (c) 5,96 kN **23.** (a) 192 N; (b) 96,1 N; (c) 55,5 N **25.** 13,6 N **27.** (a) 1,9 kN; (b) para cima; (c) 2,1 kN; (d) para baixo **29.** (a) $(-80\ \text{N})\hat{i} + (1,3 \times 10^2\ \text{N})\hat{j}$; (b) $(80\ \text{N})\hat{i} + (1,3 \times 10^2\ \text{N})\hat{j}$ **31.** 2,20 m **33.** (a) 60,0°; (b) 300 N **35.** (a) 445 N; (b) 0,50; (c) 315 N **37.** 0,34 **39.** (a) 211 N; (b) 534 N; (c) 320 N **41.** (a) desliza; (b) 31°; (c) tomba; (d) 34° **43.** (a) $6,5 \times 10^6$ N/m²; (b) $1,1 \times 10^{-5}$ m **45.** (a) 0,80; (b) 0,20; (c) 0,25 **47.** (a) $1,4 \times 10^9$ N; (b) 75 **49.** (a) 866 N; (b) 143 N; (c) 0,165 **51.** (a) $1,2 \times 10^2$ N; (b) 68 N **53.** (a) $1,8 \times 10^7$ N; (b) $1,4 \times 10^7$ N; (c) 16 **55.** 0,29 **57.** 76 N **59.** (a) 8,01 kN; (b) 3,65 kN; (c) 5,66 kN **61.** 71,7 N **63.** (a) $L/2$; (b) $L/4$; (c) $L/6$; (d) $L/8$; (e) $25L/24$ **65.** (a) 88 N; (b) $(30\hat{i} + 97\hat{j})$ N **67.** $2,4 \times 10^9$ N/m² **69.** 60° **71.** (a) $\mu < 0,57$; (b) $\mu > 0,57$ **73.** (a) $(35\hat{i} + 200\hat{j})$ N; (b) $(-45\hat{i} + 200\hat{j})$ N; (c) $1,9 \times 10^2$ N **75.** (a) *BC, CD, DA*; (b) 535 N; (c) 757 N **77.** (a) 1,38 kN; (b) 180 N **79.** (a) $a_1 = L/2$, $a_2 = 5L/8$, $h = 9L/8$; (b) $b_1 = 2L/3$, $b_2 = L/2$, $h = 7L/6$ **81.** $L/4$ **83.** (a) 106 N; (b) 64,0°

CAPÍTULO 13

T **1.** todos iguais **2.** (a) 1,2 e 4,3; (b) da horizontal **3.** (a) aumenta; (b) negativo **4.** (a) 2; (b) 1 **5.** (a) a trajetória 1 (a redução de *E* (tornando-a mais negativa) reduz o valor de *a*); (b) menor (a redução de *a* resulta em uma redução de *T*)

P **1.** $3\,GM^2/d^2$, para a esquerda **3.** Gm^2/r^2, para cima **5.** *b* e *c*, *a* (zero) **7.** 1,2 e 4,3 **9.** (a) $+y$; (b) sim, gira no sentido anti-horário até apontar para a partícula *B* **11.** *b*, *d* e *f* (os três empatados), *e*, *c*, *a*

PR **1.** 1/2 **3.** 19 m **5.** 0,8 m **7.** $-5,00d$ **9.** $2,60 \times 10^5$ km **11.** (a) $M = m$; (b) 0 **13.** $8,31 \times 10^{-9}$ N **15.** (a) $-1,88d$; (b) $-3,90d$; (c) $0,489d$ **17.** (a) 17 N; (b) 2,4 **19.** $2,6 \times 10^6$ m **21.** 5×10^{24} kg **23.** (a) 7,6 m/s²; (b) 4,2 m/s² **25.** (a) $(3,0 \times 10^{-7}$ N/kg·m; (b) $(3,3 \times 10^{-7}$ N/kg·m; (c) $(6,7 \times 10^{-7}$ N/kg·m)mr **27.** (a) 9,83 m/s²; (b) 9,84 m/s²; (c) 9,79 m/s² **29.** $5,0 \times 10^9$ J **31.** (a) 0,74; (b) 3,8 m/s²; (c) 5,0 km/s **33.** (a) 0,0451; (b) 28,5 s **35.** $-4,82 \times 10^{-13}$ J **37.** (a) 0,50 pJ; (b) $-0,50$ pJ **39.** (a) 1,7 km/s; (b) $2,5 \times 10^5$ m; (c) 1,4 km/s **41.** (a) 82 km/s; (b) $1,8 \times 10^4$ km/s **43.** (a) 7,82 km/s; (b) 87,5 min **45.** $6,5 \times 10^{23}$ kg **47.** 5×10^{10} estrelas **49.** (a) $1,9 \times 10^{13}$ m; (b) $3,6R_P$ **51.** (a) $6,64 \times 10^3$ km; (b) 0,0136 ano **53.** $5,8 \times 10^6$ m **57.** 0,71 ano **59.** $(GM/L)^{0,5}$ **61.** (a) $3,19 \times 10^3$ km; (b) a energia para fazer o satélite subir **63.** (a) 2,8 anos; (b) $1,0 \times 10^{-4}$ **65.** (a) $r^{1,5}$; (b) r^{-1}; (c) $r^{0,5}$; (d) $r^{-0,5}$ **67.** (a) 7,5 km/s; (b) 97 min; (c) $4,1 \times 10^2$ km; (d) 7,7 km/s; (e) 93 min; (f) $3,2 \times 10^{-3}$ N; (g) não; (h) sim **69.** 1,1 s **71.** (a) $GMmx(x^2 + R^2)^{-3/2}$; (b) $[2GM(R^{-1} - (R^2 + x^2)^{-1/2})]^{1/2}$ **73.** (a) $1,0 \times 10^3$ kg; (b) 1,5 km/s **75.** $3,2 \times 10^{-7}$ N **77.** $0,37\hat{j}$ μN **79.** $2\pi r^{1,5} G^{-0,5} (M + m/4)^{-0,5}$ **81.** (a) $2,2 \times 10^{-7}$ rad/s; (b) 89 km/s **83.** (a) $2,15 \times 10^4$ s; (b) 12,3 km/s; (c) 12,0 km/s; (d) $2,17 \times 10^{11}$ J; (e) $-4,53 \times 10^{11}$ J; (f) $-2,35 \times 10^{11}$ J; (g) $4,04 \times 10^7$ m; (h) $1,22 \times 10^3$ s; (i) a elíptica **85.** $2,5 \times 10^4$ km **87.** (a) $1,4 \times 10^6$ m/s; (b) 3×10^6 m/s² **89.** (a) 0; (b) $1,8 \times 10^{32}$ J; (c) $1,8 \times 10^{32}$ J; (d) 0,99 km/s **91.** (a) Gm^2/R_i; (b) $Gm^2/2R_i$; (c) $(Gm/R_i)^{0,5}$; (d) $2(Gm/R_i)^{0,5}$; (e) Gm^2/R_i; (f) $(2Gm/R_i)^{0,5}$; (g) O referencial do centro de massa é um referencial inercial e nele a lei de conservação da energia pode ser aplicada como no Capítulo 8; o referencial ligado ao corpo A é não inercial e a lei de conservação de energia não pode ser aplicada como no Capítulo 8. A resposta correta é a do item (d). **93.** $2,4 \times 10^4$ m/s **95.** $-0,044\hat{j}$ μN **97.** $GM_T m/12R_T$

CAPÍTULO 14

T **1.** são todas iguais **2.** (a) são todas iguais (a força gravitacional a que o pinguim está submetido é a mesma); (b) $0,95\rho_0$; ρ_0; $1,1\rho_0$ **3.** 13 cm³/s, para fora **4.** (a) todas iguais; (b) 1,2 e 3, 4 (quanto mais larga, mais lenta); (c) 4,3,2,1 (quanto mais larga e mais baixa, maior a pressão)

P **1.** (a) desce; (b) desce **3.** (a) desce; (b) desce; (c) permanece o mesmo **5.** *b*, *a* e *d* (zero), *c* **7.** (a) 1 e 4; (b) 2; (c) 3 **9.** *B, C, A*

PR **1.** 0,074 **3.** $1,1 \times 10^5$ Pa **5.** $2,9 \times 10^4$ N **7.** (b) 26 kN **9.** (a) $1,0 \times 10^3$ torr; (b) $1,7 \times 10^3$ torr **11.** (a) 94 torr; (b) $4,1 \times 10^2$ torr; (c) $3,1 \times 10^2$ torr **13.** $1,08 \times 10^3$ atm **15.** $-2,6 \times 10^4$ Pa **17.** $7,2 \times 10^5$ N **19.** $4,69 \times 10^5$ N **21.** 0,635 J **23.** 44 km **25.** 739,26 torr **27.** (a) 7,9 km; (b) 16 km **29.** 8,50 kg **31.** (a) $6,7 \times 10^2$ kg/m³; (b) $7,4 \times 10^2$ kg/m³ **33.** (a) $2,04 \times 10^{-2}$ m³; (b) 1,57 kN **35.** 5 **37.** 57,3 cm **39.** (a) 1,2 kg; (b) $1,3 \times 10^3$ kg/m³ **41.** (a) 0,10; (b) 0,083 **43.** (a) 637,8 cm³; (b) 5,102 m³; (c) $5,102 \times 10^3$ kg **45.** 0,126 m³ **47.** (a) 1,80 m³; (b) 4,75 m³ **49.** (a) 3,0 m/s; (b) 2,8 m/s **51.** 8,1 m/s **53.** 66 W **55.** $1,4 \times 10^5$ J **57.** (a) $1,6 \times 10^{-3}$ m³/s; (b) 0,90 m **59.** (a) 2,5 m/s; (b) $2,6 \times 10^5$ Pa **61.** (a) 3,9 m/s; (b) 88 kPa **63.** $1,1 \times 10^2$ m/s **65.** (b) $2,0 \times 10^{-2}$ m³/s **67.** (a) 74 N; (b) $1,5 \times 10^2$ m³ **69.** (a) 0,0776 m³/s; (b) 69,8 kg/s **71.** (a) 35 cm; (b) 30 cm; (c) 20 cm **73.** 1,5 g/cm³ **75.** $5,11 \times 10^{-7}$ kg **77.** 44,2 g **79.** $6,0 \times 10^2$ kg/m³ **81.** 45,3 cm³ **83.** (a) 3,2 m/s; (b) $9,2 \times 10^4$ Pa; (c) 10,3 m **85.** $1,07 \times 10^3$ g

CAPÍTULO 15

T **1.** (plote *x* em função de *t*) (a) $-x_m$; (b) $+x_m$; (c) 0 **2.** a (*F* deve ter a forma da Equação 15-10) **3.** (a) 5 J; (b) 2 J; (c) 5 J **4.** são todos iguais (na Equação 15-29, *I* é proporcional a *m*) **5.** 1,2,3 (a razão *m/b* faz diferença, mas não o valor de *k*)

P **1.** a e b **3.** (a) 2; (b) positiva; (c) entre 0 e $+x_m$ **5.** (a) entre *D* e *E*; (b) entre $3\pi 2$ rad e 2π rad **7.** (a) são todas iguais; (b) 3 e depois 1 e 2 empatadas; (c) 1,2,3 (zero); (d) 1,2,3 (zero); (e) 1,3,2 **9.** *b* (período infinito, não oscila), *c*,*a* **11.** (a) maior; (b) igual; (c) igual; (d) maior; (e) maior

PR **1.** (a) 0,50 s; (b) 2,0 Hz; (c) 18 cm **3.** 37,8 m/s² **5.** (a) 1,0 mm; (b) 0,75 m/s; (c) $5,7 \times 10^2$ m/s² **7.** (a) 498 Hz; (b) maior **9.** (a) 3,0 m; (b) -49 m/s; (c) $-2,7 \times 10^2$ m/s²; (d) 20 rad; (e) 1,5 Hz; (f) 0,67 s **11.** 39,6 Hz **13.** (a) 0,500 s; (b) 2,00 Hz; (c) 12,6 rad/s; (d) 79,0 N/m; (e) 4,40 m/s; (f) 27,6 N **15.** (a) $0,18A$; (b) no mesmo sentido **17.** (a) 5,58 Hz; (b) 0,325 kg; (c) 0,400 m **19.** (a) 25 cm;

(b) 2,2 Hz **21.** 54 Hz **23.** 3,1 cm **25.** (a) 0,525 m; (b) 0,686 s
27. (a) 0,75; (b) 0,25; (c) $2^{-0,5}x_m$ **29.** 37 mJ **31.** (a) 2,25 Hz; (b)
125 J; (c) 250 J; (d) 86,6 cm **33.** (a) 1,1 m/s; (b) 3,3 cm **35.** (a) 3,1
ms; (b) 4,0 m/s; (c) 0,080 J; (d) 80 N; (e) 40 N **37.** (a) 2,2 Hz; (b)
56 cm/s; (c) 0,10 kg; (d) 20,0 cm **39.** (a) 39,5 rad/s; (b) 34,2 rad/
s; (c) 124 rad/s^2 **41.** (a) 0,205 kg·m^2; (b) 47,7 cm; (c) 1,50 s **43.**
(a) 1,64 s; (b) igual **45.** 8,77 s **47.** 0,366 s **49.** (a) 0,845 rad; (b)
0,0602 rad **51.** (a) 0,53 m; (b) 2,1 s **53.** 0,0653 s **55.** (a) 2,26 s;
(b) aumenta; (c) permanece o mesmo **57.** 6,0% **59.** (a) 14,3 s; (b)
5,27 **61.** (a) $F_m/b\omega$, (b) F_m/b **63.** 5,0 cm **65.** (a) $2,8 \times 10^3$ rad/s;
(b) 2,1 m/s; (c) 5,7 km/s^2 **67.** (a) 1,1 Hz; (b) 5,0 cm **69.** 7,2 m/s
71. (a) 7,90 N/m; (b) 1,19 cm; (c) 2,00 Hz **73.** (a) $1,3 \times 10^2$ N/m;
(b) 0,62 s; (c) 1,6 Hz; (d) 5,0 cm; (e) 0,51 m/s **75.** (a) 16,6 cm; (b)
1,23% **77.** (a) 1,2 J; (b) 50 **79.** 1,53 m **81.** (a) 0,30 m; (b) 0,28 s;
(c) $1,5 \times 10^2$ m/s^2; (d) 11 J **83.** (a) 1,23 kN/m; (b) 76,0 N **85.** 1,6 kg
87. (a) 0,735 kg·m^2; (b) 0,0240 N·m; (c) 0,181 rad/s **89.** (a) 3,5 m;
(b) 0,75 s **91.** (a) 0,35 Hz; (b) 0,39 Hz; (c) 0 (não há oscilações)
93. (a) 245 N/m; (b) 0,284 s **95.** 0,079 kg·m^2 **97.** (a) 8,11 ×
10^{-5} kg·m^2; (b) 3,14 rad/s **99.** 14,0° **101.** (a) 3,2 Hz; (b) 0,26 m; (c)
$x = (0,26\text{ m})\cos(20t - \pi/2)$, com t em segundos **103.** (a) 0,44 s;
(b) 0,18 m **105.** (a) 0,45 s; (b) 0,10 m acima e 0,20 m abaixo; (c)
0,15 m; (d) 2,3 J **107.** 7×10^2 N/m

CAPÍTULO 16

T 1. a,2; b,3; c,1 (compare com a fase da Equação 16-2 e veja a Equação 16-5) **2.** (a) 2,3,1 (veja a Equação 16-12); (b) 3 e depois 1 e 2 empatados (determine a amplitude de dy/dt) **3.** (a) permanece igual (é independente de f); (b) diminui ($\lambda = v/f$); (c) aumenta; (d) aumenta **4.** 0,20 e 0,80, 0,60, 0,45 **5.** (a) 1; (b) 3; (c) 2 **6.** (a) 75 Hz; (b) 525 Hz

P 1. (a) 1,4,2,3; (b) 1,4,2,3 **3.** *a*, para cima; *b*, para cima; *c*, para baixo; *d*, para baixo; *e*, para baixo; *f*, para baixo; *g*, para cima; *h*, para cima **5.** intermediária (mais próxima de totalmente destrutiva) **7.** (a) 0; 0,2 comprimento de onda; 0,5 comprimento de onda (zero); (b) $4P_{méd,1}$ **9.** *d* **11.** *c,a,b*

PR 1. 1,1 ms **3.** (a) 3,49 m^{-1}; (b) 31,5 m/s **5.** (a) 0,680 s; (b)
1,47 Hz; (c) 2,06 m/s **7.** (a) 64 Hz; (b) 1,3 m; (c) 4,0 cm; (d) 5,0
m^{-1}; (e) $4,0 \times 10^2$ s^{-1}; (f) $\pi/2$ rad; (g) negativo **9.** (a) 3,0 mm; (b)
16 m^{-1}; (c) $2,4 \times 10^2$ s^{-1}; (d) negativo **11.** (a) negativa; (b) 4,0
cm; (c) 0,31 cm^{-1}; (d) 0,63 s^{-1}; (e) π rad; (f) negativo; (g) 2,0 cm/
s; (h) −2,5 cm/s **13.** (a) 11,7 cm; (b) π rad **15.** (a) 0,12 mm; (b)
141 m^{-1}; (c) 628 s^{-1}; (d) positivo **17.** (a) 15 m/s; (b) 0,036 N **19.**
129 m/s **21.** 2,63 m **23.** (a) 5,0 cm; (b) 40 cm; (c) 12 m/s; (d)
0,033 s; (e) 9,4 m/s; (f) 16 m^{-1}; (g) $1,9 \times 10^2$ s^{-1}; (h) 0,93 rad; (i)
positivo **27.** 3,2 mm **29.** 0,20 m/s **31.** $1,41y_m$ **33.** (a) 9,0 mm; (b)
16 m^{-1}; (c) $1,1 \times 10^3$ s^{-1}; (d) 2,7 rad; (e) positivo **35.** 5,0 cm **37.**
(a) 3,29 mm; (b) 1,55 rad; (c) 1,55 rad **39.** 84° **41.** (a) 82,0 m/s;
(b) 16,8 m; (c) 4,88 Hz **43.** (a) 7,91 Hz; (b) 15,8 Hz; (c) 23,7 Hz
45. (a) 105 Hz; (b) 158 m/s **47.** 260 Hz **49.** (a) 144 m/s; (b) 60,0
cm; (c) 241 Hz **51.** (a) 0,50 cm; (b) 3,1 m^{-1}; (c) $3,1 \times 10^2$ s^{1}; (d)
negativo **53.** (a) 0,25 cm; (b) $1,2 \times 10^2$ cm/s; (c) 3,0 cm; (d) 0 **55.**
0,25 m **57.** (a) 2,00 Hz; (b) 2,00 m; (c) 4,00 m/s; (d) 50,0 cm; (e)
150 cm; (f) 250 cm; (g) 0; (h) 100 cm; (i) 200 cm **59.** (a) 324 Hz;
(b) 8 **61.** 36 N **63.** (a) 75 Hz; (b) 13 ms **65.** (a) 2,0 mm; (b) 95
Hz; (c) +30 m/s; (d) 31 cm; (e) 1,2 m/s **67.** (a) 0,31 m; (b) 1,64
rad; (c) 2,2 mm **69.** (a) $0,83y_1$; (b) 37° **71.** (a) 3,77 m/s; (b) 12,3
N; (c) 0; (d) 46,4 W; (e) 0; (f) 0; (g) ±0,50 cm **73.** 1,2 rad Hz **75.**
(a) 300 m/s; (b) não **77.** (a) $[k\,\Delta\lambda(\lambda + \Delta\lambda)/m]^{0,5}$ **79.** (a) 144 m/s;
(b) 3,00 m; (c) 1,50 m; (d) 48,0 Hz; (e) 96,0 Hz **81.** (a) 1,00 cm;
(b) $3,46 \times 10^3$ s^{-1}; (c) 10,5 m^{-1}; (d) positivo **83.** (a) $2\pi y_m/\lambda$; (b)
não **85.** (a) 240 cm; (b) 120 cm; (c) 80 cm **87.** (a) 1,33 m/s; (b)
1,88 m/s; (c) 16,7 m/s^2; (d) 23,7 m/s^2 **89.** (a) 0,52 m; (b) 40 m/s; (c) 0,40 m **91.** (a) 0,16 m; (b) $2,4 \times 10^2$ N; (c) $y(x,t) = (0,16\text{ m})\,\text{sen}[(1,57\text{ m}^{-1})x]\,\text{sen}[(31,4\text{ s}^{-1})t]$ **93.** (c) 2,0 m/s; (d) $-x$

CAPÍTULO 17

T 1. começando a diminuir (por exemplo: desloque mentalmente as curvas da Figura 17-6 para a direita a partir do ponto $x = 42$ m) **2.** (a) 1 e 2,3 (veja a Equação 17-28); (b) 3 e depois 1 e 2 empatados (veja a Equação 17-26) **3.** o segundo (veja as Equações 17-39 e 17-41) **4.** *a*,maior; *b*,menor; *c*,indefinido; *d*,indefinido; *e*,maior; *f*,menor

P 1. (a) 0; 0,2 comprimento de onda; 0,5 comprimento de onda (zero); (b) $4P_{méd,1}$ **3.** *C* e depois *A* e *B* empatados **5.** *E, A, D, C, B* **7.** 1,4,3,2 **9.** 150 Hz e 450 Hz

PR 1. (a) 79 m; (b) 41 m; (c) 89 m **3.** (a) 2,6 km; (b) $2,0 \times 10^2$ **5.** $1,9 \times 10^3$ km **7.** 40,7 m **9.** 0,23 ms **11.** (a) 76,2 μm; (b) 0,333 mm **13.** 960 Hz **15.** (a) $2,3 \times 10^2$ Hz; (b) maior **17.** (a) 143 Hz; (b) 3; (c) 5; (d) 286 Hz; (e) 2; (f) 3 **19.** (a) 14; (b) 14 **21.** (a) 343 Hz; (b) 3; (c) 5; (d) 686 Hz; (e) 2; (f) 3 **23.** (a) 0; (b) totalmente construtiva; (c) aumenta; (d) 128 m; (e) 63,0 m; (f) 41,2 m **25.** 36,8 nm **27.** (a) $1,0 \times 10^3$; (b) 32 **29.** 15,0 mW **31.** 2 μW **33.** 0,76 μm **35.** (a) $5,97 \times 10^{-5}$ W/m^2; (b) 4,48 nW **37.** (a) 0,34 nW; (b) 0,68 nW; (c) 1,4 nW; (d) 0,88 nW; (e)0 **39.** (a) 405 m/s; (b) 596 N; (c) 44,0 cm; (d) 37,3 cm **41.** (a) 833 Hz; (b) 0,418 m **43.** (a) 3; (b) 1129 Hz; (c) 1506 Hz **45.** (a) 2; (b)1 **47.** 12,4 m **49.** 45,3 N **51.** 2,25 ms **53.** 0,020 **55.** (a) 526 Hz; (b) 555 Hz **57.** 0 **59.** (a) 1,022 kHz; (b) 1,045 kHz **61.** 41 kHz **63.** 155 Hz **65.** (a) 2,0 kHz; (b) 2,0 kHz **67.** (a) 485,8 Hz; (b) 500,0 Hz; (c) 486,2 Hz; (d) 500,0 Hz **69.** (a) 42°; (b) 11 s **71.** 1 cm **73.** 2,1 m **75.** (a) 39,7 μW/m^2; (b) 171 nm; (c) 0,893 Pa **77.** 0,25 **79.** (a) 2,10 m; (b) 1,47 m **81.** (a) 59,7; (b) $2,81 \times 10^{-4}$ **83.** (a) para a direita; (b) 0,90 m/s; (c) menor **85.** (a) 11 ms; (b) 3,8 m **87.** (a) $9,7 \times 10^2$ Hz; (b) 1,0 kHz; (c) 60 Hz, não **89.** (a) 21 nm; (b) 35 cm; (c) 24 nm; (d) 35 cm **91.** (a) 7,70 Hz; (b) 7,70 Hz **93.** (a) 5,2 kHz; (b) 2 **95.** (a) 10 W; (b) 0,032 W/m^2; (c) 99 dB **97.** (a) 0; (b) 0,572 m; (c) 1,14 m **99.** 171 m **101.** (a) $3,6 \times 10^2$ m/s; (b) 150 Hz **103.** 400 Hz **105.** (a) 14; (b) 12

CAPÍTULO 18

T 1. (a) são todos iguais; (b) 50°X, 50°Y, 50°W **2.** (a) 2 e 3 empatados,1,4; (b) 3,2 e, em seguida, 1 e 4 empatados (por analogia como nas Equações 18-9 e 18-10, suponha que a variação da área é proporcional à área inicial) **3.** *A* (veja a Equação 18-14) **4.** *c* e *e* (maximizam a área limitada por um ciclo no sentido horário) **5.** (a) são todas iguais (ΔE_{int} não depende da trajetória, mas apenas de *i* and *f*); (b) 4,3,2,1 (comparando as áreas sob as curvas); (c) 4,3,2,1 (veja a Equação 18-26) **6.** (a) nula (ciclo fechado); (b) negativa (W_{tot} é negativo; veja a Equação 18-26). **7.** *b* e *d* empatados, *a,c* (mesmo valor de P_{cond}; veja a Eq. 18-32)

P 1. *c* e, em seguida, *a,b* e *d* empatados **3.** *B* e, em seguida, *A* e *C* empatados **5.** (a) *f*, porque a temperatura do gelo não pode aumentar até o ponto de congelamento e depois diminuir; (b) *b* e *c* no ponto de congelamento da água, *d* acima, *e* abaixo; (c) em *b*, o líquido congela parcialmente e o gelo não derrete; em *c* o líquido não congela e o gelo não derrete; em *d*, o líquido não congela e o gelo derrete totalmente; em *e*, o líquido congela totalmente e o gelo não derrete **7.** (a) ambos no sentido horário; (b) ambos no sentido horário **9.** (a) maior; (b) 1,2,3; (c) 1,3,2; (d) 1,2,3; (e) 2,3,1 **11.** *c,b,a*

PR 1. 1,366 **3.** 348 K **5.** (a) 320°F; (b) −12,3°F **7.** −92,1°X **9.** 2,731 cm **11.** 49,87 cm^3 **13.** 29 cm^3 **15.** 360°C **17.** 0,26 cm^3

19. 0,13 mm **21.** 7,5 cm **23.** 160 s **25.** 94,6 L **27.** 42,7 kJ **29.** 33 m^2 **31.** 33 g **33.** 3,0 min **35.** 13,5C° **37.** (a) 5,3°C; (b) 0; (c) 0°C; (d) 60 g **39.** 742 kJ **41.** (a) 0°C; (b) 2,5°C **43.** (a)$1,2 \times 10^2$ J; (b) 75 J; (c) 30 J **45.** −30 J **47.** (a) 6,0 cal; (b) −43 cal; (c) 40 cal; (d) 18 cal; (e) 18 cal **49.** 60 J **51.** (a) 1,23 kW; (b) 2,28 kW; (c) 1,05 kW **53.** 1,66 kJ/s **55.** (a)16 J/s; (b) 0,048 g/s **57.** (a)$1,7 \times 10^4$ W/m^2; (b) 18 W/m^2 **59.** 0,50 min **61.** 0,40 cm/h **63.** −4,2°C **65.** 1,1 m **67.** 10% **69.** (a) 80 J; (b) 80 J **71.** $4,5 \times 10^2$ J/kg·K **73.** 0,432 cm^3 **75.** $3,1 \times 10^2$ J **77.** 79,5°C **79.** 23 J **81.** (a) $11p_1V_1$; (b) $6p_1V_1$ **83.** $4,83 \times 10^{-2}$ cm^3 **85.** 10,5°C **87.** (a) 90 W; (b) $2,3 \times 10^2$ W; (c) $3,3 \times 10^2$ W **89.** (a) $1,87 \times 10^4$; (b) 10,4 h **91.** 333 J **93.** 8,6 J **95.** (a) −45 J; (b) +45 J

CAPÍTULO 19

T **1.** todos, menos *c* **2.** (a) são todos iguais; (b) 3,2,1 **3.** o gás *A* **4.** 5 (a maior variação de *T*) e, em seguida, 1,2,3 e 4 empatados **5.** 1,2,3 ($Q_3 = 0$, Q_2 é produzido pelo trabalho W_2, mas Q_1 é produzido por um trabalho maior W_1 e aumenta a temperatura do gás)

P **1.** *d*, *a* e *b* empatados, *c* **3.** 20 J **5.** (a) 3; (b) 1; (c) 4; (d) 2; (e) sim **7.** (a) 1,2,3,4; (b) 1,2,3 **9.** a volume constante

PR **1.** (a) 0,933 kg; (b) $7,64 \times 10^{21}$ átomos **3.** (a) 0,0388 mol; (b) 220°C **5.** 25 moléculas/cm^3 **7.** (a) $3,14 \times 10^3$ J; (b) cedido **9.** 186 kPa **11.** 5,60 kJ **13.** (a) 1,5 mol; (b)$1,8 \times 10^3$ K; (c) $6,0 \times 10^2$ K; (d) 5,0 kJ **15.** 360 K **17.** $2,0 \times 10^5$ Pa **19.** (a) 511 m/s; (b) −200°C; (c) 899°C **21.** $1,8 \times 10^2$ m/s **23.** 1,9 kPa **25.** (a) $5,65 \times 10^{-21}$ J; (b) $7,72 \times 10^{-21}$ J; (c) 3,40 kJ; (d) 4,65 kJ **27.** (a) $6,76 \times 10^{-20}$ J; (b) 10,7 **29.** (a) 6×10^9 km **31.** (a) $3,27 \times 10^{10}$ moléculas/cm^3; (b) 172 m **33.** (a) 6,5 km/s; (b) 7,1 km/s **35.** (a) 420 m/s; (b) 458 m/s; (c) sim **37.** (a) 0,67; (b) 1,2; (c) 1,3; (d) 0,33 **39.** (a) $1,0 \times 10^4$ K; (b) $1,6 \times 10^5$ K; (c) $4,4 \times 10^2$ K; (d) $7,0 \times 10^3$ K; (e) não; (f) sim **41.** (a) 7,0 km/s; (b) $2,0 \times 10^{-8}$ cm; (c) $3,5 \times 10^{10}$ colisões/s **43.** (a) 3,49 kJ; (b) 2,49 kJ; (c) 997 J; (d) 1,00 kJ **45.** (a) $6,6 \times 10^{-26}$ kg; (b) 40 g/mol **47.** (a) 0; (b) +374 J; (c) +374 J; (d) $+3,11 \times 10^{-22}$ J **49.** 15,8 J/mol·K **51.** 8,0 kJ **53.** (a) 6,98 kJ; (b) 4,99 kJ; (c) 1,99 kJ; (d) 2,99 kJ **55.** (a) 14 atm; (b) $6,2 \times 10^2$ K **57.** (a) diatômico; (b) 446 K; (c) 8,10 mol **59.** −15 J **61.** −20 J **63.** (a) 3,74 kJ; (b) 3,74 kJ; (c) 0; (d) 0; (e) −1,81 kJ; (f) 1,81 kJ; (g) −3,22 kJ; (h) −1,93 kJ; (i) −1,29 kJ; (j) 520 J; (k) 0; (1)520 J; (m) 0,0246 m^3; (n) 2,00 atm; (o) 0,0373 m^3; (p) 1,00 atm **65.** (a) monoatômica; (b) $2,7 \times 10^4$ K; (c) $4,5 \times 10^4$ mol; (d) 3,4 kJ; (e) $3,4 \times 10^2$ kJ; (f) 0,010 **67.** (a) 2,00 atm; (b) 333 J; (c) 0,961 atm; (d) 236 J **69.** 349 K **71.** (a) −374 J; (b) 0; (c) +374 J; (d) $+3,11 \times 10^{-22}$ J **73.** $7,03 \times 10^9$ s^{-1} **75.** (a) 900 cal; (b) 0; (c) 900 cal; (d) 450 cal; (e) 1200 cal; (f) 300 cal; (g) 900 cal; (h) 450 cal; (i) 0; (j) −900 cal; (k) 900 cal; (1) 450 cal **77.** (a) $3/v_0^2$; (b) $0,750v_0$; (c) $0,775v_0$ **79.** (a) −2,37 kJ; (b) 2,37 **81.** (b) 125 J; (c) absorvida **83.** (a) 8,0 atm; (b) 300 K; (c) 4,4 kJ; (d) 3,2 atm; (e) 120 K; (f) 2,9 kJ; (g) 4,6 atm; (h) 170 K; (i) 3,4 kJ **85.** (a) 38 L; (b) 71 g kJ **87.** −3,0 J

CAPÍTULO 20

T **1.** *a,b,c* **2.** menor (*Q* é menor) **3.** c,b,a **4.** a,d,c,b **5.** b

P **1.** *b,a,c,d* **3.** permanece constante **5.** *a* e *c* empatados e depois *b* e *d* empatados **7.** (a) permanece a mesma; (b) aumenta; (c) diminui **9.** A, primeira; B, primeira e segunda; C, segunda; D, nenhuma

PR **1.** (a) 9,22 kJ; (b) 23,1 J/K; (c) 0 **3.** 14,4 J/K **5.** (a) $5,79 \times 10^4$ J; (b) 173 J/K **7.** (a) 320 K; (b) 0; (c) +1,72 J/K **9.** +0,76 J/K **11.** (a) 57,0°C; (b) −22,1 J/K; (c) +24,9 J/K; (d) +2,8 J/K **13.** (a) −710 mJ/K; (b) +710 mJ/K; (c) +723 mJ/K; (d) −723 mJ/K; (e) +13 mJ/K; (f) 0 **15.** (a) −943 J/K; (b) +943 J/K; (c) sim **17.** (a) 0,333; (b) 0,215; (c) 0,644; (d) 1,10; (e) 1,10; (f) 0; (g) 1,10; (h) 0; (i) −0,889; (j) −0,889; (k) −1,10; (1) −0,889; (m) 0; (n) 0,889; (o) 0 **19.** (a) 0,693; (b) 4,50; (c) 0,693; (d) 0; (e) 4,50; (f) 23,0 J/K; (g) −0,693; (h) 7,50; (i) −0,693; (j) 3,00; (k) 4,50; (1)23,0 J/K **21.** −1,18 J/K **23.** 97 K **25.** (a) 266 K; (b) 341 K **27.** (a) 23,6%; (b) $1,49 \times 10^4$ J **29.** (a) 2,27 kJ; (b) 14,8 kJ; (c) 15,4%; (d) 75,0%; (e) maior **31.** (a) 33 kJ; (b) 25 kJ; (c) 26 kJ; (d) 18 kJ **33.** (a) 1,47 kJ; (b) 554 J; (c) 918 J; (d) 62,4% **35.** (a) 3,00; (b) 1,98; (c) 0,660; (d) 0,495; (e) 0,165; (f) 34,0% **37.** 440 W **39.** 20 J **41.** 0,25 hp **43.** 2,03 **47.** (a) $W = N!/(n_1!n_2!n_3!)$; (b) $[(N/2)!(N/2)!]/[(N/3)!(N/3)!(N/3)!]$; (c) $4,2 \times 10^{16}$ **49.** 0,141 J/K·s **51.** (a) 87 m/s; (b) $1,2 \times 10^2$ m/s; (c) 22 J/K **53.** (a) 78%; (b) 82 kg/s **55.** (a) 40,9°C; (b) −27,1 J/K; (c) 30,3 J/K; (d) 3,18 J/K **57.** +3,59 J/K **59.** $1,18 \times 10^3$ J/K **63.** (a) 0; (b) 0; (c) −23,0 J/K; (d) 23,0 J/K **65.** (a) 25,5 kJ; (b) 4,73 kJ; (c) 18,5% **67.** (a) 1,95 J/K; (b) 0,650 J/K; (c) 0,217 J/K; (d) 0,072 J/K; (e) diminui **69.** (a) 4,45 J/K; (b) não **71.** (a) $1,26 \times 10^{14}$; (b) $4,71 \times 10^{13}$; (c) 0,37; (d) $1,01 \times 10^{29}$; (e) $1,37 \times 10^{28}$; (f) 0,14; (g) $9,05 \times 10^{58}$; (h) $1,64 \times 10^{57}$; (i) 0,018; (j) diminui **73.** (a) 42,6 kJ; (b) 7,61 kJ **75.** (a) 1; (b) 1; (c) 3; (d) 10; (e) $1,5 \times 10^{-23}$ J/K; (f) $3,2 \times 10^{-23}$ J/K